

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

1 Organisatorisches – Quant à l’organisation	1
2 Aussagenlogik – Log.d. prop.	3
2.1 Elementare Logik – Logique élém.	3
2.2 Wichtig – Important	3
2.3 Bsp. f. Wahrheitstab. – Ex. p. tab. d. vér.	4
2.4 Aussageformen – Formes propos.	4
2.5 Spez. Aussageformen – Formes propos. spéc.	5
2.6 Korr. log. Schluss – Concl. log. corr.	6
2.7 Polnische Notation – Notation polonaise	6
2.8 Quantoren – Quantificateurs	7
2.9 Normalformen – Formes normales	7
2.10 Resultate – Résultats	8
2.11 Literatur – Littérature	9
3 Mengen Rel., Abb. – Ensembles, rel., appl.	11
3.1 Mengen – Ensembles	11
3.1.1 Definitionen – Définitions	11
3.1.2 Neue Mengen – Nouveaux ensembles	11
3.1.3 Mengenverknüpfungen – Compositions	12
3.2 Relationen – Relations	13
3.2.1 Definitionen – Définitions	13
3.2.2 Spezielle Relationen – Relations spéciales	14
3.2.3 Partitionen – Partitions	16
3.3 Abb. u. Funktionen – Applications et fonc.	17
3.3.1 Definitionen – Définitions	17
3.3.2 Verkettungen von Funktionen – Composition de fonctions	18
3.4 Lösungsmengen — Ensembles de solution	20
4 Zahlen, Indukt., Rekurs. – Nombres, ind. rékurs.	23
4.1 Nat. Zahlen \mathbf{N} – Nombres nat. \mathbf{N}	23
4.1.1 Axiomatische Einführung – construction axiomatique	23
4.1.2 Operationen auf \mathbf{N} – Opérations sur \mathbf{N}	24
4.1.3 Vollständige Induktion – Induction complète	25
4.1.4 Rekursion – Récursion	27
4.1.5 Ordnungsrelation – Relation d’ordre	28
4.1.6 Potenzen in \mathbf{N} – Puissances dans \mathbf{N}	29
4.1.7 Teiler, Vielfache – Diviseurs, multiples	29
4.2 Ganze Zahlen \mathbf{Z} – Nombres entiers \mathbf{Z}	29

4.2.1	Konstruktion von \mathbf{Z} – construction de \mathbf{Z}	29
4.2.2	Operationen auf \mathbf{Z} – Opérations sur \mathbf{Z}	30
4.2.3	Interpretation \mathbf{Z} – Interprétation \mathbf{Z}	30
4.2.4	0 und neegative \mathbf{Z} – 0 et \mathbf{Z} négatifs	31
4.2.5	Struktur – Structure	31
4.2.6	Ordnungsrelation – Relation d’ordre sur \mathbf{Z}	32
4.2.7	Weitere Ausdehnungen – Autres extensions	32
4.2.8	Teiler – Diviseurs	33
4.2.9	Kongruenzen – Congruences	35
4.2.10	Restklassenrechnen – Calcul avec classes de restes	35
4.2.11	Polynomringe – Anneaux de polynômes	37
4.2.12	Positionssysteme – Des systèmes de position	38
4.3	Ergänzungen – Annexe	38
4.3.1	Ausblick – Autres faits divers	41
4.4	Rat. Zahlen \mathbf{Q} – Nombres rationnels \mathbf{Q}	42
4.4.1	Definition – Définition	42
4.4.2	Operationen – Opérations	43
4.4.3	Einbettung – Plongement	43
4.4.4	Ordnungsrelation – Relation d’ordre	44
4.4.5	Eigenschaften – Qualités	44
4.5	Die Wurzel — La racine	45
4.5.1	Die Quadratwurzel — La racine carrée	45
4.5.2	Die n -te Wurzel — La n -ème racine	46
4.6	Reelle Zahlen und Folgen — Nombres réels et suites	47
4.6.1	Darstellungsarten — Façons de représentation	47
4.6.2	Zahlenerweiterung — Elargir les ensembles de nombres	49
4.6.3	Das Problem der Mächtigkeiten — Le problème de la puissance	50
4.6.4	Weitere Resultate — D’autres résultats	54
5	Vektoren – Vecteurs	57
5.1	Koordinatenunabhängig – Sans système de coordonnées	57
5.1.1	Inhalt – Contenu	57
5.1.2	Addition – Addition	58
5.1.3	Streckung – Allongement	59
