

Vordiplom 1, Analysis 1997
Klasse E1B – Abteilung Elektrotechnik
Mathematik

Zeit inkl. Pause:
08.00 – 11.00

(180 Minuten) Restaurierte Version nach dem NeXT-Crash vom Herbst 1999

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: 6 Probleme auszuwählen und lösen.

Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1997, Teil Analysis**Klasse E1B***Viel Glück !***Aufgabe 1****(12 Punkte)**

Ein Volumen ist begrenzt durch vier Flächen, die durch folgende Gleichung definiert sind:

$$x = 2z^2 \quad (1)$$

$$x = 4 - z^2 \quad (2)$$

$$y = 0 \quad (3)$$

$$x + y = 12 \quad (4)$$

Berechnen Sie den Volumeninhalt dieses Körpers. (Skizze!)

Aufgabe 2**(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = x^{\frac{1}{x}} - y^2$. Durch diese Funktion wird im \mathbb{R}^3 eine Fläche definiert.

- Berechnen Sie die Koordinaten des vermuteten Punktes in der (x, y) -Ebene, in dem der Funktionswert global gesehen maximal wird.
- Durch die Gleichung $f(x, y) = x^{\frac{1}{x}} - y^2 = 0$ wird in der (x, y) -Ebene eine Kurve k definiert. Berechnen Sie die Koordinaten derjenigen eventuellen Punkte, in denen k die Gerade $y = x$ schneidet.
- Bestimmen Sie allenfalls approximativ Punkte auf k , in denen die Krümmung 0 ist.

Aufgabe 3**(12 Punkte)**

Gegeben seien Polynome $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} - 1 + \dots + a_1 x + a_0$, für welche gilt:

$$p(2x) = p(x)' \cdot p(x)''.$$

- Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k dieser Polynome.
- Aus einem solchen Polynom $p(x)$ wird ein neues Polynom $q(x)$ durch Veränderung des Koeffizienten a_{n-1} gewonnen, sodass die Summe der Nullstellen von $q(x)$ gleich 1 wird. Um welchen Wert ändert sich bei dieser Operation allenfalls der Inhalt der Fläche unter der Kurve zwischen 0 und 1?

Aufgabe 4**(12 Punkte)**

Mit welcher Genauigkeit kann die Brennweite f einer Linse bestimmt werden, wenn ein Objekt, das sich in einer Distanz $g = 37.0 \pm 0.1 \text{ cm}$ vor der Linse befindet, ein scharfes Bild erzeugt, das sich im Abstand $b = 56.4 \pm 0.4 \text{ cm}$ hinter der Linse befindet?

Hinweis: Die Linsengleichung lautet $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$.

Aufgabe 5**(12 Punkte)**

In welchem Punkt P der Ebene Φ , die durch $2x + 3y + 4z = 12$ gegeben ist, wird die Funktion $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ minimal? Berechnen Sie diesen Punkt.

Aufgabe 6**(12 Punkte)**

Die Funktion $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ wird über dem Definitionsbereich D betrachtet, $D = \{(x, y) \mid f(x, y) \geq 0\}$.

- (a) Berechnen Sie den Inhalt der von $f(x, y)$ erzeugten Fläche über D_f . (Allenfalls genügt das exakte Resultat für diesen Oberflächeninhalt.)

- (b) Die durch $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) \\ f(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$ gegebene Kurve verläuft auf der durch f erzeugten Fläche.

Berechnen Sie die Krümmung dieser Kurve in dem Punkt, der am höchsten liegt.

Aufgabe 7**(12 Punkte)**

Das Integral $f(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1+t^3} dt$ kann für $|t| < 1$ als Potenzreihe in x gewonnen werden, indem man die Binomialreihenentwicklung des Integranden benutzt.

- (a) Berechnen Sie damit die Potenzreihe von $\frac{f(x)}{x}$. Berechnen sie weiter den Wert von $\frac{f(x)}{x}$ an der Stelle $x = 0.1$ auf 4 Stellen genau.

- (b) Berechnen Sie damit ebenso $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^4}$.

— ENDE —