

Modulprüfung  
2007  
Klasse B 06 / B1  
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2007/ 20 /Burgdorf/ V223  
Di 31.8.07/ Zeitfenster 13:30–16:00

**Bedingungen:**

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Punkten möglich.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als die bezeichnete Anzahl  $n$  Aufgaben gegeben sind, können  $n$  Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

## Modulprüfung in Mathematik 2007

## Klasse B 06 / B1

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden Aufgaben:**

### Aufgabe 1

**(15 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben werden unabhängig voneinander gleich bewertet:

- (a) Differenziere von Hand und ermittle das Polynom und die Zahl:

$$S(x)' = \left( \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k} x^k \right)' = \text{„Polynom“} = \left. \vphantom{\sum} \right|_{x=1} \text{„Zahl“} = ?$$

- (b) Untersuche von Hand, ob die folgende Identität gültig ist:

$$\left( \left( \cos \left( \frac{x}{2} \right) + \sin \left( \frac{x}{2} \right) \right)^2 \right)'_x = \frac{d}{dx} \left( \cos \left( \frac{x}{2} \right) + \sin \left( \frac{x}{2} \right) \right)^2 \equiv \cos(x)$$

- (c) Zeige von Hand mittels partieller Integration:

$$\int (-k + x + 1) e^x dx = e^x(x - k) + C$$

- (d)

$$u(x, k) := \frac{\partial (\ln(x\sqrt{x}) - \ln(x\sqrt{x-k}))}{\partial x}$$

- i. Berechne  $u(x, k)$  von Hand,  $x \in D_{u,k}$ .

- ii. Berechne anschliessend daraus  $\lim_{x \rightarrow k} u^{-1}(x, k)$  sowie

- iii.  $\lim_{x \rightarrow k^2} u^{-1}(x, k)$ .

- (e) Sei  $e\text{Sin}(x) := e^x \sin(x)$  und  $e\text{Cos}(x) := e^x \cos(x)$ .

Untersuche von Hand, ob die folgenden Formeln richtig sind:

$$\int \int e\text{Sin}(x) dx dx = -\frac{1}{2}e\text{Cos}(x) + C_1 x + C_2, \quad \int \int e\text{Cos}(x) dx dx = \frac{1}{2}e\text{Sin}(x) + C_1 x + C_2$$

**Aufgabe 2****(15 Punkte)**

Durch die Punkte  $A(2; 0)$ ,  $B(7; 1)$  und  $C(5; 4)$  wird ein Dreieck  $D_1 = \triangle(A, B, C)$  sowie eine Gerade  $g = \overline{AB}$  bestimmt.

- Berechne den Schwerpunkt  $S$  von  $D$  und damit den Abstand der Schwerlinie durch  $S$  und  $B$  vom Ursprung.
- Berechne mit Hilfe des Flächenprodukts oder des Vektorprodukts den Flächeninhalt  $F$  von  $D$ .
- Das Dreieck  $D$  wird um den Ursprung um  $\alpha = 30^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn gedreht. Bestimme die Drehmatrix und berechne damit die neue Lage des Schwerpunkts  $S_1$ .
- Das Dreieck  $D$  wird an der Geraden  $g$  gespiegelt. Dadurch erhält man das gespiegelte Dreieck  $D_2 = \triangle(A_2, B_2, C_2)$ . Berechne die Lage der gespiegelten Punkte  $S_2$  sowie  $C_2$ .
- Das Dreieck  $D_2$  wird in Richtung der  $x$ -Achse um den Faktor 2 gestreckt. Die  $y$ -Koordinaten bleiben dabei unangetastet. Der dadurch erhaltene Schwerpunkt  $S_3$  des gestreckten Dreiecks  $D_3$  wird an  $g$  zurückgespiegelt. Berechne die Koordinaten des so erhaltenen Punktes  $S_4$ .

