

Vordiplom 2 1995
Klasse E2D – Abteilung Elektrotechnik
Mathematik

Zeit inkl. Pause:
14.00 – 17.00
(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT-Crash vom Herbst 1999

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.

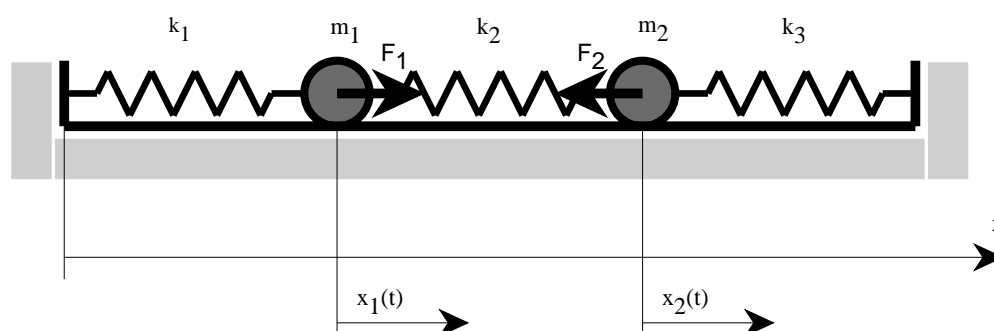
Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1995

Klasse E2D

Viel Glück !

Aufgabe 1

(12 Punkte)



Zwei Kugeln mit den Massen $m_1 = 4$ und $m_2 = 2$ sind an drei Federn mit den Federkonstanten $k_1 = k_2 = 2$ und $k_3 = 1$ gemäss der oben Abbildung gezeigten befestigt. Die Reibung der Kugeln auf der Unterlage soll nicht berücksichtigt werden. Dasselbe gilt für die physikalischen Einheiten.

$x_1(t)$ und $x_2(t)$ seien die Auslenkungen von m_1 bzw. m_2 aus ihrer Ruhelage. Bis zur Zeit $t = 0$ ist das System in Ruhe (d.h. $x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0$). Für $t > 0$ greift je eine konstante Kraft $\vec{F}_1 = 1$ an m_1 resp. $\vec{F}_2 = -1$ an m_2 in Richtung der x -Achse an.

- Stellen Sie die Differentialgleichungen auf für die Auslenkungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der beiden Kugeln.
- Bestimmen Sie die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Aufgabe 2

(15 Punkte)

Die Abbildung unten zeigt den Fahrleitungsdraht der SBB unter einer Betonbrücke. Zur Zeit $t_0 = 0$ ist die Spannung im Draht 15 000 V. 200 cm unter der Brücke hängt der Draht mit 1.5 cm Durchmesser. (Zur Vereinfachung: Kreisförmiger Querschnitt.)

Um den *Potentialverlauf* unter der Brücke zur Zeit t_0 näherungsweise berechnen zu können nehmen wir an, der Boden sei unendlich weit weg, die Brücke sei unten eben und ihre Länge sowie ihre Breite seien unendlich gross.

Zur Lösung des Problems bilden wir die geometrische Situation in \mathbf{C} durch eine *Möbiustransformation* derart ab, dass der Kreis (Draht) und die Gerade (Brücke) in zwei zentrische Kreise übergehen. Das Bild von $z_0 = 0$ ist $w_0 = i$. Die Einheiten dürfen nun weggelassen werden.

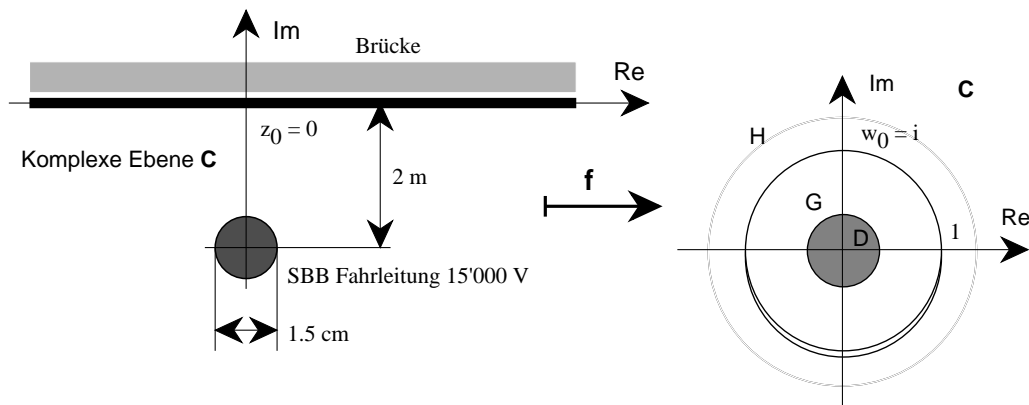
- (a) Bekanntlich liefert die Möbiustransformation

