

Vordiplom 1, Algebra, 2000  
Klasse E1B  
Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR2000/15/302/Di 19.9.00/0800

**Bedingungen:**

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

**Vordiplomprüfung 1 in Algebra 2000****Klasse E1b***Viel Glück !***Aufgabe 1****(12 Punkte)**

Gegeben ist die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$  und der Vektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $r, s$  sind Parameter.

- Berechne das charakteristische Polynom mit der Variablen  $\lambda$ .
- Bestimme die Eigenwerte exakt. (Der Rechnungsweg muss begründet werden.)
- Bestimme die Eigenvektoren exakt. (Der Rechnungsweg muss sichtbar sein.)
- Diagonalisiere die Matrix  $A$ .
- Sei  $A^2 := A \cdot A$ ,  $A^n = A^{n-1} \cdot A$   
 Untersuche, was mit  $A^n \cdot \vec{x}$  passiert, wenn  $n$  immer grösser wird. und berechne  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \cdot \vec{x}$  exakt.

**Aufgabe 2****(12 Punkte)**

Zu einer linearen Abbildung  $\mathcal{B}$  gehört eine Matrix  $B$ . Diese bildet die drei Seitenvektoren eines Spats wie folgt ab:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Entscheide, ob die Vektoren  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$  linear unabhängig sind. (Der Entscheid ist zu begründen.)
- Berechne die Matrix  $B$ . (Der Weg ist zu begründen.)
- Bestimme die Eigenwerte von  $B$  exakt. (Das Resultat ist zu begründen.)
- Bestimme allgemein das Bild der Ebene  $\Phi(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 \cdot 2 \vec{x}_1 + \mu_2 \cdot 6 \vec{x}_2 + 4 \vec{x}_3$ . (Das Resultat ist zu begründen.)
- Berechne  $B^T$  und bilde damit die Gerade  $g : \vec{x}(\lambda) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ab.

Skizziere und interpretiere das Resultat.

**Aufgabe 3****(12 Punkte)**

Gegeben ist das Dreieck  $ABC$   $[(0/0), (12/0), (0/9)]$ .

- (a) Mache eine Skizze und berechne die Radien des Inkreises sowie der drei Ankreise.  
*Hinweis: Die Formeln für die Kreisradien können nachgeschlagen werden.*

Zeige (oder widerlege) für dieses Dreieck die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

- (b) Die drei Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit den Berührungspunkten des Inkreises auf den Gegenseiten schneiden einander in einem Punkt  $G$  (*Gergonnescher Punkt*).
- (c) Berechne  $G$ , falls die Aussage richtig ist.
- (d) Die drei Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit den Berührungspunkten der Ankreise auf den Gegenseiten schneiden einander in einem Punkt  $N$  (*Nagelscher Punkt*).
- (e) Berechne  $N$ , falls die Aussage richtig ist.
- (f) Untersuche gegebenenfalls, ob alle der Punkte {Inkreismittelpunkt, Schwerpunkt, Geronnischer Punkt, Nagelscher Punkt} auf einer Geraden liegen — oder ob allenfalls drei dieser Punkte diese Eigenschaft zeigen.

**Aufgabe 4****(12 Punkte)**

Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilaufgaben.

- (a) Gegeben ist die komplexe Zahl  $z = r \cdot e^{i \frac{\pi}{6}}$ . Untersuche ob es möglich ist  $r$  so zu wählen, dass die Punkte  $0$ ,  $z$  und  $z^{-1}$  in der komplexen Ebene ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Berechne und skizziere allenfalls existierende Lösungen.
- (b) In  $\mathbb{C}$  ist die folgende Gleichung gegeben:

$$10z^4 - 39z^3 + az^2 + bz - 15 = 0$$

Von den Lösungen  $z_1, z_2, z_3$  und  $z_4$  kennt man die Beziehungen:

$$z_3 + z_4 = 4 \text{ und } z_1 \cdot z_2 = -\frac{3}{10}.$$

Bestimme  $a$  und  $b$  sowie die Lösungen.

**Aufgabe 5****(12 Punkte)**

Durch die folgenden vier Ebenen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  und  $\Phi_4$  wird ein Tetraeder bestimmt:

$$\Phi_1: \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x} \right\rangle = -23, \quad \Phi_2: \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{x} \right\rangle = 68,$$

$$\Phi_3: \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x} \right\rangle = -28, \quad \Phi_4: \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} \right\rangle = 6$$

- Berechne die Koordinaten der vier Eckpunkte. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)
- Das Tetraeder wird um  $+\frac{\pi}{3}$  um die  $z$ -Achse gedreht. Berechne die Koordinaten der vier neuen Eckpunkte.
- Berechne den Volumeninhalt der grössten Kugel, die dem Tetraeder eingeschrieben werden kann. (Idee und Lösungsweg müssen sichtbar sein.)
- Berechne das Verhältnis der Volumina des Tetraeders und der Kugel.

**Aufgabe 6****(12 Punkte)**

Gegeben ist die Matrixgleichung  $M \cdot X \cdot X^T \cdot M^{-1} - E^k = N$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . ( $N$  ist die Nullmatrix,  $E$  die Einheitsmatrix.)  $M$  ist eine beliebige reguläre Matrix. Von der regulären Matrix  $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$  wissen wir, dass  $x_3 = \frac{1}{4}$  gilt.

- Berechne die Matrix  $X$ . (Wenn es mehrere Lösungen gibt, sind alle Lösungen zu bestimmen.)
- Verwende diejenige Lösung, bei der die negativen Matrixelemente am Schluss kommen. Berechne damit das Bild des Kreises  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  in Vektorform. (Schreibe dazu den Kreis in Vektorform mit einer Variablen  $t$ .)
- Begründe, ob es sich beim gefundenen Bild um eine Ellipse handelt oder nicht.
- Skizziere die Kurve.

— ENDE —  $\diamond$  — FIN —