**Aufgabe 3****(15 Punkte)**

Ein Architekt plant ein Gebäude mit rechteckigem Grundriss und einem Zeltdach oder Turmdach (Pyramidendach). Die Dachecken sollen dabei exakt auf die Aussenfläche einer imaginativen Halbkugel zu liegen kommen, bei der der Kugelmittelpunkt mit der Mitte des Gebäudegrundrisses zusammenfällt. Der Kugelradius beträgt 4 *nee* (narchibirische Erz-Ellen; die Einheiten können bei den Rechnungen weggelassen werden).

Wir bezeichnen die Gebäudelänge mit  $a$ , die Breite mit  $b$  und die Höhe bis zur Dachtraufe (Regenrinne) mit  $h$ . Infolge des Konzepts fällt die Spitze des Pyramidendachs mit dem höchsten Punkt der Halbkugel zusammen (Höhe 4 *nee*).

- Berechne  $h$  als Funktion von  $a$  und  $b$ .
- Berechne darauf Gebäudevolumen  $V$  als Funktion von  $a$  und  $b$ .
- Bestimme  $a$  und  $b$  so, dass das Gebäudevolumen maximal gross wird.
- Für die nächste Überlegung verändern wir die Betrachtungsweise. Wir nehmen an, dass das Gebäudevolumen  $V$  konstant = 20 *nee*<sup>3</sup> sei und dass das Gebäude nicht mehr in eine Halbkugel passen müsse, dass aber die Form mit Pyramidendach sowie Gesamthöhe  $H = r = 4$  *nee* bestehen bleiben. Berechne bei dem gegebenen Volumen und dem gegebenen  $r$  die Länge  $h$  als Funktion von  $a$  und  $b$ .
- Bestimme bei dem gegebenem Volumen  $a$  und  $b$  so, dass jetzt die Gebäudeoberfläche  $F(a, b)$  minimal wird. ( $h$  folgt hier aus  $a$  und  $b$  und muss daher nicht bestimmt werden.)

*Hinweis:* Falls die notwendigen Ableitungen und damit die Gleichungen zur Bestimmung von  $a$  und  $b$  etwas komplex werden, kann das Minimum auch graphisch approximativ bestimmt werden, indem man den Graphen  $F(a, b)$  und in diesem geeignete Schnitte betrachtet. Symmetrieüberlegungen und Vermutungen können dabei hilfreich sein.

**Aufgabe 4****(15 Punkte)**

Ein turmartiges Gebäude hat die Form

$$f(x, y) = 50 - x^2 - y^2, \quad (x, y) \in [-5, 5]^2, \quad f(x, y) \geq 0.$$

- Skizziere die Gebäudeform. Trage  $k_1, k_2, k_3, k_4$  als Bezeichnungen für die gebogenen Kanten an den seitlichen senkrechten ebenen Flächen ein.
- Berechne den Volumeninhalt des Gebäudes.
- Berechne die Längen der Bögen  $k_i$ .
- Berechne den Inhalt einer der vier kongruenten seitlichen senkrechten Flächen.
- Berechne approximativ den Inhalt der krummen Dachfläche.

**Aufgabe 5****(12 Punkte)**

**Zusatzaufgabe:**

- Gegeben seien die beiden Funktionen  $f : (x, a) \mapsto f(x, a) = a x^n, \quad n \in \mathbb{N}$   
und  $h : (x, b) \mapsto h(x, b) = 2 - b x^2$ .

Für  $x = 2$  gilt  $f(x) = h(x)$ .

- Berechne daraus  $b = b(a)$  und damit  $h(x, b(a)) = h_1(x, a)$
  - Berechne den Inhalt der Fläche zwischen  $f$  und  $h$  über dem Intervall  $[0, 2]$ .
  - Entscheide, für welche  $n$  die Ableitung des Flächeninhalts als Funktion von  $a$  gleich 0 sein kann (Bedingung für ein Extremum).
- Berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen von

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Für welche  $a \in \mathbb{R}$  existieren zwei verschiedene Eigenwerte?
- Sei  $a = 5$ . Was ist das Bild der Geraden  $\vec{v}(t) = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}$ ?
- Wir bilden mittels  $A$  den Vektor  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}$  ab,  $a = 5$ . Berechne das Bild der  $y$ -Koordinate dieses Vektors. Was ist das Bemerkenswerte an diesem Bild?

— ENDE —