

## Test

◇ M2–09/10–02 ◇

- Wichtig:**
- ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
  - ♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
  - ♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
  - ◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
  - ♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

## Fourier

**Probl. 1** Gegeben ist die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f_1(t) = -t$ , Fundamentalintervall  $FI = (-\pi, \pi)$ .

- (a) Zeige die Berechnung der Fourierreihe  $\tilde{f}_{1,6}(t)$  bis  $n = 6$  exakt.
- (b) Berechne  $\Delta_{rel} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} f_1^2(t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_{1,6}^2(t) dt \right) / \left( \int_{-\pi}^{\pi} f_1^2(t) dt \right)$ . (*Hinweis:* Parseval)
- (c) Beurteile, ob es sich bei der Fourierreihe um eine reine Cosinus- oder Sinusreihe handelt.
- (d) Bestimme die allgemeine Form der Reihe ( $n = \infty$ ).
- (e) Berechne den Wert der Reihe an der Stelle  $t = \frac{\pi}{2}$  exakt:  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{?}^{?} ? = ?$
- (f) Berechne die Werte  $\tilde{f}_{1,n}\left(\frac{\pi}{2}\right)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots, 6$  numerisch und beobachte, ob sich die Werte in eine Richtung bewegen oder ob und somit wie sie oszillieren. Beschreibe das Verhalten.
- (g) Skizziere den Graphen der Fourierreihe  $\tilde{f}_{1,6}(t)$  (für  $n = 6$ ) über dem angegebenen Fundamentalintervall.
- (h) Lese aus dem Graphen für  $n = 6$  ab, wieviele horizontale Tangenten es an den Graphen innerhalb einer Periode gibt.
- (i) Bestimme die komplexe Form der Fourierreihe bis  $n = 6$  exakt (nicht numerisch).

**Probl. 2** Gegeben ist die 1-periodische Funktion  $f_2(t) = -t$  auf dem  $FI = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Gegenüber der letzten Aufgabe hat somit die Periode  $T$  und das  $FI$  geändert.

- (a) Ermittle die Fourierreihe  $\tilde{f}_{2,6}(t)$  (bis  $n = 6$ ) exakt.
- (b) Bestimme die allgemeine Form der Reihe ( $n = \infty$ ).
- (c) Berechne den Fehler, d.h. die Abweichung der Reihe bis  $n = 6$  an der Stelle  $t = \frac{1}{4}$  exakt.
- (d) Skizziere den Graphen der Fourierreihe  $\tilde{f}_{2,6}(t)$  (für  $n = 6$ ) über dem angegebenen  $FI$ .
- (e) Bestimme die komplexe Form der Fourierreihe bis  $n = 6$  exakt (nicht numerisch).

**Probl. 3** Sei die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f_3(t)$  gegeben durch  $f(t) = (|-t + \pi| + \cos(\frac{t}{2}))$  über dem  $FI = (-\pi, \pi)$ .

- (a) Bestimme die Fourierreihe  $\tilde{f}_{3,4}(t)$  von  $f_3(t)$  bis und mit  $n = 4$  (Koeffizienten numerisch).
- (b) Bestimme den Graphen der Fourierreihe  $\tilde{f}_{3,4}(t)$  von  $f_3(t)$  (bis und mit  $n = 4$ ).

**Probl. 4** (a) Suche die  $2\pi$ -periodische Fourierreihe für die Funktion (bis  $n = 6$  oder allgemein):

$$f_4(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

- (b) Die Fourierreihe  $f_4(t)$  kann man als Funktion für eine periodisch ein- und ausgeschaltete konstante Spannung interpretieren. Was hat daher eine solche Spannung mit harmonischen Schwingungen zu tun?
- (c) Beurteile, ob bei der Reihe für  $f_4(t)$  das Gibbs'sche Phänomen zur Wirkung kommt!
- (d) Differenziere die Fourierreihe für  $f_4(t)$  und zeichne den Graphen für ein selbst gewähltes vernünftiges  $n$ . Beurteile, ob man das Resultat hier angesichts der einfach bestimmbaren Ableitung der Funktion  $f_4(t)$  praktisch verwenden könnte.
- (e) Ersetze  $t$  in  $f_4(t)$  durch  $c \cdot x$  und wähle  $c$  so, dass  $g_4(c \cdot x) = f_{4,c}(x)$  eine Funktion mit der Periode  $T = 2$  wird.
- (f) Bestimme die Fourierreihe der Funktion  $h_{4,\sin}(t) = f_4(t) \cdot \sin(t)$ .

**Probl. 5** Gegeben sind die Messwerte  $(0, 0), (\frac{2\pi}{3}, 1), (2\frac{2\pi}{3}, 3), (3\frac{2\pi}{3}, 0), (4\frac{2\pi}{3}, 1), (5\frac{2\pi}{3}, 3), (6\frac{2\pi}{3}, 0), \dots$ . Wie man sieht, zeigt sich nach den ersten 3 Messwerten eine Periodizität:  $y_k = y_{k+3}$ . Bestimme die Koeffizienten  $\tilde{c}_s$  für die DFT.

**Probl. 6** Sei  $f(x) = e^{-x^2}$

- (a) Zeige die Berechnung der Fouriertransformierten  $\hat{f}(\Omega)$  von  $f(x)$ , falls diese existiert.
- (b) Skizziere  $f(x)$  und  $\hat{f}(\Omega)$ , falls diese möglich ist.
- (c) Was ist bemerkenswert am Resultat?

**Probl. 7** Sei  $f_{a,b,c}(x) = c$  für  $x \in [a, b]$  — und  $f_{a,b,c}(x) = 0$  für  $x \notin [a, b]$

- (a) Ermittle die Fouriertransformierte  $\hat{f}(\Omega)$  von  $f_{a,b,c}(x) = f_{1,2,3}(x)$ .
- (b) Ermittle die Fouriertransformierte  $\hat{f}(\Omega)$  von  $f_6(x) = f_{1,2,3}(x) + f_{4,5,6}(x)$ .

Viel Glück!