

Vordiplom 2, 2001
Klasse B2
Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR2001/21/RIIc/Mo 10.9.00/1400

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2001

Klasse B2

Viel Glück !

Aufgabe 1

(12 Punkte)

Gegeben ist ein Tetraeder $T(ABCD)$ mit den Eckpunkten A, B, C, D .

$A = A(1, 1, 1)$, $B = B(-1, 2, 3)$, $C = C(5, 4, 7)$, $D = D(3, 8, 11)$. V ist das Volumen.

Mit $M(AB)$ bezeichnen wir den Mittelpunkt der Seite \overline{AB} , mit $M(AC)$ den Mittelpunkt

der Seite \overline{AC} u.s.w.. Der Punkt X berechnet sich durch $\vec{OX} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$.

Jeweils 3 Seitenmittelpunkte bilden mit X zusammen wieder ein Tetraeder, was auf 4 Arten möglich ist:

$T_1(X, M(AB), M(AD), M(BD))$, $T_2(X, M(AC), M(AD), M(CD))$,

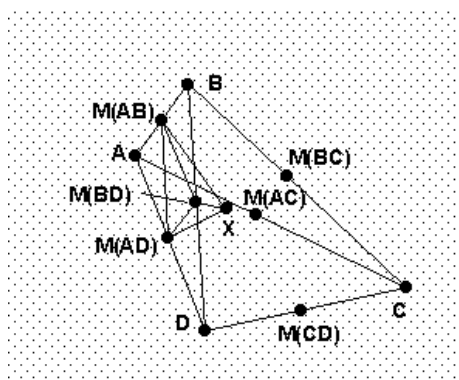
$T_3(X, M(AB), M(AC), M(BC))$, $T_4(X, M(BC), M(BD), M(CD))$.

Weiter bilden jeweils 3 Seitenmittelpunkte mit der gemeinsamen Ecke zusammen wieder ein Tetraeder, was auch auf 4 Arten möglich ist:

$E_1(A, M(AB), M(AC), M(AD))$, $E_2(B, M(AB), M(BC), M(BD))$,

$E_3(C, M(AC), M(BC), M(CD))$, $E_4(D, M(AD), M(BD), M(CD))$.

- (a) Berechnen Sie das Volumen V_1 , das noch bleibt, wenn vom Tetraeder T die kleineren Tetraeder T_1, T_2, T_3, T_4 ausgeschnitten werden. $\leadsto V : V_1 = ?$
- (b) Berechnen Sie das Volumen V_2 , das noch bleibt, wenn vom Tetraeder T die andern kleineren Tetraeder E_1, E_2, E_3, E_4 ausgeschnitten werden. $\leadsto V : V_2 = ?$



Die Skizze nebenan zeigt T mit T_1 .

Aufgabe 2

(12 Punkte)

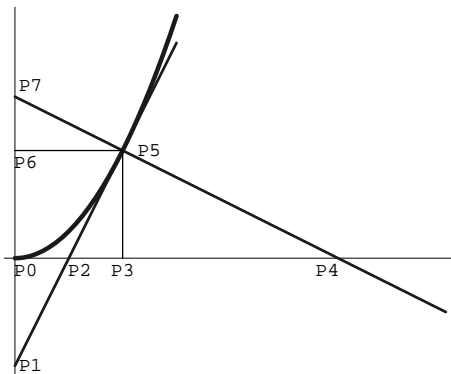
Die Skizze zeigt eine Funktion $f(x) = ax^3$, $x \geq 0$. In $P_5(x_0, y = ax_0^3)$ sind die Tangente und die Normale gegeben. Die damit entstehenden Punkte $P_0 \dots P_7$ definieren Dreiecksflächen resp. Flächen, deren eine Begrenzungslinie der „Parabelbogen“ ist.

Die Flächen werden wie folgt benannt (mache eine Skizze!):

$$(P_0P_5P_6P_0) \rightsquigarrow A_1, \quad (P_0P_3P_5P_0) \rightsquigarrow A_2, \quad (P_0P_1P_2P_0) \rightsquigarrow A_3,$$

$$(P_2P_3P_5P_2) \rightsquigarrow A_4, \quad (P_6P_5P_7P_6) \rightsquigarrow A_5, \quad (P_3P_4P_5P_3) \rightsquigarrow A_6.$$

Berechne die folgenden Verhältnisse der Flächeninhalte. Untersuche, wie n gewählt werden muss, damit das jeweilige Verhältnis unabhängig ist von x_0 . Untersuche auch den Einfluss von a .



