# Beispiele zu Laplace-Transformationen und Differentialgleichungen

## 1 Schwingungsgleichungen

**a Interpretation der Parameter: Angelegenheit der Physik oder der technischen Mechanik. Wichtig: Bei einer eindimensional gereichteten Bewegung kann z.B. m eine Masse bedeuten, d eine Dämpfungskonstante und k eine Federkonstante. Bei einer Drehbewegung wäre entsprechend Statt m das Massenträgheitsmoment I oder J zu setzen etc.**
**D wäre im ersten Fall eine auf die Feder und die Masse bezogenes Dämpfungsmass und $\omega_D$eine Kreisfrequenz, welche in der Lösung erscheint.**

```
Remove["Global`*"]
```

### b m y''[t]+d y'[t]+k y[t] = 0, y[0] y0,y'[0] b

**1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen**

```
links = LaplaceTransform[m y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→y0,y'[0]→b}
```

$k\,Y[s] + d\,(-y0 + s\,Y[s]) + m\,(-b - s\,y0 + s^2\,Y[s])$

**2. Rechte Seite transformieren**

```
rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

**3. Gleichung links = rechts lösen**

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$\left\{Y[s] \to \frac{b\,m + d\,y0 + m\,s\,y0}{k + d\,s + m\,s^2}\right\}$

### 4. Rücktransformation

```
U[s]:=Y[s]/. solv;  U[s]
```

$$\frac{b\,m + d\,y0 + m\,s\,y0}{k + d\,s + m\,s^2}$$

```
U[s]//Apart
```

$$\frac{b\,m}{k + d\,s + m\,s^2} + \frac{(d + m\,s)\,y0}{k + d\,s + m\,s^2}$$

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\frac{e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\left(2\,b\left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right)m+\left(d\left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right)+\left(1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right)\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)y0\right)}{2\,\sqrt{d^2-4\,k\,m}}$$

(* Allgemeine Lösung bei freier Schwingung! *)

## c m y''[t]+d y'[t]+k y[t] = 0, y[0] 0,y'[0] b

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[m y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→b}
```

$$k\,Y[s] + d\,s\,Y[s] + m\,(-b + s^2\,Y[s])$$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\left\{Y[s] \to \frac{b\,m}{k + d\,s + m\,s^2}\right\}$$

### 4. Rücktransformation

```
U[s]:=Y[s]/. solv;  U[s]
```

$$\frac{b\,m}{k + d\,s + m\,s^2}$$

```
U[s]//Apart
```

$$\frac{b\,m}{k + d\,s + m\,s^2}$$

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\frac{b\, e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right)m}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}}$$

(* Allgemeine Lösung bei freier Schwingung! *)

## d y''[t]+1/2 y'[t]+1 y[t] = 0, y[0] 0,y'[0] 1

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+1/2 y'[t]+1 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→1}
```

$$-1+Y[s]+\frac{1}{2}\,s\,Y[s]+s^2\,Y[s]$$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\left\{Y[s]\to\frac{2}{2+s+2\,s^2}\right\}$$

### 4. Rücktransformation

```
U[s]:=Y[s]/. solv;  U[s]
```

$$\frac{2}{2+s+2\,s^2}$$

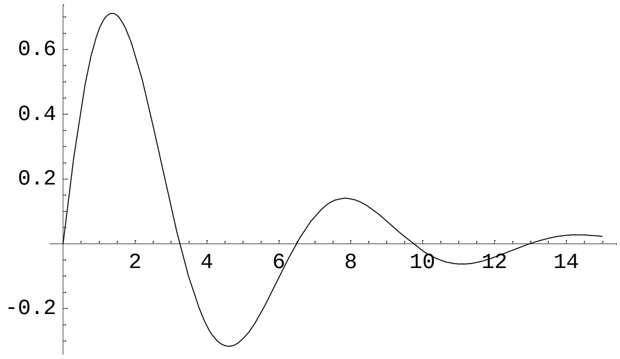
```
U[s]//Apart
```

$$\frac{2}{2+s+2\,s^2}$$

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\frac{4\,e^{-t/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{15}\,t}{4}\right]}{\sqrt{15}}$$

```
Plot[u0[t],{t,0,15}];
```




# e y''[t]+1/2 y'[t]-1 y[t] = 0, y[0] 0,y'[0] 1

## 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+1/2 y'[t]-1 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→1}
```

$-1 - Y[s] + \frac{1}{2} s Y[s] + s^2 Y[s]$

## 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

## 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$\left\{Y[s] \to \frac{2}{-2 + s + 2 s^2}\right\}$

## 4. Rücktransformation

```
U[s]:=Y[s]/. solv;  U[s]
```

$\frac{2}{-2 + s + 2 s^2}$

```
U[s]//Apart
```

$\frac{2}{-2 + s + 2 s^2}$

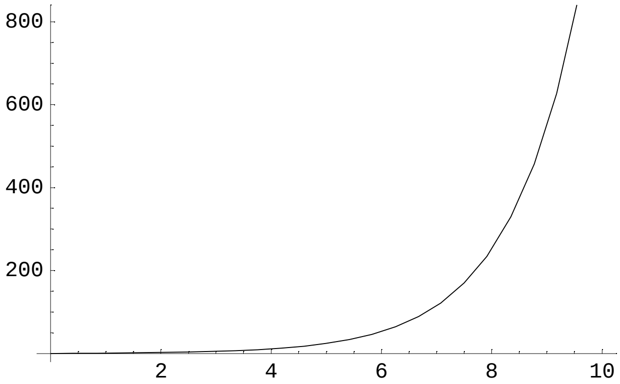
```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$\frac{2 e^{-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{17}\right) t}\left(-1 + e^{\frac{\sqrt{17}\, t}{2}}\right)}{\sqrt{17}}$