$$f(z) = c \frac{z + ib}{z - ib}$$

die gewünschte Abbildung ($b \in \mathbf{R}$). Der Drahtquerschnitt geht dabei in D über, das restliche Gebiet unter der Brücke in G , das Gebiet oberhalb in H , vgl. Abbildung. Berechnen Sie b und c .

Hinweis: Im Bildbereich bilden die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ ein symmetrisches Punktepaar bezüglich der beiden zentrischen Kreise. Man suche die Urbildpunkte.

- (b) Die Umgebung des Drahtes ist quellenfrei, d.h. $\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\varphi)) = \Delta\varphi = 0$. Schreiben Sie im Bildgebiet (aufgefasst als reelle Ebene \mathbf{R}^2) die Potentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ in Polarkoordinaten (r, α) . Berechnen Sie φ in Abhängigkeit vom Radius $r = |f(z)|$.



Aufgabe 3**(12 Punkte)**

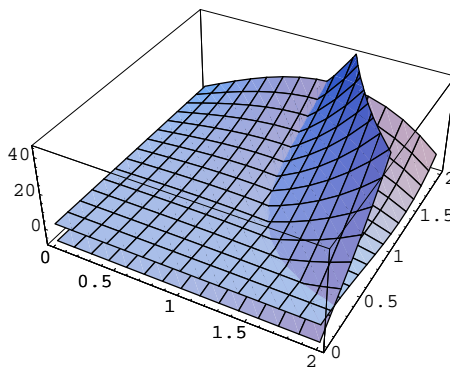
Die Schnittkurve γ der beiden Flächen

$$z = f(x, y) = 2x^2y^3 + 6x^3y - 8$$

$$z = g(x, y) = 4xy^3 - 2x^3y^2 + 2$$

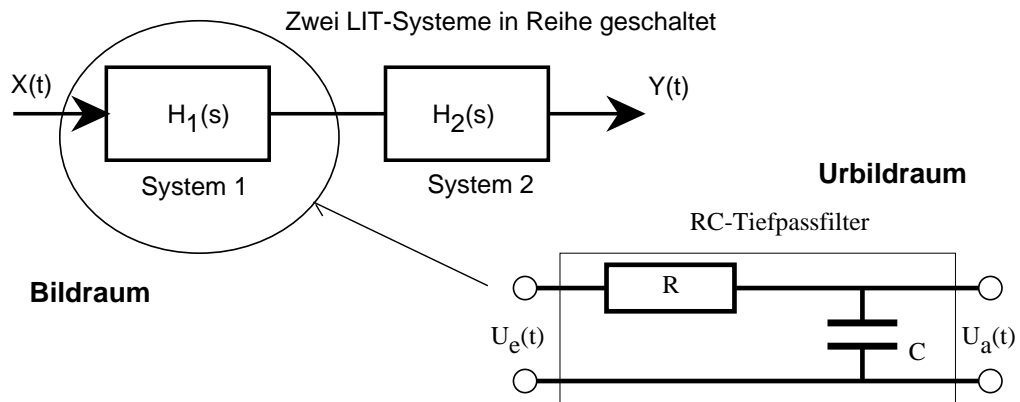
durchstösst die xy -Ebene in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0) = (1, 1)$. (Vgl. dazu Abb. unten.) Zur Verbesserung dieses Wertes bestimme man

- die Tangentialebenen von $z = f(x, y)$ sowie von $z = g(x, y)$ in (x_0, y_0) ;
- den Schnittpunkt (x_1, y_1) der Schnittgeraden der beiden Ebenen mit der Ebene $z = 0$ sowie die Werte $f(x_1, y_1)$ und $g(x_1, y_1)$.
Vergleichen Sie die Differenz $g(x_1, y_1) - f(x_1, y_1)$ mit der Differenz $g(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$ in Dezimalbruchform.



