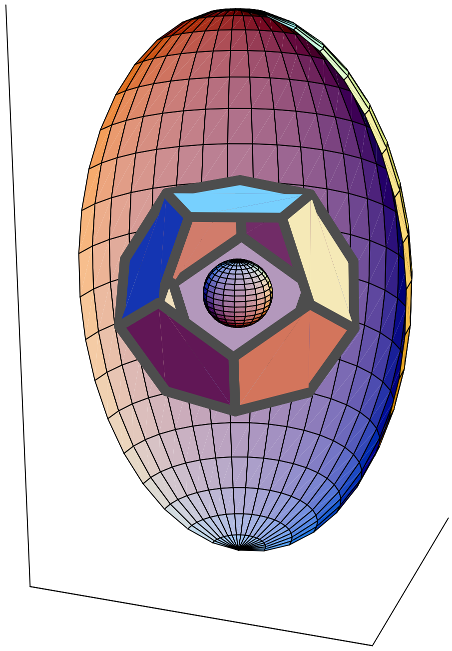
Aufgaben ◇ Modulprüfungen ◇ Vordiplome
◇ Maschinenbau ◇
◇ Mathematik II (Analysis III & IV) ◇
Mit Teil Statistik (III & IV, am Schluss)



von

Rolf Wirz

Alt–Ingenieurschule Biel — HTA–Biel — BFH/Dep. TI/ AHB

Ausgabe vom 9. Juli 2012, Version 1.4.0 / d

Mit klickbaren Links zu Lösungen

WIR1 /2008/ 2009 / 2010 / 2011 / 2012 /LaTex/BuchUebAlgBachelor.TEX

Übungen und Tests aus den Jahren 2007 – 2012 mit Vordiplomaufgaben und Modulprüfungsaufgaben aus den Jahren 2007 – 2012, letztere aus diversen Abteilungen (Fachbereichen)
Produziert mit PCTeX unter Win XP.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

Bei der Erarbeitung von Lernstoff geht es kaum ohne Übung. Das gilt nicht nur beim Erlernen der Handhabung eines Musikinstrumentes. Unser Instrument, das wir für die Meisterung von Mathematikstoff zu beherrschen lernen müssen, ist das eingene Denken. Es geht also hier um Hirntraining, um Übung. Beim Üben, das gilt speziell auch bei einer Prüfüungsvorbereitung, ist Ausgeglichenheit ist angesagt. Wer nicht ausgeglichen ist, neigt stark auf eine Seite. Er kann daher kippen und schliesslich stürzen. Dann ist das Lernen gefährtet, oder die Prüfung ist schon vor der Prüfung vorbei. Der Aufwand hat sich nicht gelohnt. Das kannst du vermeiden, indem du dir dein Zentrum bewusst machst, um das du die Schranken deiner Ausgeglichenheit definieren sollst...

PhW

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

Inhaltsverzeichnis

0.1 Einführung

Dieses Arbeitsbuch ist als Begleitung zu den Vorlesungen und Übungen in Analysis II und IV (2. Studienjahr) des Bachelor-Lehrgangs für Maschineningenieure in den Jahren 2007 – 2010 entstanden. Ein Kapitel entsprach dabei einer Arbeitswoche. Zuerst ist jeweils eine kurze Stoffübersicht stichwortartig wiedergegeben. Die Stoffabfolge bezieht sich dabei auf die verwendeten Skripte „Mathematik II". In jeder Arbeitsphase folgen auf die Stoffübersicht dann Übungen, manchmal auch ehemalige Tests und Links zu den Lösungen. Diese Lösungen sind vor allem des Umfangs des Maschinen–Outputs wegen ausgelagert. Zu einer Übungsserie kann der Umfang der zugehörigen Lösungen bis zu 200 Seiten betragen, wobei darin die Graphiken meistens einen großen Raum einnehmen.

Klickbare Links zu diesen Skripten:

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download)
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf (Analysis deutsch – französisch)
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweid.pdf (Analysis deutsch)
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZwef.pdf (Analysis französisch)

Die Lösungen zu den Übungen sind aus Praktikabilitätsgründen mit *Mathematica* produziert worden. In den bald 20 Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Vorteil dieses Verfahrens: Die Files mit dem reinen *Mathematica*–Source-Code in lassen sich damit sehr klein halten. Daher sind sie sehr einfach über Internet transportierbar. Es entstehen keine grossen Download–Zeiten und die Kosten des Speicherplatzes bei einem Provider übersteigen die gesetzten Grenzen nicht, denn die entstehenden File–Sammlungen haben beschränkte Grösse. Die abgearbeiteten Files mit dem Output mit Postscript-Graphiken sind allgemein sehr „schwer", können aber jederzeit mit dem *Mathematica*–Programm aus dem Source-Code wieder erstellt werden. Dafür sind die mittels „Output beladenen Files" erzeugten PDF-Files wieder klein, was sie transportabel macht.
Weiterer Gründe für die Verwendung von *Mathematica* im Vergleich zu Konkurrenzprodukten liegen in den Lizenzbedingungen und dem Leistungsumfang, also im Kosten–Nutzen–Verhältnis im Vergleich zur momentanen Situation bei Konkurrenzprodukten, wodurch eine längere Evaluationen von selbst überflüssig geworden ist.
Für den auf den folgenden Seiten wiedergegebene Output sind daher die Seiten unabhängig nummeriert.

Nachstehend sind einige verschiedene Formatierungsmöglichkeiten der *Mathematica*–Files dargestellt. Infolge der in PDF-Files und im der Internet verwendbaren Farbformate, sind dabei die Farben zum Teil in den PDF-Files gegenüber der Bildschirmdarstellung rigoros reduziert. Das Format ersieht man aus dem Dateinamen. Die dabei zur Anwendung gelangte Mathematik braucht man zu Beginn nicht zu verstehen. Man kann trotzdem beurteilen, welche Darstellungsart im gegenwärtigen Rahmen gefällt und welche nicht:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_ArticleModern.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_ArticleClassic.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Classic.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Classroom.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Default.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Demo.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_DemoText.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_NaturalColor.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_PastelColor.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_PrimaryColor.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Report.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Textbook.pdf
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Tutorialbook.pdf

Hier sind die Quellencode-Files:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Default.nb
http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Anal_EuM_Bach/Darstellung_Work.nb

Kapitel 1

Teil 1: Analysis

Die beiden Teile „Analysis“ und „Statistik“ werden hier aus softwaretechnischen Gründen in getrennten Teilen, jedoch fortlaufend nummeriert aufgeführt.

Kapitel 2

Phase 1 (I/1)

2.1 Stoffprogramm Phase 1 ◇ M ◇

Mathematik II, 1 Semester

- ⊘ Integration in andern Koordinatensystemen, Transformation des Volumenelements
- ⊘ Beispiele Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten, Anwendungen
- ⊘ Labor-Übungen: 3D-Plots, Berechnung von Inhalten „sehr krummer“ Körper

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

2.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 01 ◇

Kleinprojekt S3/01

Ein Kleinprojekt hat einen abgefassten Bericht zur Folge!

(1) Selbststudium Funktionaldeterminante und Substitutionsregel (allgemeine Regel) zur Berechnung von Volumenintegralen (setze $f(x, y, t) \equiv 1$).

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAnaGdf.pdf, Kapitel 8.6.

(2) (a) Stelle folgende Körper graphisch dar:

i.

$$\vec{w}(u, v, r) = \begin{pmatrix} (r \cdot \cos(u) + 4) \sin(v) \\ (r \cdot \cos(u) + 4) \cos(v) \\ \sin(u) \end{pmatrix}, \quad u \in [0,\ 2\,\pi], \quad v \in [0,\ \pi], \quad r = 1$$

ii.

$$\vec{w}(u, v, r) = \begin{pmatrix} (r \cdot \cos(u) + 4) \sin(v) \\ (r \cdot \cos(u) + 4) \cos(v) \\ \sin(u) \end{pmatrix}, \quad u \in [0,\ 2\,\pi], \quad v \in [0,\ 2\,\pi], \quad r = 0.25$$

iii.

$$\vec{w}(u, v, r) = \begin{pmatrix} (r \cdot \cos(u) + 4) \sin(v) \\ (r \cdot \sin(u) + 4) \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}, \quad u \in [0,\ 2\,\pi], \quad v \in [0,\ \pi], \quad r = 1$$

iv.

$$\vec{w}(u, v, r) = \begin{pmatrix} (r \cdot \cos(u) + 4) \sin(v) \\ (r \cdot \sin(u) + 4) \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}, \quad u \in [0,\ 2\,\pi], \quad v \in [0,\ 2\,\pi], \quad r = 0.5$$

v.

$$\vec{w}(u, v, r) = \begin{pmatrix} (r \cdot \cos(u) + 4) \cos(v) \\ (r \cdot \sin(u) + 4) \sin(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}, \quad u \in [0,\ 2\,\pi], \quad v \in [0,\ 2\,\pi], \quad r = 1$$

Siehe http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/LEMAna1_01.pdf

Versuche, auf diese Weise (a) eine Banane und (b) einen Schlauch mit verschiedenen Querschnittten (Kreis, Ellipse, Dreieck, abgeschnittene Parabel u.s.w.) anzunähern resp. darzustellen.

%

(b) Versuche, die Volumina der Körper zu bestimmen.

(c) Untersuche an Beispielen, ob bei Körpern die Formel

$$''Volumeninhalt = Querschnittinhalt\ mal\ Umfang\ des\ Schwerpunktkreises''$$

richtig ist.

Organisatorisches für Neueintretende

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine Stunde Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint.
Gerade am Anfang gilt es im Selbststudium Grundlagen zu repetieren oder eventuell fehlende Grundlagen zu erarbeiten. **Aufgabe:** Konsultiere daher das Blatt „Selbststudium 1, Analysis“ (im Menue wo man dieses Blatt hier öffnen kann) und mache dir dafür einen Studienplan über ca. 3 – 4 Wochen. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

(1) Eigene Organisation und Planung (nichts dem Zufall überlassen beim Erarbeiten eines Stoffgebietes, beim Arbeiten mit dem Stoff der Lektionen, Prüfungsvor- und Nachbereitung (Verbesserung), . . .).

(a) Planung organisieren! (Strategie, Prinzipien, Tandem)

(b) Einarbeitung in die Lerntechnik (Literaturseite von Wir1!)

(c) A4-Seite mit den persönlich wichtigsten 7 Punkten der eigenen Lerntechnik zusammenstellen und eine **Kopie abgeben**. Beginn 3. Woche.

(2) Rechner-Probleme lösen und falls noch nicht vorhanden beschaffen (Aufgabe: Sich damit zurecht finden, durchfragen u.s.w.):

(a) Account (Schule)

(b) Mathematik–Software–Zugang

(c) Scripte u.s.w. (DOWNLOAD, WIR1)

(d) Ein MATLAB–Kurs (wird zu einem wesentlichen Teil dann im Selbststudium erarbeitet). DOWNLOAD: Internet, Link-Seiten Wir1

(e) Eigener Rechner, Software, Speicher, Internet lauffähig halten

(f) Taschenrechner in Eigenverantwortuöng (an Prüfungen notwendig).

(3) Literatur und Schulunterlagen (Reglemente):

(a) Schulreglemente beschaffen und studieren, Weisungen, Führer

(b) Literatur (Lehrbuch, Formeln) beschaffen nach Literaturliste Wir1

(4) Porte–Feuille (dient je nach Bedarf als zusätzlicher Leistungsnachweis. Dafür können nach Ankündigung auch Punkte verteilt werden, die eventuell dann eine Rundung ermöglichen). Was gehört ins Porte–Feuille (Präsentierbare Sammlung der eigenen Arbeit, keine rohen Entwürfe)?

(a) Eigene Formelsammlung, Zusammenfassungen

(b) Eigene Planungen, Lerntechnik: Strategien, Prinzipien, Schemata, wichtige Dinge

(c) Übungen und Prüfungen mit Verbesserungen

(d) Mathematiksoftware–Arbeiten

(e) Eventuell Journal

Mögliche Abgabe von Übungen: Falls vom Dozenten verlangt eine Woche später.

Vgl. auch Übungscheine:

http://rowicus.ch/Wir/Administratives/Uebungsscheine.html

2.3 Link zu den Lösungen Phase 1

Hinweis zu MatLab:
http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/FileList.html (Teil über 3D Plots).

Hinweis zu den nachstehenden Lösungen: Die Lösungen sind aus Praktikabilitätsgründen mit *Mathematica* produziert worden. In den bald 20 Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Vorteil dieses Verfahrens: Die Files mit dem reinen *Mathematica*–Source-Code in lassen sich damit sehr klein halten. Daher sind sie sehr einfach über Internet transportierbar. Es entstehen keine grossen Download–Zeiten und die Kosten des Speicherplatzes bei einem Provider übersteigen die gesetzten Grenzen nicht, denn die entstehenden File–Sammlungen haben beschränkte Grösse. Die abgearbeiteten Files mit dem Output mit Postscript-Graphiken sind allgemein sehr „schwer“, können aber jederzeit mit dem *Mathematica*–Programm aus dem Source-Code wieder erstellt werden. Dafür sind die mittels „Output beladenen Files“ erzeugten PDF-Files wieder klein, was sie transportabel macht.
Für den auf den folgenden Seiten wiedergegebene Output (bei der Alternativausgabe mittels des unten angegebenen klickbaren URL's via Internet abrufbar) sind daher die Seiten unabhängig nummeriert.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_01.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_01.nb

Kapitel 3

Phase 2 (I/2)

3.1 Stoffprogramm Phase 2 ◇ M ◇

⊘ Kleinprojekt Kurven, Spezielles zu Evolventen, Evoluten

- Erarbeitung des Stoffs nach Skript Analysis Kapitel 9
- Begriffe verstehen, Zusammenhänge erkennen (Parametrisierung von Kurven, Kurvenlänge als Parameter, Krümmung, Tangentenvektor, Normalenvektor, Binormalenvektor, begleitendes Dreibein
- Ziel 1: Modellierung von Schläuchen um beliebige Kurven

Arbeiten

⊘ Studium Skript Analysis Kapitel 9
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGd.pdf oder Handout

- Workshop- oder seminarmässig / Selbststudium
- Ziel 1: Wahl interessanter Kurven und Modellierung von Schläuchen um (3D-Darstellung)

Hinweise zu den Übungen:

http://rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html#Pack $\rightsquigarrow$ Files anschauen im Labor (Programm für .nb muss installiert sein!). Themen:

⊘ Krümmungen, Schmiegekreise, Krümmungsmittelpunkte an ebenen Kurven, Animationen
http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/EbeneKurvenKrum.nb

⊘ Krümmungen und begleitendes Dreibein bei Raumkurven, Animationen
http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/RaumKurvenKrum.nb

⊘ Räumliche Lemniskate (3D-Bretzel) http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Brezel3D.nb

⊘ *Hinweise:* Files öffnen, Pull-Down-Menus oben: Klicke auf „Kernel“, hier auf „Evaluation“, dann auf „Evaluate Notebook“ $\rightsquigarrow$ alle Programme erfahren einen Run! Bezüglich Animationen alle zu animierenden Graphiken rechts anklicken (erscheint schwarzer Balken über alle Bilder), dann ganz oben unter „Cell“ auf „Animate Selected Graphics“ klicken.

3.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 02 ◇

Kleinprojekt S3/02: (Zeitziel: 2 Wochen)

(Ein Kleinprojekt hat einen kurzen Bericht oder eine graphische Darstellung zur Folge.)

(1) Erstelle Graphiken (3D) mit Modellierungen von Schläuchen um beliebige, selbst gewählte interessante Kurven.

(a) Erarbeite den notwendigen Stoff nach Skript Analysis Kapitel 9: Begriffe verstehen, Zusammenhänge erkennen (Parametrisierung von Kurven, Kurvenlänge als Parameter, Krümmung, Tangentenvektor, Normalenvektor, Binormalenvektor, begleitendes Dreibein, u.s.w.

(b) Wähle beliebige Kurven und erzeuge Schläuche um diese Kurven (Kreis mit konstantem oder variablem Radius in der Normalenebene um jeden Kurvenpunkt).

(c) Ziel: Erster Output nach einer Woche.

(2) Erstelle Graphiken (2D) mit Modellierungen von Evolventen, Evoluten zu beliebigen, selbst gewählten interessanten Kurven.

(a) Erarbeite den Stoffs nach Skript Analysis Kapitel 9 Begriffe verstehen, Zusammenhänge erkennen (2-dimensional: Evolute als Kurve des Mittelpunktes des Krümmungskreises , Evolvente als Abwicklungskurve anschaulich des eines Fadens, Evolute der Evolvente gleich Ursprungskurve u.s.w.)

(b) Wähle beliebige Kurven (z.B. $y = \cos(x)$ oder $y = x^4$) und erzeuge graphische Darstellungen von Evoluten und Evolventen für die gewählten Kurven.

(c) Ziel: Zweiter Output nach zwei Wochen.

3.3 Link zu den Lösungen Phase 2

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_01.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_02.nb

Weitere Lösungen (Galerie):

- ⊘ http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/SchlaeucheM2p07.pdf
- ⊘ urlhttp://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/SchlaeucheM2p07.nb

Kapitel 4

Phase 3 (I/3)

4.1 Stoffprogramm Phase 3 ◇ M ◇

⊘ Schlauchgalerie sichten
http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/SchlaeucheM2p07.nb
http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/SchlaeucheM2p07.pdf

⊘ Kleinprojekt Kurven, Spezielles zu Evolventen, Evoluten

- Erarbeitung des Stoffs nach Skript Analysis Kapitel 9
- 2-dimensional: Evolute als Kurve des Mittelpunktes des Krümmungskreises, Evolvente als Abwicklungskurve anschaulich des eines Fadens, Evolute der Evolvente gleich Ursprungskurve u.s.w.)
- Ziel 2: Graphische Darstellung von Evoluten und Evolventen für beliebige 2-dimensionale Kurven
-

⊘ Einführung in die Laplacetransformationen:

- Rechnung eines Beispiels (Differentialgleichung) ohne Regeln
- Notwendige Voraussetzungen
- Symbolik

Arbeiten

Selbststudium:

⊘ Projektarbeit

⊘ Studium Skript Analysis Kapitel 9
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGd.pdf oder Handout

⊘ Workshop– oder seminarmässig — Selbststudium

- ⊘ Ziel 2: Graphische Darstellung von Evoluten und Evolventen für beliebige 2-dimensionale Kurven

4.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 03 ◇

Kleinprojekt S3/02: $\rightsquigarrow$ **Weiterarbeit!** (Zeitziel: 2 Wochen)

(Ein Kleinprojekt hat einen kurzen Bericht oder eine graphische Darstellung zur Folge.)

(1) Erstelle Graphiken (3D) mit Modellierungen von Schläuchen um beliebige, selbst gewählte interessante Kurven.

(a) Erarbeite den notwendigen Stoff nach Skript Analysis Kapitel 9: Begriffe verstehen, Zusammenhänge erkennen (Parametrisierung von Kurven, Kurvenlänge als Parameter, Krümmung, Tangentenvektor, Normalenvektor, Binormalenvektor, begleitendes Dreibein, u.s.w.

(b) Wähle beliebige Kurven und erzeuge Schläuche um diese Kurven (Kreis mit konstantem oder variablem Radius in der Normalenebene um jeden Kurvenpunkt).

(c) Ziel: Erster Output nach einer Woche.

(2) Erstelle Graphiken (2D) mit Modellierungen von Evolventen, Evoluten zu beliebigen, selbst gewählten interessanten Kurven.

(a) Erarbeite den Stoffs nach Skript Analysis Kapitel 9 Begriffe verstehen, Zusammenhänge erkennen (2-dimensional: Evolute als Kurve des Mittelpunktes des Krümmungskreises , Evolvente als Abwicklungskurve anschaulich des eines Fadens, Evolute der Evolvente gleich Ursprungskurve u.s.w.)

(b) Wähle beliebige Kurven (z.B. $y = \cos(x)$ oder $y = x^4$) und erzeuge graphische Darstellungen von Evoluten und Evolventen für die gewählten Kurven.

(c) Ziel: Zweiter Output nach zwei Wochen.

4.3 Link zu den Lösungen Phase 3

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_03.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_03.nb

Weitere Lösungen (Galerie):

- http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/EvolutenEvolventen.pdf
- urlhttp://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/EvolutenEvolventen.nb

Kapitel 5

Phase 4 (I/4)

5.1 Stoffprogramm Phase 4 ◇ M ◇

⊘ Laplace-Transformationen

- Beispiele
- Eindeutigkeitsproblem
- Kalkül Elementare Regeln
  - Exponentialfunktion
  - Potenzfunktion, speziell Konstante, 1, t
  - $\sin$, $\cos$
  - Linearität
  - Streckung Urbild
  - Differentiation,
  - Beispiele
  - bf Vorschau:
  - Anwendung auf Differentialgleichungen
  - Integration
  - Verschiebung Originalfunktion
  - Verschiebung Bildfunktion
  - Multiplikationsregel
  - Divisionsregel
  - Faltung
  - Periodische Funktionen

Arbeiten

Selbststudium:

⊘ Studium Skript Mathematik II

- ⊘ Studium Skript Analysis Kapitel 9
  http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html#S1 oder Handout
- ⊘ Kapitel über Laplace-Transformationen

5.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 04 ◇

Laplace–Transformationen

(1) Bestimme die Laplace–Transformierten der folgenden Funktionen:

(a)
$$f(t) = e^{2\,t-3}$$

(b)
$$f(t) = t\,(t-1)\,(t-2) + 5 \quad \text{(erst ausmultiplizieren!)}$$

(c)
$$f(t) = \cosh(t)$$

(d)
$$f(t) = \sinh(t)$$

(e)
$$f(t) = \cosh(t) \cdot \sinh(t)$$

(f)
$$f(t) = 2\,\cosh(t) - \sinh(t)$$

(g)
$$f(t) = \cosh(3\,t)$$

(h)
$$f(t) = 3\,\cosh(4\,t)$$

(i)
$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & 1 < t \end{cases}$$

(j)
$$f(t) = e^{2\,t} \cdot \cos(3\,t) \cdot \cosh(4\,t)$$

(k)
$$\frac{d\,f(t)}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\Big(e^{2\,t} \cdot \cos(3\,t) \cdot \cosh(4\,t)\Big)$$

5.3 Link zu den Lösungen Phase 4

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_04.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_04.nb

Kapitel 6

Phase 5 (I/5)

6.1 Stoffprogramm Phase 5 ◇ M ◇

Laplace-Transformationen Beispiele Sätze über Anfangs- und Endwerte Transformation rationaler Funktionen, Regeln Methoden zur Rücktransformation Musterbeispiele Lösen von Differentialgleichungen Selbststudium: Differentialgleichungen 2. Ordnungen, Anwendungen auf Systeme

- ⊘ Laplace-Transformationen
  - Beispiele
  - Sätze über Anfangs– und Endwerte
  - Transformation rationaler Funktionen, Regeln
  - Methoden zur Rücktransformation
  - Musterbeispiele
  - Lösen von Differentialgleichungen
  - Selbststudium: Differentialgleichungen 2. Ordnungen, Anwendungen auf Systeme

Arbeiten

Selbststudium:

- ⊘ Studium Skript Mathematik II
- ⊘ Studium Skript Analysis Kapitel 9
  http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html#S1 oder Handout
- ⊘ Kapitel über Laplace-Transformationen
- ⊘ Differentialgleichungen 2. Ordnungen, Anwendungen auf Systeme

6.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 05 ◇

Laplace–Transformationen

(1) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(t) + \omega\, y(t) = \sin(t), \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1$$

(a) Berechne die Laplace–Transformierte dieser Gleichung.

(b) Löse die Gleichung im Bildbereich nach $Y(s)$ auf.

(c) Berechne durch Rücktransformation der Lösung $y(t)$.

(d) Setze $\omega = \dfrac{1}{2\,\pi}$ und erstelle damit einen Plot der Lösung.

(e) Was fällt auf an diesem Plot bezüglich Periodizität?

(2) Bestimme die Laplace–Transformierten der folgenden Funktionen:

(a)
$$f(t) = \cos(t) \text{ für } t \geq \frac{\pi}{2}, \;\; \cos(t) = 0 \text{ für } t < \frac{\pi}{2}$$

(b)
$$f(t) = e^{t \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot cos(t)$$

(c)
$$f(t) = t^3 \cdot \cos(t)$$

(d)
$$f(t) = \frac{\sin(2\,t)}{t}$$

(e)
$$f(t) = \frac{\cos(t-1)}{t}$$

(f)
$$f(t) = \int\limits_{\lambda=0}^{\lambda=t} \sin(\lambda)\cos(t-\lambda)\, d\lambda$$

(g)
$$f(t) = t - [t]$$

6.3 Link zu den Lösungen Phase 5

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_05.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_05.nb

Kapitel 7

Phase 6 (I/6)

7.1 Stoffprogramm Phase 6 ◇ M ◇

- ⊘ Laplace-Transformationen
  - Differentialgleichungen 2. Ordnung
  - Anwendungen auf Systeme
  - Anwendungen der Faltung, Prinzip von Duhamel
  - Beispiele

Arbeiten

Selbststudium:

- ⊘ Studium Skript Mathematik II http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html#S1 oder Handout
- ⊘ Kapitel über Laplace-Transformationen

7.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 06 ◇

Laplace–Transformationen und Rücktransformationen

(1) Gegeben sind die Funktionen:

(a) $f(t) = t \cdot \sin(t)$

(b) $f(t) = \frac{1}{t} \cdot \sin(t)$

(c) $f(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{\tau} \cdot \sin(\tau)\, d\tau$

Untersuche, was sich über die folgenden Grenzwerte sagen lässt:

(a) $\lim\limits_{s \downarrow 0} s \cdot F(x)$

(b) $\lim\limits_{s \to \infty} s \cdot F(x)$

(2) Bestimme die Laplace–Rücktransformierten der folgenden Funktionen:

(a) $F(s) = \frac{6\,s + 2}{2\,s^2 + 4\,s + 8} \;\Rightarrow\; f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = ?$

(b) $F(s) = \frac{2}{2\,s^2 + 4\,s + 8} \;\Rightarrow\; f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = ?$

(c) $F(s) = \frac{6\,s - 2}{2\,s^2 - 4\,s - 8} \;\Rightarrow\; f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = ?$

(d) $F(s) = \frac{6\,s - 2}{(2\,s^2 + 4\,s + 8)^2} \;\Rightarrow\; f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = ?$

(3) (a) $F(s) = \frac{3\,s + 4}{s^2 + 2\,s - 3} \;\Rightarrow\; f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = ?$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s+2} - \frac{2\,s}{s^2 + 16} + \frac{3}{s^2 + 15}\} = ?$

(c) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2 + 4\,s + 3}\} = ?$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\frac{\pi}{4} \cdot s} \cdot \frac{s}{s^2 - 4}\} = ?$

(e) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2\,s - 6}{s^2 + 4\,s - 20}\} = ?$

(f) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s\,(s^2 - \omega^2)}\} = ?$

(g) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2\,s^2 - 2\,s}\} = ?$

7.3 Link zu den Lösungen Phase 6

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_06.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_06.nb

Kapitel 8

Phase 7 (I/7)

8.1 Stoffprogramm Phase 7 ◇ M ◇

⊘ Laplace-Transformationen

- Distributionen: Dirac'sche Deltafunktion, h–Funktion, „Ableitung“ der Deltafunktion, Laplace-Transformierte
- Deltafunktion, Laplace-Transformierte
- Anwendungen
- Ausblendeeigenschaft
- Anwendungen, z.B. getaktete Dirac-Stösse

Arbeiten

Selbststudium:

⊘ Studium Skript Mathematik II http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html#S1 oder Handout

⊘ Kapitel über Laplace-Transformationen

8.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 07 ◇

Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen

(1) Löse die folgende Differentialgleichung und stelle die Lösung graphisch dar:

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = \sin(t), \;\; y(0) = 1, y'(0) = 1$$

(2) Löse das folgende System von Differentialgleichungen und stelle die Lösung graphisch dar:

$$\left| \begin{array}{lcl} y''(t) + z(t) & = & \sin(t) \\ y(t) - z'(t) & = & \cos(t) \end{array} \right|, \;\; y(0) = z(0) = 1, \;\; y'(0) = z(0) = z'(0)$$

(3) Löse die folgende Differentialgleichung mittels Faltung für die jeweiligen Koeffizienten, Inputfunktion und Randbedingungen:

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = f(t), \;\; y(t) = y_0, y'(0) = {y_0}'$$

(a) $a = 1, \;\; b = 3, \;\; c = 4, \;\; f(t) = \sin(t), \;\; y_0 = 1, \;\; {y_0}' = 1$

(b) $a = 1, \;\; b = 1, \;\; c = 1, \;\; f(t) = \cos(t), \;\; y_0 = 1, \;\; {y_0}' = 1$

(c) $a = 1, \;\; b = 1, \;\; c = 1, \;\; f(t) = e^t, \;\; y_0 = 1, \;\; {y_0}' = 1$

(d) $a = 1, \;\; b = 1, \;\; c = 1, \;\; f(t) = t, \;\; y_0 = 1, \;\; {y_0}' = 1$

8.3 Link zu den Lösungen Phase 7

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_07.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_07.nb

Kapitel 9

Phase 8 (I/8)

9.1 Stoffprogramm Phase 8 ◇ M ◇

⊘ Laplace–Transformationen

- Beispiele, Übungen
- Testbeispiele
- Nochmals Testbeispiele

Arbeiten

Selbststudium:

⊘ Studium Skript Mathematik II http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html#S1 oder Handout

⊘ Kapitel über Laplace–Transformationen

9.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 08 ◇

Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen: Deltafunktion u.s.w.

(1) Sei $\delta(x)$ die Dirac–Deltafunktion und $h(x)$ der dazugehörige Einheitssprung:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)\, dt$$

(a) $\int_{-3\pi}^{-3\pi} \delta(x)\, dx = ?$

(b) $\int_{-3\pi}^{-3\pi} \delta(x) \cdot e^{x+1}\, dx = ?$

(c) $\int_{-3\pi}^{-3\pi} \delta(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(x)\, dx = ?$

(d) Skizziere die Funktion $u(x) := h((x+1)(x-1)(x-2))$.

(e) $\int_{-3}^{5} h(x)\, dx = ?$

(f) Skizziere die Funktion $h(1 - x^2 - y^2)$.

(2) Löse die folgende Differentialgleichung und stelle die Lösung graphisch dar:

(a) $y''(t) + y'(t) + y(t) = \delta(t), \;\; y(0) = 1, y'(0) = 1$

(b) $y''(t) + y'(t) + y(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2), \;\; y(0) = 1, y'(0) = 1$

(c) $y''(t) + y'(t) + y(t) = h(t), \;\; y(0) = 1, y'(0) = 1$

(d) $y''(t) + y'(t) + y(t) = h(t) + h(t-1) + h(t-2), \;\; y(0) = 1, y'(0) = 1$

9.3 Link zu den Lösungen Phase 8

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_08.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_08.nb

Kapitel 10

Phase 9 (I/9)

10.1 Stoffprogramm Phase 9 ◇ M ◇

⊘ Laplace–Transformationen: Beispiele, Übungen

- Probleme bei der Transformation periodischer Funktionen und Stabilität (Grenzwertsatz!)
- Randwertprobleme und Eigenwertprobleme
- Weiteres Beispiel zu „Evolute und Evolvente“
- Test

Arbeiten

Selbststudium:

⊘ Studium Skript Mathematik II `http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html#S1` oder Handout

⊘ Kapitel über Laplace–Transformationen

10.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 09 ◇

Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen: Testaufgaben
Sichte unter dem nachfolgenden Link die unten genannten Testserien und löse daraus eine in den möglichen Zeitrahmen passende Auswahl. Kontrolliere die Resultate mit einem Rechner.

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/UebTests2000Diplom/BuchTestsMathII2000Dipl.pdf

(1)	4.2	III/10
(2)	4.3	III/11
(3)	3.4	III/12
(4)	3.5	III/13
(5)	3.8	III/18
(6)	3.10	III/23
(7)	3.11	III/24
(8)	3.12	III/25

10.3 Link zu den Lösungen Phase 9

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_09.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_09.nb

Kapitel 11

Phase 10 (I/10)

11.1 Stoffprogramm Phase 10 ◇ M ◇

- ⊘ Volumenproblem: Aufgabenstellung wie mündlich vorbesprochen
- ⊘ Vivianischer Körper
- ⊘ Weitere Volumenintegrale
- ⊘ Probleme aus der Statik

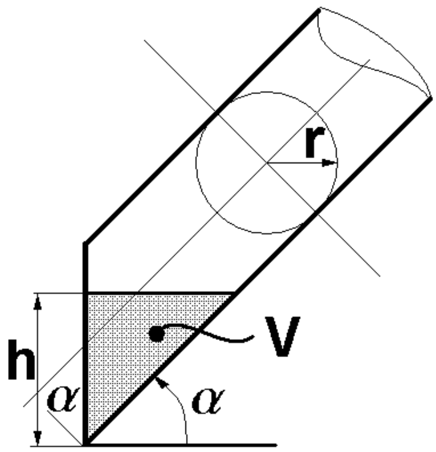
Arbeiten

- ⊘ **Selbststudium:** Handout (wird im Kurs abgegeben)
- ⊘ Übungen: Nachbereitung Test
  http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_01.pdf

11.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 10 ◇

Anwendungsaufgaben Integration und damit verbundene Gebiete

(1)



Ein rundes Rohr mit dem Radius r ist stirnseitig (links in nebenstehender Skizze) transparent durch ein Sichtglas verschlossen. Auf diesem Sichtglas soll eine Skala angebracht werden, auf welcher das jeweils im Rohr vorhandene Flüssigkeitsvolumen ablesbar ist.

Berechne das Volumen $V(h, \alpha, r)$ allgemein und erstelle Tabellen sowie die Skizzen für $r = 10\,cm$ und $\alpha = 30^o$ sowie $\alpha = 45^o$.

(2) Stelle den vivianischen Körper (Kugelradius $r = 2$) mit einem Computer als 3D–Bild dar und berechne den Inhalt. Siehe dazu auch http://de.wikipedia.org/wiki/Vincenzo_Viviani.

(3) (a) **Literaturstudium:**

Rufe den Link http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MasterIndex.html auf. Dieser Link ist auf die vom Aufruf der Übungen bekannte Art passwortgeschützt. Unter diesem Link findet sich ein weiterer Link zu Literaturangaben (Handouts). Für den Aufruf der angegebenen Seite braucht es wiederum einen Loginname. Dieser Loginname ist auf dem beim Aufruf erscheinenden Fenster angegeben. Beachte dabei die Schreibung. Das Passwort wird mündich mitgeteilt.

Unter diesem Link findet man diverse Literaturangaben zu interessanten Themen aus der Praxis. Gehe die Liste durch und studiere die Handouts zu den Themen „Schwerpunkte“, „Flächenmomente 1. und 2. Grades“(statische Momente bezüglich Achsen, Trägheitsmomente bezüglich Achsen, polares Trägheitsmoment, Zentrifugalmoment), Guldinsche Regeln, Satz von Steiner (Jakob). Informiere dich zu diesen Themen auch im Internet zur Sache. (Wikipedia):

%

Achtung: Eventuell im Browser, Kommandozeile ae durch ä ersetzen:

http://de.wikipedia.org/wiki/Traegheitsmoment
http://de.wikipedia.org/wiki/Flaechenmoment
http://de.wikipedia.org/wiki/Schwerpunkt
http://de.wikipedia.org/wiki/Guldin
http://de.wikipedia.org/wiki/Guldinsche_Regeln
http://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_Steiner
http://de.wikipedia.org/wiki/Steinerscher_Satz

(b) **Kurzprojekt:**

Berechne den Flächenschwerpunkt, dazu die statischen Momente sowie die Trägheitsmomente zu folgenden Figuren bezüglich der x–Achse sowohl als auch der y–Achse:

i. Einstieg 1: Figur F_1, eingeschlossen durch die Funktionen

$$f_1(x) = \cos(x), \;\; f_2(x) = a\,x^2 - 1,$$

wobei sich f_1 und f_2 auf der x–Achse bei $\frac{\pi}{2}$ schneiden.

ii. Einstieg 2: F_2 = Figur begrenzt durch diesleben Kurven wie F_1 jedoch nur rechts der y–Achse(zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$).

iii. Projekt 2: F_3 = eigene, selbst gewählte Figur oder Körper. Beispiel: Viereck F_3, definiert durch die Punkte $P_1(0,0)$, $P_2(7,0)$, $P_3(9,7)$, $P_4(3,11)$. (Zerschneide die Figur ($\overline{P_2P_4}$) in zwei Dreiecke und rechne mit diesen.)
Entwickle dazu ein eigenes Programm für einen eigenen Rechner zur Berechnung der oben genannten Grössen für Polygonflächen.

11.3 Link zu den Lösungen Phase 10

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_10.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_10.nb

Kapitel 12

Phase 11 (I/11)

12.1 Stoffprogramm Phase 11 ◇ M ◇

- ⊘ Test zurück
- ⊘ Schwingungsprobleme: Handouts, Literaturstudium
- ⊘ Arbeit am Computer
- ⊘ Vom Problem zum Modell und dann zur Lösung

Arbeiten

- ⊘ **Selbststudium:** Handout (wird im Kurs abgegeben)

12.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 11 ◇

Schwingungen

(1) Literaturstudium:

Rufe den Link http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MasterIndex.html auf. Dieser Link ist auf die vom Aufruf der Übungen bekannte Art passwortgeschützt. Unter diesem Link findet sich ein weiterer Link zu Literaturangaben (Handouts). Für den Aufruf der angegebenen Seite braucht es wiederum einen Loginname. Dieser Loginname ist auf dem beim Aufruf erscheinenden Fenster angegeben. Beachte dabei die Schreibung. Das Passwort wird mündlich mitgeteilt.

Unter diesem Link findet man diverse Literaturangaben zu interessanten Themen aus der Praxis. Gehe die Liste durch und studiere die Handouts zu den Themen „Schwingungen". Informiere dich zu diesen Themen auch im Internet zur Sache. (Wikipedia):

Achtung: Eventuell im Browser, Kommandozeile ae durch ä ersetzen:

http://de.wikipedia.org/wiki/Schwingung
http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Schwingung
http://de.wikipedia.org/wiki/Resonanz_(Physik)
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweid.pdf
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf

(2) Kurzprojekt:

Betrachte die Differentialgleichung mit den beigefügten Parametern:

$$m\,y''(t) + d\,y'(t) + k\,y(t) = f(t), \;\; y(0) = y_0, \;\; y\,(0) = y_0,$$

$$D = \frac{d}{2\sqrt{m \cdot k}}, \;\; a = -\frac{d}{2 \cdot m}, \;\; \omega_D = \omega \cdot \sqrt{1 - D^2}, \;\; \omega > 0.$$

(a) Interpretiere $y(t)$ sowie die Konstanten m, d, k und auch die Funktion $f(t)$.

(b) Löse die Differentialgleichung allgemein mit Hilfe der Laplace-Transformationen.

(c) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) \equiv 0, \;\; y_0 = 0, \;\; {y_0}' = b$.

(d) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) \equiv 0, \;\; y_0 = 0, \;\; {y_0}' = 1,$
$m = 1, \;\; d = \frac{1}{2}, \;\; k = 1$.

(e) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) \equiv 0, \;\; y_0 = 0, \;\; {y_0}' = 1,$
$m = 1, \;\; d = \frac{1}{2}, \;\; k = -1$. Handelt es sich immer noch um eine Schwingung?

(f) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = \delta(t),\ \ y_0 = {y_0}' = 0$. Sieht man eine Beziehung der hier gefundenen Lösung zur unter (c) gefundenen Lösung?

(g) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = \delta(t),\ \ y_0 = {y_0}' = 0,\ \ {y_0}' = 1,$ $m = 1,\ \ d = \frac{1}{2},\ \ k = 1.$

(h) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = A\ \sin(\omega\, t + \varphi)$, $y_0 = {y_0}' = 0.$

(i) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = A\ \sin(\omega\, t),\ \ y_0 = {y_0}' = 0.$

(j) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = A\ \sin(\omega\, t),\ \ y_0 = {y_0}' = 0,$ $m = 1$. Für welche Beziehung zwischen d und k wird die Lösung problematisch?

(k) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = A\ \sin(\omega\, t),\ \ y_0 = {y_0}' = 0,$ $m = 1,\ \ d = 2\sqrt{k}.$

(l) Löse die Differentialgleichung speziell im Falle $f(t) = A\ \sin(\omega\, t),\ \ y_0 = {y_0}' = 0,$ $m = 1$. Was passiert dann für $\omega^4 + (d^2 - 2\,k)\,\omega^2 + k^2 = 0$? Wie gross ist dann ω?

(m) Setze $\omega_\epsilon = \epsilon \pm \sqrt{-\frac{d^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4k}d + k}$. In welchem Falle ist $\omega_\epsilon \in \mathbb{R}$?

(n) Löse die umgeschriebene Differentialgleichung für $f(t) \equiv 0,\ \ y_0 = 1,\ \ {y_0}' = 0$ mit $m = 1,\ \ q = \frac{d}{2},\ \ \omega_0 = \sqrt{k}$. Löse die Gleichung allgemein und untersuche die Fälle $G = q^2 - \omega_0^2 < 0$ (schwache Dämpfung), $G = q^2 - \omega_0^2 = 0$ (aperiodischer Grenzfall) und $G = q^2 - \omega_0^2 > 0$ (starke Dämpfung).

(o) Skiziere im letzten Fall die Lösung für schwache Dämpfung, den periodischen Grenzfall und die starke Dämpfung. Wähle dazu die Parameter speziell.

(p) Skiziere im letzten Fall die Lösung für schwache Dämpfung, den periodischen Grenzwall und starke Dämpfung..Wähle dazu die Parameter speziell.

(q) Probiere eigene Parameterkombinationen aus. Wähle dazu auch $f(t) = A\ \sin(\omega\, t)$ und verwende q sowie ω_0. Probiere herauszufinden, unter welchen Bedingungen die Aplitude maximal wird (Resonanz). *Hinweis:* Probiere in der Umgebung von $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2q^2}\ldots$

(r) Löse die umgeschriebene Differentialgleichung für $f(t) = \sin(\omega\, t),\ \ y_0 = 1,\ \ {y_0}' = 0$ mit $m = 1,\ \ q = \frac{d}{2},\ \ \omega_0 = \sqrt{k}$. Studiere im Falle der schwachen Dämpfung (z.B. $q = 1,\ \ \omega_0 = 2$, d.h. $G = q^2 - \omega_0^2 < 0$) das Verhalten der Auslenkung (Amplitude) in Funktion von ω.

12.3 Link zu den Lösungen Phase 11

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_11.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_11.nb

Kapitel 13

Phase 12 (I/12)

13.1 Stoffprogramm Phase 12 ◇ M ◇

⊘ Schwingungsprobleme:

- Problem komplett durchrechnen inkl. max. Amplitude, Dämpfungsanteile und erzwungene Anteile
- Freie Schwingung: $y'' + \frac{1}{2}\,y' + 2\,y = 0,\;\; y_0 = 1,\;\; y_0' = 0$
- Erzwungene Schwingung: $y'' + \frac{1}{2}\,y' + 2\,y = \sin(\omega\, t),\;\; y_0 = 0,\;\; y_0' = 0$
- Maximum der Amplitude

⊘ Biegelinie

- **Selbststudium:** Abgegebener Handout
- Herleitung der Differentialgleichung in verschiedenen Fällen
- Approximierte (vereinfachte) Differentialgleichung bei schwacher Biegung mit exakter Lösung contra exakte Differentialgleichung bei starker Biegung mit numerischer Lösung
- Fälle: Eine Punktlast, gleichmäßige Streckenlast, ungleichmäßige Streckenlast, gemischte Situationen mit diversen Punkt- und Streckenlasten
- Beispiele
- Handouts

Arbeiten

⊘ **Selbststudium:** Handout im Kurs abgegeben

13.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 12 ◇

Schwingungen

(1) Literaturstudium:

Letzthin ist ein Handout zum Thema „Biegelinie“ abgegeben worden. Studiere dieses Handout. Richte dein Augenmerk auf die unter den momentanen Randbedingungen wichtigen Differentialgleichungen.
(Rufe den Link http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/express.html auf, falls du das Handout suchst. Dieser Link ist auf die vom Aufruf der Übungen bekannte Art passwortgeschützt. Unter diesem Link findet sich auf die übliche Art ein weiterer Link zu einer Seite, von der dieser Handout stammt. Loginname und Passwort sind den zugelassenen Benutzern bekannt.)

Weitere Handouts finden sich passwortgeschützt wie üblich unter „Handouts“ via den Link http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MasterIndex.html.

Informiere dich zu diesen Themen auch im Internet. (z.B. Wikipedia):

http://de.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A4gheitsmoment
http://de.wikipedia.org/wiki/Traegheitsmoment (ae durch ä ersetzen!)
http://de.wikipedia.org/wiki/Fl%C3%A4chentr%C3%A4gheitsmoment
http://de.wikipedia.org/wiki/Flaechentraegheitsmoment (ae durch ä ersetzen!)
http://de.wikipedia.org/wiki/Elastizit%C3%A4tsmodul
http://de.wikipedia.org/wiki/Elastizitaetsmodul (ae durch ä ersetzen!)
http://de.wikipedia.org/wiki/Biegung_%28Mechanik%29
http://de.wikipedia.org/wiki/Biegung_(Mechanik)

(2) Biegungssituation 1: Punktlast am Balkenende

Ermittle die Biegelinie eines einseitig eingespannten Balkens mit dem axialen Trägheitsmoment I_y, dem Elastizitätsmodul E sowie der Länge x_L und Ursprung = Einspannpunkt, Punktlast F am Balkenende senkrecht zum unbelasteten Balken. Wähle: $x_L = 5\ m,\ \ I_y = \dfrac{b\cdot h^3}{12}$ rechteckiger Querschnitt mit Breite $b = 5\ cm$, Höhe $h = 10\ cm$, $E = 210'000\ N/mm^2$ (Stahlsorte) , $F = 10^3\ kg\ m/s^2$.

(a) Erarbeitete Formel bei schwacher Durchbiegung:

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{E\cdot I},\ \ M(x) = F\cdot(x_L - x),\ \ y(0) = y'(0) = 0$$

Berechne die Biegelinie und skizziere die Situation.

%

(b) Erarbeitete Formel bei starker Durchbiegung:

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I} \cdot (1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}, \;\; M(x) = F \cdot (x_L - x), \;\; y(0) = y'(0) = 0$$

Berechne die Biegelinie (numerische Lösung der Differentialgleichung) und skizziere die Situation (Rechner resp. Programm einsetzen).

(3) Biegungssituation 2: Gleichmässige Streckenlast

Ersetze in der letzten Aufgabe die Punktlast durch eine Streckenlast gleicher Gesamtgrösse und löse die selben Probleme wie in der genannten Aufgabe.

Hinweis: Die Rechnung sollte ergeben:

$$M(x) = \int_x^{x_L} \frac{F\,(x_L - s)}{x_L}\, ds = \frac{F \cdot (x_L - x)^2}{2 \cdot x_L}$$

Berechne ebenfalls die Biegelinien (numerische Lösung der Differentialgleichungen) und skizziere die Situation (Rechner resp. Programm einsetzen).

(4) Biegungssituation 3: „Statisch unbestimmte Systeme“

Modelliere selbst eine oder mehrere Kombinationen der beiden obigen Situationen. Dabei können auch mehrere Punktlasten in diversen Abständen oder variable Streckenlasten auftreten. Berechne die Biegelinie und stelle sie graphisch dar (Rechner resp. Programm einsetzen).

13.3 Link zu den Lösungen Phase 12

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_12.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_12.nb

Kapitel 14

Phase 13 (I/13)

14.1 Stoffprogramm Phase 13 ◇ M ◇

⊘ Knickung:

⊘ Herleitung der Knickungsgleichung für Stäbe mit äußeren Längskräften mit Hilfe der Biegelinie

- Exakte Gleichung
- Approximierte Gleichung für kleine Auslenkungen
- Lösung der approximierten Gleichung, Euler-Formel
- Problem der Randwertaufgabe: Herleitung der Größe der Auslenkung?
- Lösung der exakte Gleichung (Randwertaufgabe)
- Artillerie-Methode (Shooting-Methode)

⊘ Beispiele

⊘ Handouts

⊘ Das Problem der Knickung eines sehr hohen Stabes unter Eigengewicht

Arbeiten

⊘ **Selbststudium:** Handout im Kurs abgegeben

14.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 13 ◇

Knickung

(1) Literaturstudium:

Letzthin ist unter anderem ein Handout zum Thema „Knickung“ abgegeben worden. Studiere dieses Handout. Richte dein Augenmerk auf die unter den momentanen Randbedingungen wichtigen Differentialgleichungen.
(Rufe den Link `http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/express.html` auf, falls du das Handout suchst. Dieser Link ist auf die vom Aufruf der Übungen bekannte Art passwortgeschützt. Unter diesem Link findet sich auf die übliche Art ein weiterer Link zu einer Seite, von der dieser Handout stammt. Suche dort unter „Differentialgleichungen“. Loginname und Passwort sind den zugelassenen Benutzern bekannt.)

Das Thema streifende weitere Handouts finden sich passwortgeschützt wie üblich unter „Handouts“ via den Link
`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MasterIndex.html` sowie
`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MaterialAusZweiterHand/index.html`.
Informiere dich zu diesen Themen auch im Internet (z.B. Wikipedia):

`http://de.wikipedia.org/wiki/Knicken`
`http://www.google.ch/`
`http://rowicus.ch/Wir/Links/LinkService/Knickung.html`

(2) Knickung eines nicht eingespannten druckbelasteten Stabes mit einer hypothetischen Biegelinie

(a) Löse mit $M(y) = F\,y$ die folgenden Differentialgleichungsprobleme allgemein:

$$[\ y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(E\,I_y)}\ ] \text{ und } [\ y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(E\,I_y)},\ \ y(0) = 0\ ]$$

(b) **Vorgaben:**

Balken– oder Trägerlänge $x_L = 5\ m$
Balken–, Rohrquerschnitt: Aussenradius $R = 0.01\ m$, Innenradius $r = 0.005\ m$,
axiales Flächenträgheitsmoment $I_y = \frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$ (Masse übernommen),
Esastizitätsmodul $E = 210000 * 1000^2\ N/m^2$ (Stahl),
Kraft $F = 10^6\ N$

Löse mit $M(y) = F\,y$ und obigen Vorgaben die folgenden Differentialgleichungsprobleme:

$$[\ y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(E\,I_y)}\ ] \text{ und } [\ y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(E\,I_y)},\ \ y(0) = 0\ ]$$

(c) Löse mit $M(y) = F\,y$ und obigen Vorgaben das folgenden Differentialgleichungsproblem:

$$y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(E\,I_y)},\ \ y(0) = y(x_L) = 0$$

Was stellt man fest?

(d) Löse allgemein

$$y''(x) = -k \cdot y(x)$$

Wieviele Bedingungen hat man hier, falls man das obige Randwertproblem formuliert und wieviele Parameter hat man frei? (Wie verhält es sich mit den Nullstellen der allgemeinen Lösung und den Randbedingungen?)

(e) Löse

$$y''(x) = -(\frac{\pi}{x_L})^2 \cdot y(x),\ \ y(x) = 0$$

Berechne hier $y(x_L)$. Was stellt man fest? Setze anschliessend die Lösung in die folgende Differentliagleichung ein:

$$y''(x) = -\frac{M(y(x))}{(EI_y)},\ \ y(0) = 0$$

Vergleiche darauf $\dfrac{F}{(EI_y)}$ mit $(\dfrac{\pi}{x_L})^2$. Welche Bedingung für F erhält man?

(f) Hat man nun die gesuchte Lösung der vereinfachten Knickgleichung gefunden oder ist noch ein Parameter frei, welcher sich aufgrund der bis jetzt bekannten Resultaten nicht berechnen lässt?

(3) (a) Da wir mit obiger Methode nicht weiterkommen, behandeln wir die folgende exakt formulierte Differentialgleichung für die Knickung des nicht eingespannten Stabes (Randwertproblem) mit Hilfe der Shooting–Methode:

$$y''(x) + \frac{F}{(E\,I_y)}\,y(x)\,(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}} = 0,\ \ y(x) = 0,\ \ y(x_L) = 0$$

Dazu übernehmen wir obige Wertsetzungen für die Parameter. Nur den Wert für x_L lassen wir vorerst nicht in die Gleichung einfliessen. Zudem verwandeln wir das Randwertproblem in das Anfangswertproblem:

$$y''(x) + \frac{F}{(E\,I_y)}\,y(x)\,(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}} = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = a$$

Dieses Anfangswertproblem kann man mit numerischen Methoden approximativ lösen. Die Genauigkeit der Lösung hängt dann vom betriebenen Aufwand ab. Löse das Problem numerisch! Wähle zuerst $a = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 1.0,\ 1.1$.
Versuche anschliessend a besser zu richten: $a = 1.000,\ 1.001,\ 1.002,\ \ldots, 1.057\ldots$. Wo befindet sich der beste Wert für a? Skizziere die numerische Lösung! Nenne Schranken für die Ungenauigkeit des so abschätzbaren Wertes für x_L! (Wie genau wird der vorgegebene Wert für x_L erreicht?)

(4) Knickung eines an einem Ende fest eingespannten, am anderen Ende frei geführten Stabes

Das Moment ergibt sich hier zu $M(y(x), x) = F\, y(x) - F_Q\, x$ mit den Randbedingungen $y(0) = y'(0) = y(x_L)$.

$$y''(x) = -\frac{M(y(x), x)}{(E\, I_y)}$$

Damit die drei Randbedingungen erfüllbar werden, leiten wir die Differentialgleichung beidseitig zweimal ab. ($\rightsquigarrow$ Problem der Ordnung 4. Damit sind 4 Bedingungen möglich!)

Formuliere das Ranswertproblem und verfahre bei der Lösungssuche wie oben bei Problem Nummer 2. Fasse die Resultate zusammen und erläutere, wie man bei der Lösung hier weiterfahren könnte.

14.3 Link zu den Lösungen Phase 13

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_13.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_13.nb

Kapitel 15

Phase 14 (I/14)

15.1 Stoffprogramm Phase 14 ◇ M ◇

Selbststudium: Handouts (im Kurs abgegeben) Unerledigte Teile des obigen Stoffs Vorbereitung Partiellen Differentialgleichungen: Wärmeleitungsgleichung ut'(x,t) =c uxx"(x,t) nach selbst beschaffter Literatur

- ⊘ Bewegung mit nichtlinearem Kraftgesetz
  - Modellierung der Spannung in einer drehenden Scheibe, Differentialgleichungssystem (siehe auch Handout Link Stufe D Nr. 10)
  - Das Problem des Fallschirmspringers (Handout Link unter „Gewöhnliche Differentialgleichungen“)
  - Weitere Probleme nach den unten gegebenen Übungen
- ⊘ **Selbststudium:**
  - Handouts (im Kurs abgegeben)
  - