

Modulprüfung

2009

Klasse M+E 08-09 p / M+E 1p

Mathematik: Lin Alg. + Geom.

Zeit: 120 Minuten

Teil 1: 30 Minuten, dann Abgabe

Teil 2: 90 Minuten

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2009 M+E 08–09 p / M+E 1p

Teil 1: Ohne Hilfsmittel, Zeitrahmen 30 Minuten, dann Abgabe

Viel Glück !

Löse die nachfolgenden Kurzaufgaben. (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Probl. 1 Angaben: Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = -i, \quad z_2 = \frac{1}{2} - 2i, \quad z_3 = 2 - 4i$$

- (a) **(3 Punkte)**
 Zeige von Hand die Berechnung von $\det(A)$
- (b) **(3 Punkte)**
 Zeige von Hand die Berechnung von $\det(B)$
- (c) **(3 Punkte)**
 Wie oft kann das Volumen des durch A definierten Spats
 im Volumen des durch B definierten Spats eingefüllt werden?
- (d) **(3 Punkte)**
 Zeige von Hand die Berechnung von $A \cdot B$
- (e) **(3 Punkte)**
 Zeige von Hand die Berechnung von $B \cdot A$
- (f) **(3 Punkte)**
 Man vermutet, dass $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & u \end{pmatrix}$ gilt.
 Überprüfe die Vermutung und berechne allenfalls u .
- (g) **(3 Punkte)**
 Berechne von Hand $A^{-1} \cdot \vec{b}_1$
- (h) **(3 Punkte)**
 Berechne von Hand $A^{-1} \cdot \vec{b}_2$

- (i) **(3 Punkte)**
 Berechne von Hand $A^{-1} \cdot \vec{b}_3$
- (j) **(3 Punkte)**
 Löse von Hand $((A \cdot B^{-1}) \cdot (A^{-1})^T) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{b}_1$
- (k) **(3 Punkte)**
 Berechne exakt von Hand $\frac{\bar{z}_3}{z_2}$
- (l) **(3 Punkte)**
 Berechne von Hand $(z_2)^2 - z_2 \cdot z_3$
- (m) **(3 Punkte)**
 Skizziere die Lösungen von $z^4 = z_1$
- (n) **(3 Punkte)**
 Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl?

$$\mathbf{x=0:0.1:\pi;y=2*\cos(x);plot(x,y)}$$
 (Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)
- (o) **(3 Punkte)**
 Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl?

$$(0:4)*10+12$$
 (Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)
- (p) **(3 Punkte)**
 Was ist der MATLAB-Output für die folgende Befehlssequenz?

$$\mathbf{u=[3,2,1];v=[u',-u',u']}$$
 (Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)
- (q) **(3 Punkte)**
 Beschreibe, was Matlab hier für eine Operation ausführt:

$$\mathbf{matpro=v*v'}$$

Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2009 M+E 09–09 / M+E 1p

Teil 2: Zeitrahmen 90 Minuten

Viel Glück !

Löse die nachfolgenden Aufgaben. (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Probl. 2

(15 Punkte)

Gegeben ist eine Ebene Φ durch die Punkte $P_1(1, 2, 1)$, $P_2(-1, 3, 1)$ und $P_3(0, -1, 2)$. Zudem kennt man einen Punkt $Q(-1, 0, 8)$. O ist der Ursprung.

- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle OP_1Q$
- Berechne den Normalvektor auf Φ mit der Länge 1.
- Von Q wird das Lot auf Φ gefällt. Berechne den Lotfußpunkt S auf Φ .
- Bestimme den Abstand von Q zu Φ .
- Q soll um die x -Achse um $\pm 30^\circ$ in die Punkte U_1 und U_2 gedreht werden. Berechne die neuen Abstände der beiden möglichen Punkte von Φ . Was ist zu sagen betreffend der Vergrößerung und der Verkleinerung der Distanzen bezüglich der neuen Lage?

Probl. 3

(24 Punkte)

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Berechne $A \cdot A$.
- Berechne $B \cdot B$. Was stellt man fest?
- Berechne $A \cdot B$. Was stellt man fest?
- Berechne $B \cdot A$. Was stellt man fest?
- Berechne $A \cdot A \cdot B \cdot B$.
- Seien $\vec{x}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\vec{x}_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\vec{x}_3 = \{3, 4, 5, 6, 7\}, \dots$
 Berechne $A \cdot \vec{x}_1$, $A \cdot \vec{x}_2$, $A \cdot \vec{x}_3$, \dots . Zeigt sich hier ev. ein allgemeines Gesetz?
 (Anmerkung: Probiere allenfalls jeweils auch für $A \cdot \vec{x}_k^T$.)
- $A_1 = A + 2B$. Berechne A_1^{-1} , falls möglich.
- Löse die Gleichung $A_1 \cdot A_1 + A_1 \cdot \vec{x} = A_1 + A_1^{-1}$, falls möglich.
 (Anmerkung: Probiere allenfalls mit X statt \vec{x} .)

Probl. 4**(18 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Gleichung

$$z^4 = -1 - i$$

- i. Skizziere die Lösungen in einem Diagramm in der Ebene \mathbb{C} qualitativ. Zeichne zum Vergleich in die Skizze auch den Einheitskreis um den Ursprung ein.
- ii. Berechne die Lösungen:
 - A. Exakt.
 - B. Numerisch auf 4 Stellen hinter dem Komma genau.
(Die 5. Stelle ist gerundet.)

(b) Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion

$$q(x) = \frac{84}{p(x)}, \quad p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$$

- i. Berechne die Nullstellen von $p(x)$.
Hinweis: Man kann auch probieren. Was fällt auf?
- ii. Die Nullstellen markieren die Ecken einer geradlinig begrenzten Figur in der komplexen Ebene. Berechne den Inhalt dieser Figur.
- iii. Berechne die Partialbruchzerlegung von $q(x)$ in \mathbb{R} .
- iv. Berechne eine möglichst einfache Form von $f(x) = q(x) - \left(\frac{7}{x-1} - \frac{3(x+5)}{x^2+3}\right)$.

Probl. 5 Zusatzaufgabe (wenn alle andern Aufgaben gelöst sind)**(8 Punkte)**

Denkaufgabe: Gegeben ist ein Würfel W , der sich in Normallage befindet. Das heisst, das Zentrum liegt im Ursprung und die Ecke E_1 hat die Koordinaten $(1; 1; 1)$. Der Würfel ist in eine Kugel K eingeschrieben, deren Zentrum ebenfalls der Ursprung ist.

- (a) In K wird ein Oktaeder O_1 eingeschrieben. Berechne das Volumenverhältnis vom Oktaeder O_1 zum Würfel W .
- (b) der Kugel K wird ein Oktaeder O_2 umgeschrieben. Berechne jetzt ebenfalls das Volumenverhältnis vom Oktaeder O_2 zum Würfel W .

— ENDE —