5.1.4	Allgemeine Definition – Définition générale	60
5.1.5	Unterraum, direkte Summe – Sous-espace vectoriel, somme directe	61
5.1.6	Lineare Abhängigkeit – Dépendance linéaire	62
5.1.7	Basen – Des bases	65
5.1.8	Spezielle Vektoren – Des vecteurs spéciaux	68
5.2	Koordinatenabhängig – Dans un système de coordonnées	69
5.2.1	Grundlagen – Fondements	69
5.2.2	Normalsysteme – Systèmes normaux	70
5.2.3	Koordinatenvektoren – Vecteurs aux coordonnées	71
5.2.4	Basiswechsel – Changement de base	75
5.2.5	Vektor in einer neuen Basis – Vecteur dans une nouvelle base	75
5.2.6	Nach dem Austauschverfahren – d’après la méthode d’échange des vecteurs	75
5.2.7	Anwendungen — Applications	78
5.3	Geometrie – Géométrie	78
5.3.1	Elementare geometrische Sätze – Théorèmes géométriques élémentaires	79
5.3.2	Weitere Begriffe und Folgerungen – D’autres notions et conséquences	84
5.3.3	Sätze – Théorèmes	86
5.3.4	Drehungen – Rotations	90
5.3.5	Additionstheoreme – Théorèmes d’addition	92

5.3.6	Leben wir in einem 4-dim. Raum? – Vivons-nous dans un espace de dim. 4?	93
5.4	Skalarprodukt – Produit scalaire	94
5.4.1	Zur Definition – Quant à la définition	94
5.4.2	In Komponenten – Dans les composants	96
5.4.3	Anwendungen – Applications	97
5.4.4	Drehung eines Vektors — Déplacement angulaire d'un vecteur	98
5.5	Geradengleichungen – Equations de droites	99
5.5.1	Parametergleichungen – Equations paramétriques	99
5.5.2	Komponentengleichungen – Equations de composants	99
5.5.3	Gerade in Grundebene – Droite dans le plan fondamental	100
5.5.4	Andere Formen — D'autres formes	101
5.5.5	Winkel zwischen Geraden – Angle entre différentes droites	101
5.6	Ebenengleichungen – Equations de plans	102
5.6.1	Parametergleichungen – Equations paramétrique	102
5.6.2	Komponentengleichungen – Equations de composants	102
5.6.3	Koordinatengleichungen – Equations de coordonnées	102
5.6.4	Interpretation von Gleichungen – Interprétation d' équations	103
5.6.5	Spezielle Lage – Position spéciale	103
5.6.6	Übersicht – Vue générale	104
5.6.7	Hess'sche Normalform – Forme normale de Hess	105
5.7	Anwendungen – Applications	107
5.7.1	Abstand eines Punktes – Distance d'un point	107
5.7.2	Winkelhalbierende – Bissectrice	107
5.7.3	Kreis, Kugel, Ellipse – Cercle, sphère, ellipse	107
5.7.4	Spezielle Kreise, Kugeln – Cercles, sphères spéciales	108
5.7.5	Kegelschnitte – Sections des cônes	109
5.7.6	Tangente – Tangente	110
5.7.7	Polare — Polaire	111
5.7.8	Anwendung — Application	112
5.7.9	Potenz — Puissance	113
5.8	Vektorprodukt — Produit vectoriel	114
5.8.1	Flächenprodukt — 'Produit de surface'	114
5.8.2	Anwendungen — Applications	116
5.8.3	Vektorprodukt — Produit vectoriel	117
5.8.4	Definition Vektorprodukt — Définition produit vectoriel	117
5.8.5	Regeln — Règles	119
5.8.6	Anwendungen — Applications	121
5.9	Spatprodukt — Produit triple	122
5.9.1	Definition — Définition	122
5.9.2	Cramer — Cramer	125
5.9.3	Weitere Produkte — Autres produits	125
5.9.4	Kegel und Zylinder — Cône et cylindre	126
5.9.5	Ausblick — Perspectives	127
5.10	Berechnungen — Calculs	129
5.10.1	Koord'gleichung einer Ebene — Equation de coord. d'un plan	129
5.10.2	Spiegeln eines Punktes — Refléter un point	130