Aufgabe 4

(12 Punkte)



Ein RC-Tiefpassfilter (vgl. Abbildung oben) wird bekanntlich durch die folgende Gleichung beschrieben:

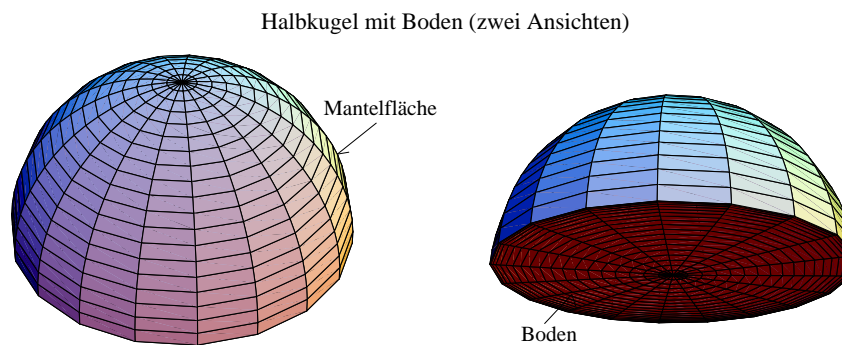
$$RC \dot{U}_a + U_a = U_e.$$

Dabei ist $R = 100 \text{ k}\Omega$ und $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$. U_e ist die Eingangsspannung, U_a die Ausgangsspannung des Filters.

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion (Bildraum) sowie die Impulsantwort (Urbildraum) dieses Filters. (Man beziehe sich auf die Einheiten Ω , F und V . In den Rechnung können die Einheiten dann weggelassen werden.)
- Zwei solche identische Filter werden in Serie geschaltet. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems und zeigen Sie damit, dass das System stabil sein muss.
- Sei $U_e(t) = 10(1 - \cos(t)) \text{ V}$. Zur Zeit $t = 0$ ist das System in Ruhe. Berechnen Sie und skizzieren Sie die Ausgangsspannung $U_{GS}(t)$ des Gesamtsystems (Serie).

Aufgabe 5

(12 Punkte)

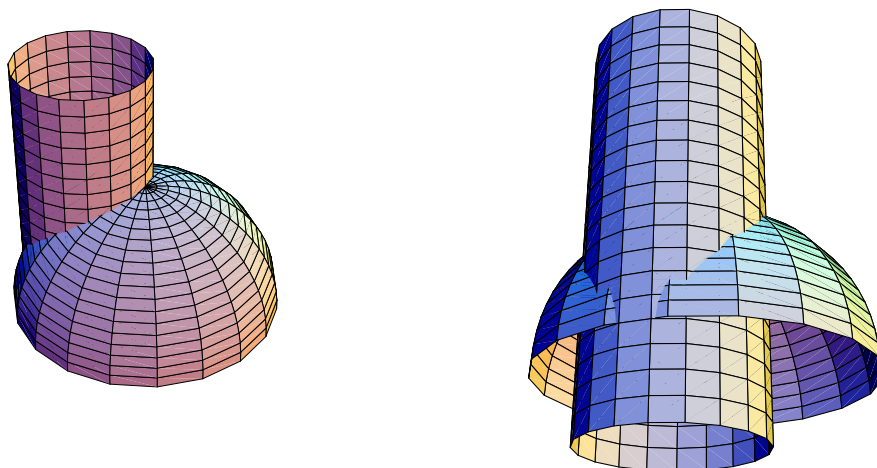


Die Abbildung oben zeigt eine Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, ($z \geq 0$) mit Boden.

- (a) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$ durch die gesamte Oberfläche sowie durch die Mantelfläche.
- (b) Berechnen Sie den Fluss der Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -y^3 \\ yz^2 \\ y^2z \end{pmatrix}$ durch die Mantelfläche sowie durch die Bodenfläche.

Aufgabe 6

(15 Punkte)



Die Halbkugel $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$, ($z \geq 0$, vgl. Abbildung oben) wird vom Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ ($z \in \mathbf{R}$) geschnitten. Wir setzen $x = x(t) = \cos(t)$.

- (a) Zeigen Sie, dass durch die Parameterdarstellung $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}$ die Schnittkurve beschrieben wird und berechnen Sie die Krümmung κ dieser Kurve für $t = \pi$.
- (b) Bestimmen Sie für $t = \pi$ den Tangenteneinheitsvektor \vec{T} und den Hauptnormaleneinheitsvektor \vec{N} . Berechnen Sie damit den Mittelpunkt des Krümmungskreises für $t = \pi$.

— ENDE —