Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 02 ◇

Repetition und Ausbau Vektoralgebra und Vektorgeometrie

(Die nachfolgenden Aufgaben sind aus ehemaligen Serien zur Vektorgeometrie des vormaligen Diplomstudienganges B in leicht veränderter Form übernommen worden.)

Teil 1

Probl. 1 Liegen die Punkte $A(3;0;4)$, $B(1;1;1)$ und $C(-7;5;11)$ auf einer Geraden?

Probl. 2 Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechne auch den Schnittpunkt der Geraden, sofern dieser existiert.

(a) $$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(d) $$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Probl. 3 Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $P(2;-3;1)$. Bestimme eine Parameterdarstellung der winkelhalbierenden Geraden von g und h.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Probl. 4 Berechne den Durchstosspunkt der Geraden g, gegeben durch die Punkte $A(3;-2;2)$ und $B(-3;5;8)$, mit der Ebene Φ, gegeben durch die Punkte $U(2;1;-3)$, $V(1;5;4)$ und $W(6;-2;-1)$.

Probl. 5 Bestimme die gegenseitige Lage der Ebenen Φ und Ψ.

(a)

$$\Phi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \Psi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 22 \\ -23 \\ -4 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 29 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\Phi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \Psi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Probl. 6 Gegeben ist die Ebene $\Phi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Wie lautet die Ebenengleichung (Koordinatengleichung)?

Probl. 7 Gib für die Ebene $\Phi:\ 3\,x - 7\,z = 21$ eine Parameterdarstellung an.

Probl. 8 Die Punkte A, B und C liegen auf der Ebenen Φ. Wie lautet ihre Ebenengleichung? Bestimme die Schnittpunkte der Ebene Φ mit den Koordinatenachsen.

(a) $A(4;3;-2)$, $B(-3;1;2)$, $C(1;0;2)$

(b) $A(2;-3;0)$, $B(-4;6;2)$, $C(0;0;9)$

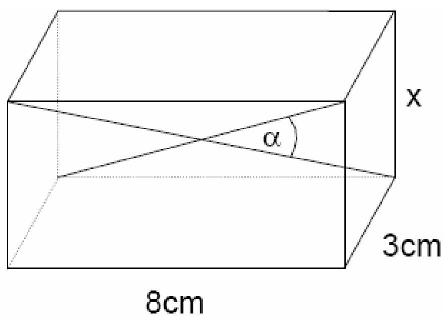
Teil 2

Probl. 1 Berechne mit dem Skalarprodukt die Winkel im Dreieck ABC.
$A(-1;0;5)$, $B(3;-4;7)$, $C(2;2;3)$.

Probl. 2 Der Punkt $P(1;2;0)$ wird an der Ebene $\Phi:\ x - y + 2\,z = 3$ gespiegelt. Berechne die Koordinaten des gespiegelten Punktes P' sowie den Abstand zwischen P und P'.

Probl. 3 Zeige mit Hilfe des Skalarprodukts, dass die Winkelhalbierenden von zwei sich schneidenden Geraden senkrecht aufeinander stehen.

Probl. 4 Von einem Quader messen zwei Seiten $3\,cm$ und $8\,cm$. Welche Länge x hat die dritte Seite, wenn der Winkel α zwischen den eingezeichneten x Körperdiagonalen 60^o ist?



Probl. 5 Von einem Rechteck $ABCD$ sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(2;-4;-9)$ und $B(0;6;1)$ gegeben. Ein dritter Eckpunkt (d.h. C oder D) liegt auf der Geraden g. Berechne die Koordinaten aller Eckpunkte.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Probl. 6 Bestimme den Abstand zwischen den Ebenen $\Phi:\ x+2\,y+3\,z=5$ und $\Psi:\ x+2\,y+3\,z=-2$.

Probl. 7 Bestimme den Abstand zwischen $\Phi:\ 3\,x-y+2\,z=1$ und $\Psi:\ -6\,x+2\,y-4\,z=-7$.

Probl. 8 Berechne den Abstand des Punktes $P(-1;0;3)$ von der Ebene $\Phi:\ -x+2\,y+5\,z=-2$.

Probl. 9 Bestimme die Gleichung der Ebene Ψ, die zur Ebene $\Phi:\ 3\,x-5\,y-4\,z=10$ parallel ist und zu ihr einen Abstand von 4 aufweist.

Probl. 10 Die beiden Ebenen Φ und Ψ sind gegeben durch:
$\Psi:\ -x-2\,y+z=2$
Ψ : bestimmt durch die Punkte $A(3;4;2)$, $B(3;-1;5)$ und $C(3;0;-1)$.
Wie lauten die Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen?

Probl. 11 Gegeben ist das Dreieck ABC im Raum. Berechne allgemein Mittelpunkt und Radius seines Umkreises. Berechne dann konkret Umkreismittelpunkt und Umkreisradius des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(-2;5;-5)$, $B(3;-1;5)$ und $C(0;3;-1)$.

Teil 3

Probl. 1 Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

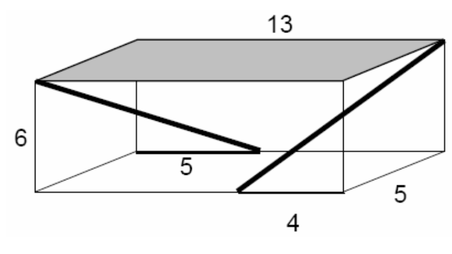
Probl. 2 Berechne den Abstand des Punktes $P(2;4;-5)$ von der Geraden g.

$$g:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$$

Probl. 3 Berechne Oberflächeninhalt und Volumeninhalt des Tetraeders $ABCD$:

$$A(2;-1;5),\ B(3;3;0),\ C(-4;3;-2),\ D=(-1;-3;2)$$

Probl. 4 Ein Dach wird mit zwei Stützen abgestützt. Berechne den Abstand zwischen den Stützen und gib die Koordinaten der Punkte an, zwischen welchen dieser Abstand gemessen werden kann.



Probl. 5 Zerlege die Kraft $\vec{F}$ in zwei Komponenten $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$. Die Kraft $\vec{F_1}$ ist parallel zur Ebene, aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Und die Kraft $\vec{F_2}$ steht normal zu dieser Ebene.

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}30\\-60\\80\end{pmatrix},\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Probl. 6 Gib eine Parameterdarstellung für die Gerade g an, die durch den Punkt P geht und senkrecht auf der Ebene Φ steht.

$$P(2;0;-3), \qquad \Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Probl. 7 Gib zwei Ebenen $2\,x - y + 3\,z + 4 = 0$ und $x + y - 2\,z - 3 = 0$ und ein Punkt $P(2;0;-1)$. Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Geraden, die durch P geht und zu den beiden Ebenen parallel ist.

Probl. 8 Ein Hausdach besteht aus zwei Dreiecksflächen OAC und OBC. Die dreieckige Hausfront ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis AB und Höhe $h = 10$.

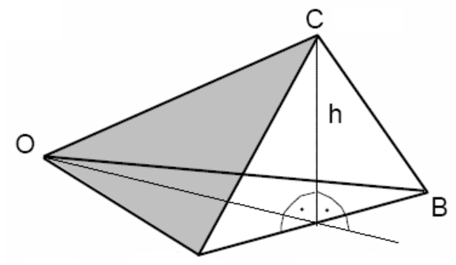
(a) Berechne die Koordinaten der Hausspitze C.

(b) Berechne den Winkel $\angle ACB$.

(c) Unter welchem Winkel treffen die Dachflächen aufeinander?

(d) Wie gross ist die Dachfläche insgesamt?

(e) Berechne das Hausvolumen, d.h. das Volumen des Tetraeders $OABC$.



$O(0;0;0)$, $A(12;4;0)$, $B(2;14;0)$