6	Komplexe Zahlen — Nombres complexes	133
6.1	Definition — Définition	133
6.1.1	Zahlenmenge — Ensemble de nombres	133
6.1.2	Operationen — Opérations	134
6.1.3	Einbettung — Plongement	136
6.1.4	Imaginäre Zahlen — Nombres imaginaires	136

6.1.5	Weitere Begriffe — D'autres notions	137
6.2	Eigenschaften — Qualités	137
6.2.1	Ordnung — Ordre	137
6.2.2	Rechenregeln — Règles de calcul	139
6.2.3	Multiplikation geometrisch — Multiplication géométriquement	140
6.2.4	Exponentialschreibweise — Notation exponentielle	140
6.2.5	Anwendung (Zeigerdiagramme) — Application (Diag. d. coord.)	142
6.3	Wurzeln in \mathbf{C} — Racines dans \mathbf{C}	143
6.3.1	Das Problem — Le problème	143
6.3.2	Ausblicke — Perspectives	145
6.4	Hauptsatz der Algebra — Théorème principal de l'algèbre	148
6.4.1	Der Satz — Le Théorème	148
6.4.2	Anwendungen — Applications	150
6.4.3	Kubische Gleichung — Equation cubique	152
6.4.4	Herleitung des Hauptsatzes — Dédution du théorème principal	153
6.5	Weitere Anwendungen — Autres applications	157
6.5.1	Summe der Einheitswurzeln — Somme des racines de l'unité	157
6.5.2	Formeln von De Moivre — Formules de De Moivre	157
6.5.3	Fourierentwicklung — Séries de Fourier	158
7	Komplexe Funktionen — Fonctions complexes	159
7.1	Differenzierbarkeit, Wege — Dérivés, chemins	159
7.1.1	Grundlagen — Fondements	159
7.1.2	Differenzierbarkeit — Dérivabilité	161
7.1.3	Differenzierbarkeitsregeln — Règles pour dérivabilité	162
7.1.4	Wege in \mathbf{C} — Chemins dans \mathbf{C}	163
7.1.5	Differenzierbare Wege — Chemins dérivables	164
7.2	Konforme Abbildungen — Applications conformes	165
7.3	Möbius-Transformationen — Transformations de Möbius	166
7.4	Definitionen — Définitions	166
7.4.1	Eigenschaften — Qualités	167
7.5	Cauchy-Riemann — Cauchy-Riemann	169
7.5.1	Herleitung — Dédution	169
7.5.2	Harmonische Funktionen — Fonctions harmoniques	169
7.6	Exp-, Log'funktion — Fonct. exp., log.	170
7.7	Trig. Funkt. — Fonct. trig.	173
7.8	Anwendungen — Applications	174
7.8.1	Idee — Idée	174
7.8.2	Smith-Diagramm — Diagramme de Smith	175
7.8.3	Joukowski-Profil — Profil de Joukowski	176
7.8.4	Zeigerdiagramme — diagrammes-vecteurs	177
7.9	Darstellung komplexer Funktionen — Représentation de fonct. compl.	177
7.9.1	Beispiel einer Kurve — Exemple d'une courbe	177
7.9.2	Beispiel einer rationalen Funktion — Exemple: Fonction rationnelle	178
8	Gleichungssysteme — Systèmes d'équations	181
8.1	Lösungsraum — Espace de solutions	181
8.1.1	Lineare Gleichung — Equation linéaire	181
8.1.2	Lineare Mannigfaltigkeit — Variété linéaire	182
8.1.3	Büschel, Bündel — Faisceau, gerbe	184
8.1.4	„Homogenisierung“ — „Homogénéiser“	185
8.1.5	Gleichungssysteme — Systèmes d'équations	185
8.2	Gauss-Jordan — Gauss-Jordan	188

8.2.1	Beispiel — Exemple	188
8.2.2	Allgemeine Lösung — Solution générale	190
8.2.3	Anwendung — Application	195
9	Matrizen, Determinanten — Matrices, déterminants	197
9.1	Gleich'syst., Matrizen — Syst.d'équ., matr.	197
9.1.1	Begriff — Notion	197
9.1.2	Matrixprodukt — Produit matriciel	199
9.2	Determinanten — Déterminants	202
9.2.1	Determinanten für n grösser 3 — Déterminants pour n plus grand 3	202
9.2.2	Entwicklungssatz — Théorème du développement	205
9.2.3	Berechnungsmethoden — Méthodes de calculer	211
9.2.4	Cramer für n grösser 3 — Cramer pour n plus grand 3	212
9.3	Allg. Matrixprodukt — Prod. matriciel général	213
9.3.1	Rechenregeln — Règles de calcul	213
9.3.2	Matrixprodukt, lineare Abbildung — Produit matriciel, application linéaire	214
9.3.3	Nochmals Matrixmultiplikation — Multiplication matricielle encore une fois	217
9.3.4	Untermatrizen — Des sous-matrices	218
9.4	Spez. Matrizen, Inverse — Matrices spéciales, inverse	218
9.4.1	Spezielle geometrische Abbildungen — Applications géométriques spéciales	218
9.4.2	Reguläre Matrizen — Matrices régulières	221
9.4.3	Übersicht — Vue d'ensemble	226
9.4.4	Berechnung der Inversen — Calculer l'inverse	229
9.4.5	Transponierte und Produkt — Transposé et produit	232
9.4.6	Schwach besetzte Matrizen — Matrices aux éléments minuscules	233
9.4.7	Rechenbeispiele — Exemples de calcul	234
9.5	Nochmals geometrische Anwendungen — D'autres applications géométriques	234
9.5.1	Matrixkomposition — Composition de matrices	234
9.5.2	Matrix zur Geradenspiegelung — Matrice pour la réflexion à une droite	235
9.5.3	Projektion auf Ebene, Matrix — Projection sur un plan, matrice	236
9.5.4	Drehung um Raumachse — Révolution autour d'une axe dans l'espace	237
9.6	Matrixprod., Basiswechsel — Prod. d. matr., changement de base	239
9.6.1	Determinantenmultiplikationssatz — Multiplication des déterminants	239
9.6.2	Determinantenmult. vereinfacht — Multipl. des déterm. simplifiée	243
9.6.3	Determinantenmult. u. Geometrie — Multipl. des déterm. et géom.	243
9.6.4	Lineare Abbildung, Basisabbildung — Application linéaire, application de base	246
9.7	Gauss-Algorithmus mit Matrizen — Algorithme de Gauss avec des matrices	247
9.8	Iterative Berechnung der Inversen — Calcul itératif de l'inverse	249
9.8.1	Methode — Méthode	249
9.8.2	Rahmen der Methode — Cadre de la méthode	251
9.8.3	Jacobi-Verfahren f. Gleich'syst. — Méth. de Jacobi p. d. syst. d'éq.	252
9.8.4	Jacobi-Verfahren, inverse Matrix — Méth. de Jacobi, matrice inverse	253
9.9	D'Gl und Differenzenmethode — Eq. diff. et méthode d'éq. aux différences	254
10	Eigenwertprobleme — Problèmes des valeurs propres	257
10.1	Eigenwerte, Eigenvektoren — Valeurs propres, vecteurs propres	257
10.2	Berechn. Eigenw., Eigenvekt. — Calcul d. val. prop., vect. prop.	258
10.2.1	Charakteristisches Polynom — Polynôme caractéristique	258
10.2.2	EW und EV der Inversen — EW et EV de l'inverse	260
10.2.3	Beispiele — Exemples	261
10.3	Eigensch. EW, EV — Qualités val. prop., vect. prop.	262
10.3.1	Lineare Unabhängigkeit — Indépendance linéaire	262
10.3.2	Nicht reguläre Matrizen — Matrices non régulières	263

10.3.3	Transponierte Matrizen — Matrices transposées	264
10.3.4	Matrixpotenzen — Puissances de matrices	264
10.3.5	Diagonalisierung regulärer Matrizen — Diagonalisation de matrices régulières	264
10.3.6	Anwend. auf Matrixpotenz. — Applic. p.d. puissances de matr.	265
10.3.7	EW der Diagonalmatrix — EW de la matrice diagonale	266
10.3.8	Spur und Determinante — Trace et déterminant	267
10.4	Ähnliche Matrizen — Matrices semblables	269
10.4.1	Grundlagen — Fondements	269
10.4.2	Abbildungen im Eigenraum — Applications dans l'espace propre	271
10.5	Konstruktion einer Matrix — Construction d'une matrice	272
10.6	Diag. spez. Matrizen — Diag. de matr. spéc.	273
10.6.1	Definitionen — Définitions	273
10.6.2	Wichtige Eigenschaften — Qualités importantes	274
10.7	Ausbau und Ergänzungen — Complètement des notions	278
10.7.1	Rang und Defekt — Rang et défaut	278
10.7.2	Caley-Hamilton, Nilpotenz — Caley-Hamilton, nilpotence	278
10.7.3	Hauptvektoren, Spektrum — Vecteurs principaux, spectre	281
10.7.4	Beispiele — Exemples	285
10.7.5	Polynomnullstellen und EW — Zéros de polynômes et VP	286
10.8	Geometrische Anwendungen — Applications géométriques	287
10.8.1	Morphismen — Morphismes	287
10.8.2	Lineare Abbildung, Basisabbildung — Application linéaire, application de base	287
10.8.3	Affinitäten — Affinités	293
10.8.4	Isometrien — Isométries	297
10.8.5	Kollineationen — Collinéations	298
10.8.6	Kegelschnitte — Sections coniques	301
10.9	Anwendungen bei Rekursionen — Applications aux récursions	305
10.10	Anwendungen der Matrizenrechnung — Applications du calcul matriciel	307
10.10.1	Ausgleichsrechnung — Calcul d'ajustement de données	307
10.10.2	Überbestimmte Gleichungssysteme — Systèmes d'équations surdéterminés	308
11	Ausblick — Perspective	315
11.1	Quaternionen, Raumdrehungen — Quaterniones, révolutions dans l'espace	315
11.2	Algebraische Kurven — Courbes algébriques	317
11.2.1	In der Ebene — Dans le plan	317
11.2.2	Diskussion — Discussion	317
11.2.3	Beispiele — Exemples	318
11.2.4	Im Raum — Dans l'espace	319
11.3	Polyedersatz — Théorème des polyèdres	320
11.3.1	Begriffe — Notions	320
11.3.2	Der Satz — Le théorème	321
11.3.3	Platonische Körper — Corps platoniques	323
12	Anhang 1: Ellipsen, Kegelschnitte — Ellipses, sections coniques	327
12.1	Ellipsenbeziehungen und Flächensatz	327
12.1.1	Die Erde im Ekliptikalsystem	327
12.1.2	Beziehungen an der Ellipse	328
12.2	Zusammenfassung: Eigenschaften von Kegelschnitten	333
12.2.1	Allgemeine Bemerkung	333
12.2.2	Übersicht	333

13 Anhang 2: Gleichungstypen – Annexe 2: Types d'équations	337
13.1 Typen von Gleichheitszeichen und Gleichungen	337
13.2 Arten von Bestimmungsgleichungen	337
13.2.1 Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten	337
13.2.2 Gleichungen und Systeme von Gleichungen	337
13.2.3 Gleichungen mit Standardfunktionen von einer Unbekannten	338
13.2.4 Lineare Gleichungssysteme	338
14 Anhang 3: Kryptologie – Annexe 3: Cryptologie	339
14.1 Public key, RSA-Verfahren	339
14.2 Durchführung des RSA-Verfahrens — Exécution de la méthode RSA	339
14.2.1 Wahl der Primzahlen — Choisir les nombres premiers	340
14.2.2 Bestimmung der beiden Schlüssel — Calculer des deux clefs	340
14.2.3 Verschlüsselung (Codierung) — Chiffrement (codage)	341
14.2.4 Entschlüsselung (Decodierung) — Décodage (déchiffrement)	341
14.2.5 Das Sicherheitsproblem — Le problème de la sécurité	342
14.2.6 Hinweise — Indications	342
15 Anhang 4: Verschiedenes – Annexe 4: Diverses choses	343
15.1 Abkürzungen – Abréviations	343
15.2 Mathematica-Programme – Prog. pour Mathematica	344
16 Anhang „Bemerkungen“ — Annexe	345
16.1 Bemerkung zu Drehung und Gegendrehung	345
16.2 Winkelhalbierende im Dreieck — Bissectrice d. le triangle	346