(a) $A_1 : A_2$

(b) $A_4 : A_2$

(c) $A_4 : A_3$

(d) $A_4 : A_5$

(e) $A_4 : A_6$

(f) $(A_4 \cdot A_4) : (A_5 \cdot A_6)$

Aufgabe 3

(12 Punkte)

- (a) Ein runder Kuchen mit dem Inhalt $A = 2$ wird halbiert. Eines der dabei entstehenden Stücke mit den Inhalten A_0 wird wieder halbiert. Dadurch entstehen wieder zwei neue, kleinere Stücke mit den Inhalten A_1 . Davon wird wieder eines halbiert. Dadurch entstehen auch wieder zwei neue, kleinere Stücke mit den Inhalten A_2 . Davon wird wieder eines halbiert, u.s.w., bis schliesslich theoretisch unendlich viele Stücke vorhanden sind.

Schreiben Sie die so entstehende Reihe $A = A_0 + A_1 + A_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$ korrekt mit Zahlen auf. Um welchen Reihentyp handelt es sich?

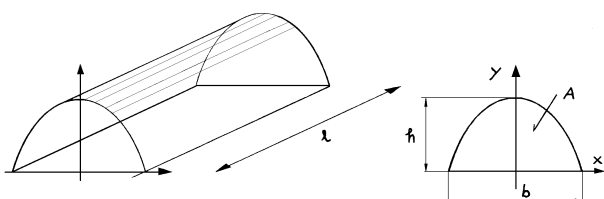
- (b) In einem Diagramm wird über dem Intervall $(0, 1]$ die konstante Funktion A_0 aufgetragen, dann über $(1, 2]$ die konstante Funktion A_1 aufgetragen, über $(2, 3]$ die konstante Funktion A_2 u.s.w.. So entsteht eine Treppenfunktion oder ein Balkendiagramm, je nachdem wie man das sieht. Zeichnen Sie das Diagramm und berechnen Sie den Inhalt unter der Kurve, d.h. der Inhalt aller Balken.
- (c) Im gemachten Diagramm über $(0, \infty)$ ist noch die Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ einzuzeichnen. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Balken und der Kurve von f .
- (d) Ein runder Kuchen mit dem Inhalt $A = 3$ wird nun getrittelt. Eines der dabei entstehenden Stücke mit den Inhalten B_0 wird gegessen, ein zweites wird wieder getrittelt.

Dadurch entstehen wieder drei neue, kleinere Stücke mit den Inhalten B_1 . Davon wird wieder eines gegessen und ein zweites wird wieder getrittelt. Dadurch entstehen wieder drei neue, kleinere Stücke mit den Inhalten B_2 . Davon wird wieder eines gegessen und ein zweites wird wieder getrittelt. u.s.w., bis schliesslich theoretisch unendlich viele Stücke vorhanden sind, obwohl auch unendlich viele gegessen worden sind.

Schreiben Sie die so entstehende Reihe $B_0 + B_1 + B_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} B_k$ der nicht gegessenen Stücke korrekt mit Zahlen auf und berechnen Sie exakt die Summe.

Aufgabe 4

(12 Punkte)



Die Funktion $f(x) = ax^4 + h$ mit $f(0) = h$ und $f(-\frac{b}{2}) = f(\frac{b}{2}) = 0$ beschreibt den Querschnitt eines Tunnels nach nebenstehender Skizze.

Es ist $h = 3.5 \text{ m}$, $b = 6.5 \text{ m}$ und $l = 20 \text{ km}$.

- Berechnen Sie $f(x)$. Erstellen Sie eine genaue Skizze des Tunnelprofils.
- Berechnen Sie das auszubrechende Volumen beim Tunnelbau.
- Wie ist bei gleichem a die Höhe h zu ändern, damit sich das auszubrechende Volumen verdoppelt? (Achtung: Mit h ändert auch b !)

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Wir kennen die Ableitung $f'(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$ einer unbekannt Funktion $f(x)$, von der wir jedoch wissen, dass $f(0) = 5$ ist.

- Berechnen Sie $f(x)$. Skizzieren Sie $f(x)$ über $I = [-5, 5]$.
- Berechnen Sie die Extremwertstellen von $f(x)$, an denen die Tangente horizontal ist.
- Berechnen Sie die Nullstellen von $f(x)$.
- Berechnen Sie $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

Aufgabe 6

(12 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.

- Integrieren Sie von Hand: $\int_1^{\pi} x \cdot \cos(x) dx = ?$
- Für welche Werte von $x \in [0, \pi]$ hat die Kurve von $x \cdot \cos(x)$ die Steigung 1?

(c) Differenzieren Sie von Hand: $\frac{d}{dx}(x \cdot e^x - e^{x^2}) = ?$ $x = 0 \Rightarrow \alpha = ?$

(d) Suchen Sie von Hand eine Stammfunktion zu: $f(x) = x \cdot \sin(x^2) - \cos(2x) + \frac{2}{3x}$

Aufgabe 7**(12 Punkte)**

Der Graph der Funktion $f(x) = e^{-x}$ wird um die x -Achse rotiert. Dabei entsteht ein Rotationskörper, der als Säule gedacht ist.

- (a) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = 1$
- (b) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = \infty$
- (c) Wie gross muss x_0 sein, damit das Volumen des Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = x_0$ gleich $\frac{\pi}{4}$ ist?

— ENDE —