```
u0[t]//Expand//N
```

$-0.485071\,2.71828^{-1.28078\,t}+0.485071\,2.71828^{0.780776\,t}$

```
Plot[u0[t],{t,0,10}];
```




```
(* ===> Explosion *)
```

## f m y''[t]+d y'[t]+k y[t] = DiracDelta[t], y[0] 0,y'[0] 0

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[m y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0}
```

$k\,Y[s]+d\,s\,Y[s]+m\,s^2\,Y[s]$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[DiracDelta[t] ,t,s]
```

$1$

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$\left\{Y[s]\to\frac{1}{k+d\,s+m\,s^2}\right\}$

### 4. Rücktransformation

```
U[s]:=Y[s]/. solv;  U[s]
```

$\frac{1}{k+d\,s+m\,s^2}$

```
U[s]//Apart
```

$\frac{1}{k+d\,s+m\,s^2}$

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\frac{e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4 k m}\right) t}{2 m}} \left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4 k m}\, t}{m}}\right)}{\sqrt{d^2-4 k m}}$$

## g y''[t]+1/2 y'[t]+1 y[t] = DiracDelta[t], y[0] 0,y'[0] 0

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+1/2 y'[t]+1 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0}
```

$$Y[s] + \frac{1}{2} s\, Y[s] + s^2\, Y[s]$$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[DiracDelta[t] ,t,s]
```

1

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\left\{Y[s] \to \frac{2}{2+s+2 s^2}\right\}$$

### 4. Rücktransformation

```
U[s]:=Y[s]/. solv;  U[s]
```

$$\frac{2}{2+s+2 s^2}$$

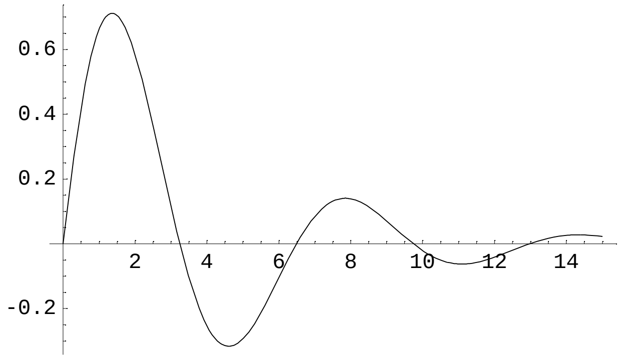
```
U[s]//Apart
```

$$\frac{2}{2+s+2 s^2}$$

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\frac{4\, e^{-t/4}\, \mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{15}\, t}{4}\right]}{\sqrt{15}}$$

```
Plot[u0[t],{t,0,15}];
```




## h   m y''[t]+d y'[t]+k y[t] = A Sin[   t+   ],   y[0]   0,y'[0]   0

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[m y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0}
```

$k\, Y[s] + d\, s\, Y[s] + m\, s^2\, Y[s]$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[A Sin[ω t+ φ] ,t,s]
```

$$\frac{A\left(\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sign}[\omega] + s\,\mathrm{Sin}[\varphi]\right)}{s^2+\omega^2}$$

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\left\{Y[s] \to \frac{A\left(\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sign}[\omega] + s\,\mathrm{Sin}[\varphi]\right)}{(k + d\,s + m\,s^2)\,(s^2+\omega^2)}\right\}$$

### 4. Rücktransformation

```
U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

$$\frac{A\left(\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sign}[\omega] + s\,\mathrm{Sin}[\varphi]\right)}{(k + d\,s + m\,s^2)\,(s^2+\omega^2)}$$

```
U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\Big(A\, e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4km}\right)t}{2m}} \Big(\omega\, \mathrm{Sin}[\varphi] \Big(d k - d\, e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}} k - k\sqrt{d^2-4km} - e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}} k \sqrt{d^2-4km} + d m \omega^2 - d\, e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}} m \omega^2 + m\sqrt{d^2-4km}\,\omega^2 + e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}} m \sqrt{d^2-4km}\,\omega^2 - 2\, e^{\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4km}\right)t}{2m}} \sqrt{d^2-4km}\,(-k+m\omega^2)\,\mathrm{Cos}[t\,\omega] + 2 d\, e^{\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4km}\right)t}{2m}} \sqrt{d^2-4km}\,\omega\, \mathrm{Sin}[t\,\omega]\Big) + \sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[\varphi] \Big(\omega \Big(d^2\Big(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}}\Big) + d\Big(1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}}\Big)\sqrt{d^2-4km} + 2\Big(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}}\Big) m\,(-k+m\omega^2)\Big) - 2 d\, e^{\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4km}\right)t}{2m}} \sqrt{d^2-4km}\,\omega\,\mathrm{Cos}[t\,\omega] - 2\, e^{\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4km}\right)t}{2m}} \sqrt{d^2-4km}\,(-k+m\omega^2)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]\Big)\Big)\Big) \Big/ \Big(2\sqrt{d^2-4km}\,\omega\,(k^2+d^2\omega^2-2km\omega^2+m^2\omega^4)\Big)$$

## i m y''[t]+d y'[t]+k y[t] = A Sin[ t], y[0] 0,y'[0] 0

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[m y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0}
```

$k\,Y[s] + d\,s\,Y[s] + m\,s^2\,Y[s]$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[A Sin[ω t] ,t,s]
```

$$\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{s^2+\omega^2}$$

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\Big\{Y[s] \to \frac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{(k+d\,s+m\,s^2)\,(s^2+\omega^2)}\Big\}$$

### 4. Rücktransformation

```
U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

$$\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{(k+d\,s+m\,s^2)\,(s^2+\omega^2)}$$

```
U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\frac{1}{2\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}\left(A\,\sqrt{\omega^2}\left(\frac{1}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}}\left(e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\left(d^2\left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right)+d\left(1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right)\sqrt{d^2-4\,k\,m}+2\left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right)m\,(-k+m\,\omega^2)\right)\right)+2\left(-d\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]+\frac{(k-m\,\omega^2)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{\omega}\right)\right)\right)$$

```
u0[t]//Expand
```

$$\frac{A\,d\,e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\sqrt{\omega^2}}{2\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}+\frac{A\,d\,e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\sqrt{\omega^2}}{2\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}-$$
$$\frac{A\,d^2\,e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\sqrt{\omega^2}}{2\,\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}+\frac{A\,d^2\,e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\sqrt{\omega^2}}{2\,\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}+$$
$$\frac{A\,e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\,k\,m\,\sqrt{\omega^2}}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}-\frac{A\,e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\,k\,m\,\sqrt{\omega^2}}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}-$$
$$\frac{A\,e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\,m^2\,(\omega^2)^{3/2}}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}+\frac{A\,e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\,m^2\,(\omega^2)^{3/2}}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}-$$
$$\frac{A\,d\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4}+\frac{A\,k\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{\omega\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}-\frac{A\,m\,\omega\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4}$$

# j y''[t]+d y'[t]+k y[t] = A Sin[ t], y[0] 0,y'[0] 0

## 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0}
```

$$k\,Y[s]+d\,s\,Y[s]+s^2\,Y[s]$$

## 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[A Sin[ω t] ,t,s]
```

$$\frac{A\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{s^2+\omega^2}$$

## 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\left\{Y[s]\to\frac{A\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{(k+d\,s+s^2)\,(s^2+\omega^2)}\right\}$$

### 4. Rücktransformation

```
U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

$$\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{(k+d\,s+s^2)\,(s^2+\omega^2)}$$

```
U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\frac{1}{2\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,\omega^2+\omega^4)}\left(A\sqrt{\omega^2}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(d+\sqrt{d^2-4\,k}\right)t}\left(d^2\left(-1+e^{\sqrt{d^2-4\,k}\,t}\right)+d\left(1+e^{\sqrt{d^2-4\,k}\,t}\right)\sqrt{d^2-4\,k}-2\left(-1+e^{\sqrt{d^2-4\,k}\,t}\right)(k-\omega^2)\right)}{\sqrt{d^2-4\,k}}+2\left(-d\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]+\frac{(k-\omega^2)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{\omega}\right)\right)\right)$$

```
(*   Formel problematisch für   4 k = d²  (0 im Nenner)!   *)
```

## k  y''[t]+d y'[t]+k y[t] = A Sin[  t],  y[0]  0,y'[0]  0,d->2 Sqrt[k]

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0,d->2 Sqrt[k]}
```

$$k\,Y[s]+2\sqrt{k}\,s\,Y[s]+s^2\,Y[s]$$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[A Sin[ω t] ,t,s]
```

$$\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{s^2+\omega^2}$$

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\left\{Y[s]\to\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{\left(\sqrt{k}+s\right)^2\,(s^2+\omega^2)}\right\}$$

### 4. Rücktransformation

```
U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

$$\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{\left(\sqrt{k}+s\right)^2\,(s^2+\omega^2)}$$

```
U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]/.d->2 Sqrt[k]
```

$$\frac{A\sqrt{\omega^2}\left(2\,e^{-\sqrt{k}\,t}\sqrt{k}+e^{-\sqrt{k}\,t}\,t\,(k+\omega^2)-2\sqrt{k}\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]+\frac{(k-\omega^2)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{\omega}\right)}{(k+\omega^2)^2}$$

## l, m Untersuchung eines auftauchenden Terms

```
solv=Solve[ω^4+(d^2-2 k)ω^2+k^2==0,{ω}]//Simplify //Flatten
```

$$\left\{\omega\to-\sqrt{-\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k},\ \omega\to\sqrt{-\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k},\ \omega\to-\sqrt{-\frac{d^2}{2}-\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k},\ \omega\to\sqrt{-\frac{d^2}{2}-\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}\right\}$$

```
solv[[3]]
```

$$\omega\to-\sqrt{-\frac{d^2}{2}-\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}$$

```
ωϵ1[ϵ_] := ω + ϵ /. solv[[1]]; ωϵ1[ϵ]
```

$$-\sqrt{-\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}+\epsilon$$

```
ωϵ2[ϵ_]:=ω+ϵ/.solv[[2]]; ωϵ2[ϵ]
```

$$\sqrt{-\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}+\epsilon$$

```
(* Fall mit den meisten positiven Anteilen unter Wurzeln *)
```

```
ωϵ2[0]//FullSimplify
```

$$\sqrt{\frac{1}{2}d\left(-d+\sqrt{d^2-4k}\right)+k}$$

```
ωϵ2[0]//FullSimplify//InputForm
```

```
Sqrt[(d*(-d + Sqrt[d^2 - 4*k]))/2 + k]
```

```
(* (d*(-d + Sqrt[d^2 - 4*k]))/2 ist für positive k negativ *)
```

```
Solve[(d*(-d + Sqrt[d^2 - 4*k]))/2 + k == 0,{k}]
```

$$\{\{k\to 0\}\}$$

```
(* ωϵ2[0] ist daher nie positiv *)
```

```
ωϵ2[0]/Sqrt[d^2]//PowerExpand
```

$$\frac{\sqrt{-\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}}{d}$$

```
ωϵ3[ϵ_]:=ω+ϵ/.solv[[3]]; ωϵ3[ϵ]
```

$$-\sqrt{-\frac{d^2}{2}-\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}+\epsilon$$

```
ωϵ4[ϵ_]:=ω+ϵ/.solv[[4]]; ωϵ4[ϵ]
```

$$\sqrt{-\frac{d^2}{2}-\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}+\epsilon$$

# n y''[t]+ 2q y'[t]+ 0^2 y[t] = 0, y[0] 1,y'[0] 0

## 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+ 2q y'[t]+ω0^2 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→1,y'[0]→0}
```

$$-s+s^2\,Y[s]+\omega 0^2\,Y[s]+2\,q\,(-1+s\,Y[s])$$

## 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

## 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\left\{Y[s]\to\frac{2\,q+s}{2\,q\,s+s^2+\omega 0^2}\right\}$$

## 4. Rücktransformation

```
U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

$$\frac{2\,q+s}{2\,q\,s+s^2+\omega 0^2}$$

```
U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]/.d->2 Sqrt[k]
```

$$\frac{e^{-t\left(q+\sqrt{q^2-\omega 0^2}\right)}\left(\left(-1+e^{2\,t\sqrt{q^2-\omega 0^2}}\right)q+\left(1+e^{2\,t\sqrt{q^2-\omega 0^2}}\right)\sqrt{q^2-\omega 0^2}\right)}{2\sqrt{q^2-\omega 0^2}}$$

## o1  y''[t]+ 2q y'[t]+  0^2 y[t]= 0,  y[0]  1,y'[0]  0,q->1,  0->1/2

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+ 2q y'[t]+ω0^2 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→1,y'[0]→0,q->1, ω0->1/2}
```

$$-s + \frac{Y[s]}{4} + s^2\,Y[s] + 2\,(-1 + s\,Y[s])$$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\left\{Y[s] \to \frac{4\,(2+s)}{1+8\,s+4\,s^2}\right\}$$

### 4. Rücktransformation

```
U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

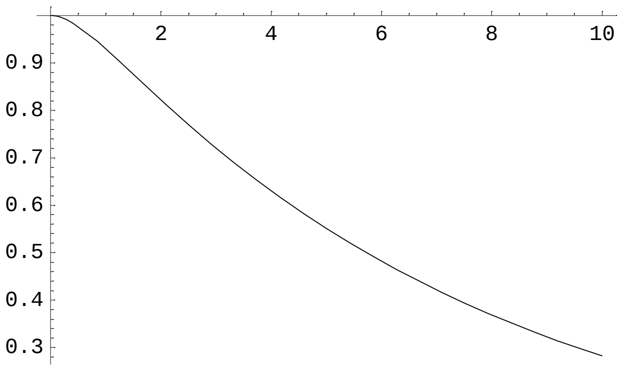
$$\frac{4\,(2+s)}{1+8\,s+4\,s^2}$$

```
U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\frac{1}{6}\,e^{-\frac{1}{2}\,(2+\sqrt{3})\,t}\,\left(3 - 2\,\sqrt{3} + \left(3 + 2\,\sqrt{3}\right)\,e^{\sqrt{3}\,t}\right)$$

```
Plot[u0[t],{t,0,10}];
```



## o2 y''[t]+ 2q y'[t]+ 0^2 y[t] = 0, y[0] 1,y'[0] 0,q->1, 0->1

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+ 2q y'[t]+ω0^2 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→1,y'[0]→0,q->1, ω0->1}
```

$-s + Y[s] + s^2 Y[s] + 2(-1 + s Y[s])$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$\left\{Y[s] \to \frac{2+s}{(1+s)^2}\right\}$

### 4. Rücktransformation

```
U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

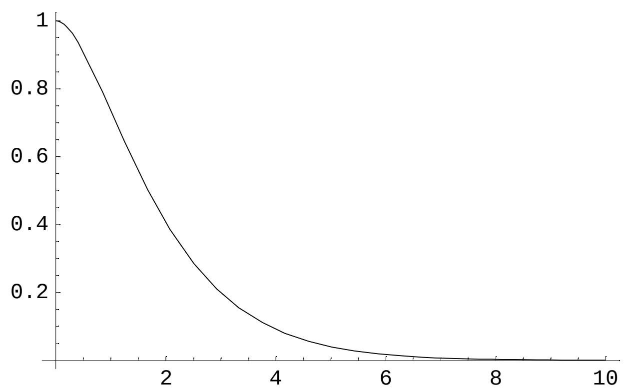
$\frac{2+s}{(1+s)^2}$

```
U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$e^{-t}(1+t)$

```
Plot[u0[t],{t,0,10}];
```



## o3 y''[t]+ 2q y'[t]+ 0^2 y[t] = 0, y[0] 1,y'[0] 0,q->1/2, 0->1

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+ 2q y'[t]+ω0^2 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→1,y'[0]→0,q->1/2, ω0->1}
```

$-1 - s + Y[s] + s\,Y[s] + s^2\,Y[s]$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$\left\{Y[s] \to \frac{1+s}{1+s+s^2}\right\}$

### 4. Rücktransformation

```
U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

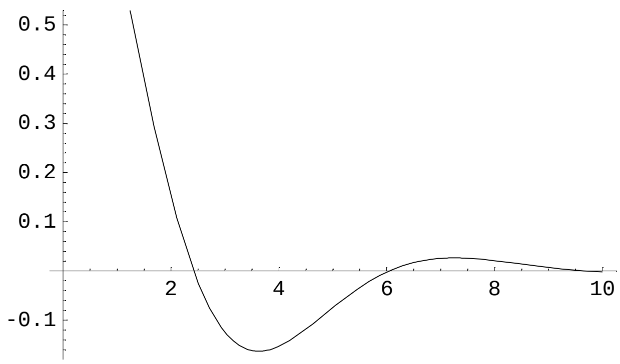
$\frac{1+s}{1+s+s^2}$

```
U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$\frac{1}{3}\,e^{-t/2}\left(3\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right] + \sqrt{3}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right]\right)$

```
Plot[u0[t],{t,0,10}];
```



# p

**Eigene Experimente....**

## q y''[t]+ 2*1 y'[t]+2^2 y[t] = Sin[ t], y[0] 1,y'[0] 0

```
Remove["Global`*"]
```

### 1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+ 2*1 y'[t]+2^2 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→1,y'[0]→0}
```

$-s + 4\,Y[s] + s^2\,Y[s] + 2\,(-1 + s\,Y[s])$

### 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[Sin[ω t] ,t,s]/.Sign[ω]->1
```

$$\frac{\sqrt{\omega^2}}{s^2 + \omega^2}$$

### 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\left\{Y[s] \to \frac{2\,s^2 + s^3 + 2\,\omega^2 + s\,\omega^2 + \sqrt{\omega^2}}{(4 + 2\,s + s^2)\,(s^2 + \omega^2)}\right\}$$

### 4. Rücktransformation

```
U[s]:=Y[s]/. solv;  U[s]
```

$$\frac{2\,s^2 + s^3 + 2\,\omega^2 + s\,\omega^2 + \sqrt{\omega^2}}{(4 + 2\,s + s^2)\,(s^2 + \omega^2)}$$

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\frac{1}{3\,\omega\,(16 - 4\,\omega^2 + \omega^4)} \Big(e^{-t} \Big(3\,\omega\,\Big(-4\,\omega^2 + \omega^4 + 2\,\Big(8 + \sqrt{\omega^2}\Big)\Big)\,\mathrm{Cos}\Big[\sqrt{3}\,t\Big] - 6\,e^t\,\omega\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[t\,\omega] + 16\,\sqrt{3}\,\omega\,\mathrm{Sin}\Big[\sqrt{3}\,t\Big] - 4\,\sqrt{3}\,\omega^3\,\mathrm{Sin}\Big[\sqrt{3}\,t\Big] + \sqrt{3}\,\omega^5\,\mathrm{Sin}\Big[\sqrt{3}\,t\Big] - 2\,\sqrt{3}\,\omega\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sin}\Big[\sqrt{3}\,t\Big] + \sqrt{3}\,\omega^3\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sin}\Big[\sqrt{3}\,t\Big] + 12\,e^t\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sin}[t\,\omega] - 3\,e^t\,(\omega^2)^{3/2}\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]\Big)\Big)$$

## 5. Konstant schwingender Term isolieren, herausrechnen, Plot der Amplitude als Funtion der Frequenz

```
col1=Collect[Evaluate[u0[t]/.{Sin[ω t]->x,Sin[Sqrt[3] t]->x^2,Cos[ω t]->x^3,Cos[Sqrt[3] t]->x^4}],{x,x^2,x^3,x^4}];
col1
```

$$-\frac{2 x^3 \sqrt{\omega^2}}{16-4\omega^2+\omega^4}+\frac{e^{-t} x^2 \left(16\sqrt{3}\,\omega-4\sqrt{3}\,\omega^3+\sqrt{3}\,\omega^5-2\sqrt{3}\,\omega\sqrt{\omega^2}+\sqrt{3}\,\omega^3\sqrt{\omega^2}\right)}{3\omega\left(16-4\omega^2+\omega^4\right)}+\frac{e^{-t} x \left(12 e^t \sqrt{\omega^2}-3 e^t \left(\omega^2\right)^{3/2}\right)}{3\omega\left(16-4\omega^2+\omega^4\right)}+\frac{e^{-t} x^4 \left(-4\omega^2+\omega^4+2\left(8+\sqrt{\omega^2}\right)\right)}{16-4\omega^2+\omega^4}$$

```
col2 =((col1)/.{x->Sin[ω t],x^2->Sin[Sqrt[3] t],x^3->Cos[ω t],x^4->Cos[Sqrt[3] t], Sqrt[ω^2]->ω})// Cancel
```

$$\frac{e^{-t}\left(16+2\omega-4\omega^2+\omega^4\right)\mathrm{Cos}\left[\sqrt{3}\,t\right]}{16-4\omega^2+\omega^4}-\frac{2\omega\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{16-4\omega^2+\omega^4}+\frac{e^{-t}\left(16-2\omega-4\omega^2+\omega^3+\omega^4\right)\mathrm{Sin}\left[\sqrt{3}\,t\right]}{\sqrt{3}\left(16-4\omega^2+\omega^4\right)}-\frac{\left(-4+\omega\sqrt{\omega^2}\right)\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{16-4\omega^2+\omega^4}$$

```
col3 = col2/. {E^(-t)->0, Sqrt[ω^2]->ω}
```

$$-\frac{2\omega\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{16-4\omega^2+\omega^4}-\frac{\left(-4+\omega^2\right)\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{16-4\omega^2+\omega^4}$$

```
col4 = col3/. {Cos[ω t]->1, Sin[t ω]->0}
```

$$-\frac{2\omega}{16-4\omega^2+\omega^4}$$

```
col5 = col3/. {Cos[ω t]->0, Sin[t ω]->1}
```

$$-\frac{-4+\omega^2}{16-4\omega^2+\omega^4}$$

```
cω1 = col4/Sqrt[col4^2+col5^2]//Simplify
```

$$-2\omega\sqrt{\frac{1}{16-4\omega^2+\omega^4}}$$

```
cω2 = col5/Sqrt[col4^2+col5^2]//Simplify
```

$$-\left(-4+\omega^2\right)\sqrt{\frac{1}{16-4\omega^2+\omega^4}}$$

```
schwing = -(Sqrt[col4^2+col5^2](Sin[α] Cos[ω t]+Cos[α] Sin[t ω])//Simplify)/.
α->ArcSin[cω1]
```

$$-\sqrt{\frac{1}{16-4\omega^2+\omega^4}}\,\mathrm{Sin}\left[t\,\omega-\mathrm{ArcSin}\left[2\omega\sqrt{\frac{1}{16-4\omega^2+\omega^4}}\right]\right]$$

```
aml=-Sqrt[col4^2+col5^2]//Simplify
```

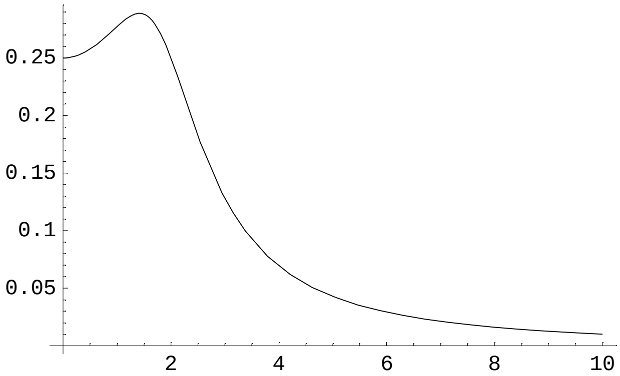
$$-\sqrt{\frac{1}{16-4\omega^2+\omega^4}}$$

```
aml//InputForm
```

```
-Sqrt[(16 - 4*ω^2 + ω^4)^(-1)]
```

```
amplitude[ω_]:=1/Sqrt[16 - 4*ω^2 + ω^4]
```

```
Plot[amplitude[ω],{ω,0,10}];
```




```
Solve[D[amplitude[x],x]==0,{x}]
```

$\{\{x \to 0\}, \{x \to -\sqrt{2}\}, \{x \to \sqrt{2}\}\}$

```
N[%]
```

$\{\{x \to 0.\}, \{x \to -1.41421\}, \{x \to 1.41421\}\}$

## 6. Bemerkung: Die Amplitudenformel gibt dasselbe Resultat:

```
Sqrt[2^2-2*1^2]//N
```

```
1.41421
```

## 2 Systeme: Beispiel mit gekoppelten Pendeln

**a Wir betrachten hier das gekoppelte Pendel. Zwei durch eine Feder mit der Federkonstanten k verbundene Massen sind an gleichlangen Stangen aufgehängt, welche wir als gewichtslos annehmen.   1,   2 sind die Auschlagswinkel. Diese nehmen wir als klein an, sodass  L * sin(  (t)) den Ausschlag  y(t) approximiert und die Höhenänderung einer Masse etwa konstant ist. Nun stellen wir durch Betrachtung der durch die Massen verursachten Drehmomente eine Gleichungen auf:**

Rücktreibende Kraft infolge Auslenkung  =- m g sin(  2)    - m g   2
Rücktreibendes Moment infolge Auslenkung = - L m g sin(  2)    - L m g   2
Federkraft = k L sin(  2)    k L   2
Entgegengesetzt wirkendes Moment der Feder    - L k L   2 = - k L^2   2
Kompensation dieses Moments durch das andere Pendel: k L^2   1
Gleichgewicht mit "Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung" = (m L^2)   2"

Gleichung für das zweite Pendel:
(m L^2)   2" = - L m g   2 - k L^2   2 + k L^2   1

Gleichung für das erste Pendel:
(m L^2)   1" = - L m g   1 - k L^2   1 + k L^2   2

Anfangsbedingungen:
  1(0) =a,    1'(0) = 0,   2(0) =   2'(0) = 0

**Erhaltenes System:**
**{**
**2''[t] + g/L   2[t] - k/m   2[t] + k/m   1[t] == 0,**
**1''[t] + g/L   1[t] - k/m   1[t] + k/m   2[t] == 0,**
**1[0] == a,;   1'[0] == 0,   2[0] == 0,   2'[0] == 0**
**}**

### 1. 1. Gleichung, linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
Remove["Global`*"]

links1 = LaplaceTransform[φ2''[t] + g/L φ2[t] - k/m φ2[t] + k/m φ1[t], t,s] /.
{LaplaceTransform[φ1[t],t,s]→Φ1[s], LaplaceTransform[φ2[t],t,s]→Φ2[s], φ1[0]→a,
φ1'[0]→0, φ2[0]→0, φ2'[0]→0}
```

$$\frac{k\,\Phi1[s]}{m} + \frac{g\,\Phi2[s]}{L} - \frac{k\,\Phi2[s]}{m} + s^2\,\Phi2[s]$$

```
links2 = LaplaceTransform[φ1''[t] + g/L φ1[t] - k/m φ1[t] + k/m φ2[t], t,s] /.
{LaplaceTransform[φ1[t],t,s]→Φ1[s], LaplaceTransform[φ2[t],t,s]→Φ2[s], φ1[0]→a,
φ1'[0]→0, φ2[0]→0, φ2'[0]→0}
```

$$-a\,s + \frac{g\,\Phi1[s]}{L} - \frac{k\,\Phi1[s]}{m} + s^2\,\Phi1[s] + \frac{k\,\Phi2[s]}{m}$$

## 2. Rechte Seite transformieren

```
rechts1 = LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

```
rechts2 = LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

```
links1==rechts1
```

$$\frac{k\,\Phi1[s]}{m} + \frac{g\,\Phi2[s]}{L} - \frac{k\,\Phi2[s]}{m} + s^2\,\Phi2[s] == 0$$

```
links2==rechts2
```

$$-a\,s + \frac{g\,\Phi1[s]}{L} - \frac{k\,\Phi1[s]}{m} + s^2\,\Phi1[s] + \frac{k\,\Phi2[s]}{m} == 0$$

## 3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[{links1==rechts1, links2==rechts2},{Φ1[s],Φ2[s]}] // Flatten
```

$$\left\{\Phi1[s] \to \frac{a\,L\,s\,(-k\,L + g\,m + L\,m\,s^2)}{(g + L\,s^2)\,(-2\,k\,L + g\,m + L\,m\,s^2)},\ \Phi2[s] \to \frac{a\,k\,L^2\,s}{(g + L\,s^2)\,(2\,k\,L - g\,m - L\,m\,s^2)}\right\}$$

## 4. Rücktransformation

```
U1[s]:=Φ1[s]/. solv[[1]];  U1[s]
```

$$\frac{a\,L\,s\,(-k\,L + g\,m + L\,m\,s^2)}{(g + L\,s^2)\,(-2\,k\,L + g\,m + L\,m\,s^2)}$$

```
U1[s]//Apart
```

$$\frac{a\,L\,s}{2\,(g + L\,s^2)} + \frac{a\,L\,m\,s}{2\,(-2\,k\,L + g\,m + L\,m\,s^2)}$$

```
u1[t_]:=InverseLaplaceTransform[U1[s],s,t]//Simplify; u1[t]
```

$$\frac{1}{4}\,a\left(e^{-\frac{\sqrt{2\,k\,L-g\,m}\,t}{\sqrt{L}\,\sqrt{m}}} + e^{\frac{\sqrt{2\,k\,L-g\,m}\,t}{\sqrt{L}\,\sqrt{m}}} + 2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{g}\,t}{\sqrt{L}}\right]\right)$$

```
U2[s]:=Φ2[s]/. solv[[2]];  U2[s]
```

$$\frac{a\,k\,L^2\,s}{(g + L\,s^2)\,(2\,k\,L - g\,m - L\,m\,s^2)}$$

```
U2[s]//Apart
```

$$\frac{a\,L\,s}{2\,(g + L\,s^2)} - \frac{a\,L\,m\,s}{2\,(-2\,k\,L + g\,m + L\,m\,s^2)}$$

```
u2[t_]:=InverseLaplaceTransform[U2[s],s,t]//Simplify; u2[t]
```

$$\frac{1}{4}\, a \left(-e^{-\frac{\sqrt{2\,k\,L-g\,m}\;t}{\sqrt{L}\;\sqrt{m}}}\left(1+e^{\frac{2\sqrt{2\,k\,L-g\,m}\;t}{\sqrt{L}\;\sqrt{m}}}\right)+2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{g}\;t}{\sqrt{L}}\right]\right)$$

## 4. Plots

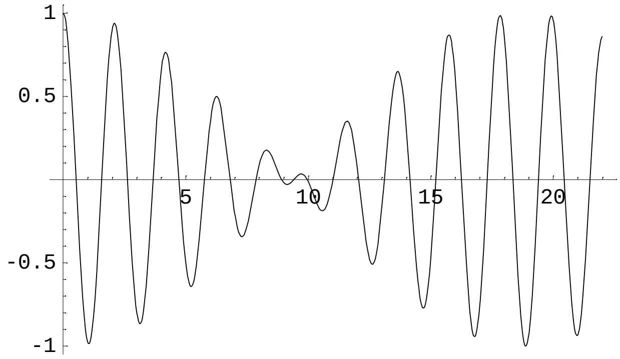
```
u1P[t]:=u1[t]/. {g -> 10, m->1, L->1, k->1, a->1}; u1P[t]
```

$$\frac{1}{4}\left(e^{-2\,i\,\sqrt{2}\;t}+e^{2\,i\,\sqrt{2}\;t}+2\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{10}\;t\right]\right)$$

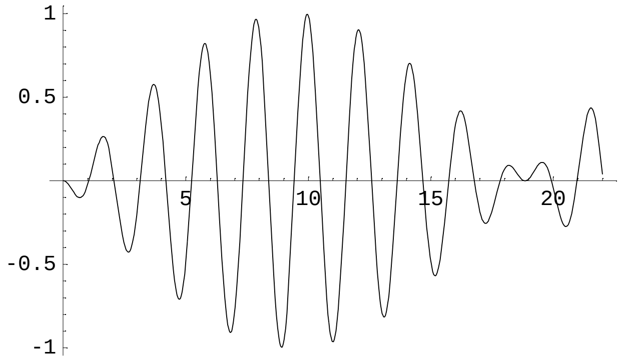
```
u2P[t]:=u2[t]/. {g -> 10, m->1, L->1, k->1, a->1}; u2P[t]
```

$$\frac{1}{4}\left(-e^{-2\,i\,\sqrt{2}\;t}\left(1+e^{4\,i\,\sqrt{2}\;t}\right)+2\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{10}\;t\right]\right)$$

```
Plot[Evaluate[u1P[t]],{t,0,22}];
```




```
Plot[Evaluate[u2P[t]],{t,0,22}];
```



## 4. Progamm

```
Remove["Global`*"];
links1 = LaplaceTransform[φ2''[t] + g/L φ2[t] - k/m φ2[t] + k/m φ1[t], t,s] /.
{LaplaceTransform[φ1[t],t,s]→Φ1[s], LaplaceTransform[φ2[t],t,s]→Φ2[s], φ1[0]→a,
φ1'[0]→0, φ2[0]→0, φ2'[0]→0};
links2 = LaplaceTransform[φ1''[t] + g/L φ1[t] - k/m φ1[t] + k/m φ2[t], t,s] /.
{LaplaceTransform[φ1[t],t,s]→Φ1[s], LaplaceTransform[φ2[t],t,s]→Φ2[s], φ1[0]→a,
φ1'[0]→0, φ2[0]→0, φ2'[0]→0};
solv=Solve[{links1==0, links2==0},{Φ1[s],Φ2[s]}] // Flatten;
U1[s]:=Φ1[s]/. solv[[1]];
U2[s]:=Φ2[s]/. solv[[2]];
u1[t_]:=InverseLaplaceTransform[U1[s],s,t]//Simplify; Print["u1(t) = ",u1[t]];
u2[t_]:=InverseLaplaceTransform[U2[s],s,t]//Simplify; Print["u2(t) = ",u2[t]];
u1P[t]:=Re[u1[t]]/. {g -> 10, m->1, L->1, k->1, a->1};
u2P[t]:=Re[u2[t]]/. {g -> 10, m->1, L->1, k->1, a->1};
Plot[Evaluate[u1P[t]],{t,0,22}];
Plot[Evaluate[u2P[t]],{t,0,22}];
```

$$u1(t) = \frac{1}{4} a \left( e^{-\frac{\sqrt{2kL-gm}\,t}{\sqrt{L}\,\sqrt{m}}} + e^{\frac{\sqrt{2kL-gm}\,t}{\sqrt{L}\,\sqrt{m}}} + 2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{g}\,t}{\sqrt{L}}\right] \right)$$

$$u2(t) = \frac{1}{4} a \left( -e^{-\frac{\sqrt{2kL-gm}\,t}{\sqrt{L}\,\sqrt{m}}} \left(1 + e^{\frac{2\sqrt{2kL-gm}\,t}{\sqrt{L}\,\sqrt{m}}}\right) + 2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{g}\,t}{\sqrt{L}}\right] \right)$$