

Vordiplom 2, Mathematik 1998  
Klassen E2B – Abteilung Elektrotechnik  
Mathematik

Zeit inkl. Pause:  
14.00 – 17.00  
(180 Minuten)

Restaurierte Version nach dem NeXT-Crash vom Herbst 1999

**Bedingungen:**

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn mehr als 6 Aufgaben gegeben sind: 6 Aufgaben auszuwählen und zu lösen.

**Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1998****Klasse E2B***Viel Glück !***Aufgabe 1****(12 Punkte)**

Gegeben sind die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u'(x) - \tan(x) \cdot u(x) &= -\sin(x) \\ x \cdot v'(x) &= v(x) + 4x \end{aligned}$$

- Suchen Sie diejenige spezielle Lösung  $u_0(x)$  der ersten Gleichung, die durch den Ursprung geht.
- Berechnen Sie diejenige spezielle Lösung  $v_0(x)$  der zweiten Gleichung, die die Bedingung  $v_0(\pi) = u_0(\pi)$  erfüllt.
- Berechnen Sie den Grenzwert der Steigung  $\lim_{x \rightarrow \infty} v_0'(x)$  sowie das Minimum resp. das Infimum der Steigung.

**Aufgabe 2****(12 Punkte)**

Ein harmonischer Oszillator (z.B. eine Masse an einer Feder) wird durch die Gleichung

$$m y''(t) + \mu y'(t) + k y(t) = F(t)$$

beschrieben.  $F(t)$  ist die äussere Anregung,  $\mu$  die Dämpfung. Um das Problem der Resonanz zu studieren, setzen wir  $m = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $k = 1$  und für die äussere Anregung  $F(t) = \sin(\omega_0 t)$ . Für  $t = 0$  befinde sich das System im Ruhezustand.

- Bestimmen Sie für den beschriebenen Fall mit Hilfe der Laplace-Transformationen die Lösung in Abhängigkeit vom Parameter  $\omega_0$ .
- Bestimmen Sie bei der gefundenen Lösung die Grösse  $\omega_0$  für den Resonanzfall.
- Bestimmen Sie die Stossantwort zur Zeit  $t = 0$  bei einer Dämpfung  $\mu = 1$ . ( $m = 1$ ,  $k = 1$  wie vorher.)

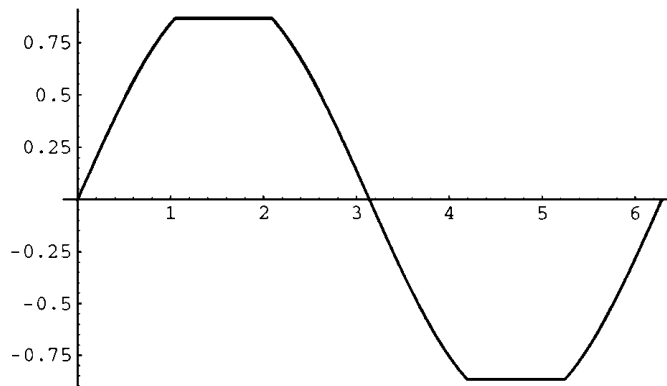
**Aufgabe 3****(12 Punkte)**

In einem diskreten Zeitsystem soll die Impulsantwort  $\{y_k\} = \{(-1)^k - 2^k\}$  ( $k \geq 0$ ) sein.

- Bestimmen Sie die die Transferfunktion  $G(z)$ .
- Entwerfen Sie zu  $G(z)$  ein Blockdiagramm.
- Bestimmen Sie die zugehörige Differenzgleichung.
- Bestimmen Sie zu  $G(z)$  die Schrittantwort.

**Aufgabe 4****(12 Punkte)**

Die in der Figur über eine Periode gezeigte Funktion  $nbsin(t)$  heisst unter „*neuer Bieler Sinus*“. In den Intervallen  $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$  und  $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$  ist sie oben resp. unten horizontal abgeschnitten. Der neue Bieler Sinus lässt sich zusammensetzen aus der Funktion  $\sin(t)$  sowie einer  $2\pi$ -periodischen Hilfsfunktion  $h(t)$ , die 0 ist, ausser auf den folgenden Intervallen: Auf  $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$  ist sie gleich  $(\sin(t) - \sin(\frac{\pi}{3}))$  und auf dem Intervall  $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$  ist sie gleich  $(\sin(t) + \sin(\frac{\pi}{3}))$ .



- Skizzieren Sie  $h(t)$ .
- Entwickeln Sie  $h(t)$  in eine Fourierreihe, indem Sie die Fourierkoeffizienten  $a_0/2$ ,  $a_n$  und  $b_n$  bestimmen. (Falls die Koeffizienten nicht ständig gleich 0 sind, genügen die ersten vier, d.h.  $n = 4$ . Das gibt die Reihe  $h_4(t)$ .)
- Berechnen Sie numerisch die Abweichung  $|h_4(t) - h(t)|$  an der Übergangsstelle  $t = \frac{\pi}{3}$ .
- Geben Sie in einer Gleichung die Beziehung zwischen  $nbsin(t)$ ,  $\sin(t)$  und  $h(t)$ .
- Berechnen Sie aus dieser Gleichung die Fourierkoeffizienten von  $nbsin(t)$  bis zu  $n = 4$ .

## Aufgabe 5

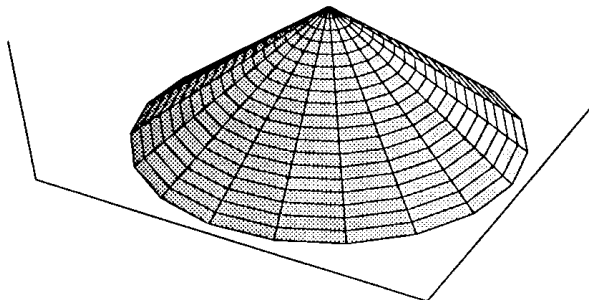
(12 Punkte)

- (a) Sei  $\vec{u} = f(x, y, z) \cdot \vec{c}$ . ( $\vec{c}$  ist ein beliebiger, geeignet gewählter konstanter Vektor,  $f$  eine skalare Funktion.) Leiten Sie damit mit Hilfe des Divergenzsatzes folgende Gleichung her:

$$\iint_S f \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q (\nabla f) \, dV$$

(Der Nachweis für eine Komponente genügt.)

- (b)



In einem See wird eine kegelförmige Tauchkapsel mit dem Grundkreisradius  $R$  und der Höhe  $H$  so versenkt, dass die Rotationsachse senkrecht steht. Die Tiefe des Kapselbodens ab Wasseroberfläche sei  $z_0$ . Da der Druck  $p$  in der Tiefe  $z$  unter der Wasseroberfläche dem Gewicht der Wassersäule über der Einheitsfläche entspricht, gilt für  $p$  die Formel:  $p = k \cdot z$  ( $k = \text{const.}$ ). Die auf ein Flächenelement  $d\vec{S}$  wirkende Kraft berechnet sich bekanntlich nach der Formel  $d\vec{F} = -p \cdot d\vec{S} = -p \cdot \vec{n} \cdot dS$ . Damit kann die gesamte auf die Kapsel wirkende Auftriebskraft  $-\iint_S p \cdot \vec{n} \, dS$  nach der im ersten Teil der Aufgabe hergeleiteten Gleichung berechnet werden. In einem geeignet gewählten Masssystem ist  $R = 1$ ,  $H = 3$ . Berechnen Sie damit  $\vec{F}$  als Funktion von  $z_0$ . (Lassen Sie die Normierungskonstante  $k$  als Parameter stehen.) Spielt bei dieser Rechnung die Körperform eine Rolle? (Vergleichen Sie das Resultat mit dem *Gesetz von Archimedes!*)

## Aufgabe 6

(12 Punkte)

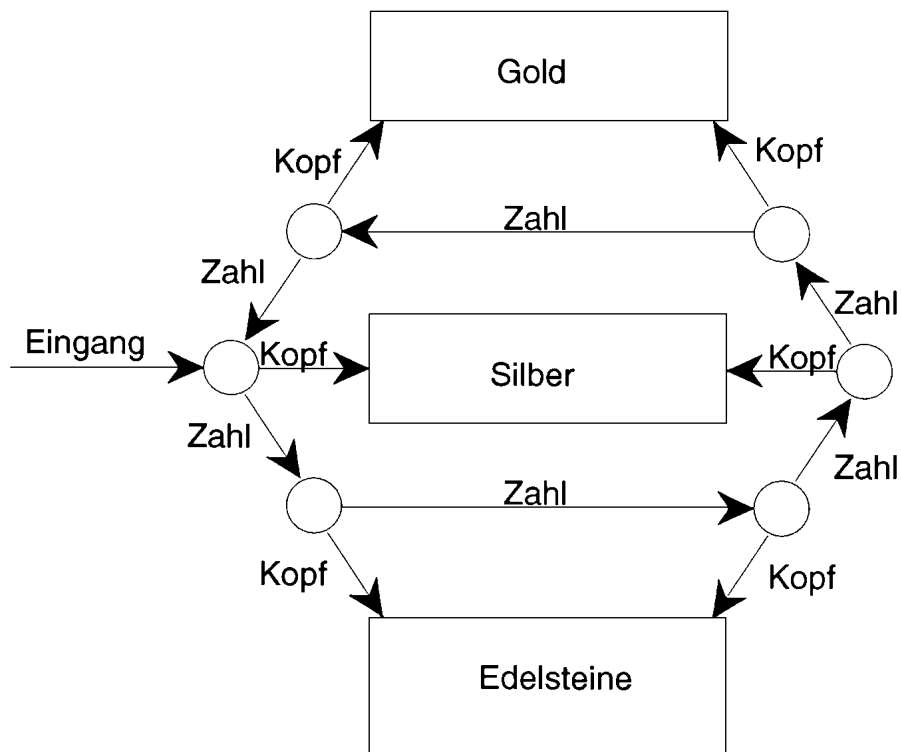
Untersuchen Sie das folgende Differentialgleichungssystem als System mit Eingang  $f(t)$  und Ausgang  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} - x - 5y &= f(x) \\ \dot{y} + x + ky &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die die Transferfunktion  $G(s)$ .  
 (b) Untersuchen Sie, in welchem Bereich für  $k$  das System stabil ist.

## Aufgabe 7

(12 Punkte)



Sie betreten einen Labyrinth bei „Eingang“ (vgl. Skizze). Sie dürfen sich nur in Pfeilrichtung bewegen. Bei jeder Verzweigung entscheiden Sie mit einem Münzwurf (ideale Münze), welchen Gang Sie betreten. Das geht solange, bis Sie entweder bei den Edelsteinen, beim Silber oder beim Gold angelangt sind. Beachten Sie, dass Sie dazu vielleicht mehrere Durchgänge benötigen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen Sie

- (a) zu den Edelsteinen?
- (b) zum Silber?
- (c) zum Gold?

(Die Idee zu dieser Aufgabe ist einer Mittellehrerprüfung der Universität Basel entnommen.)

— ENDE —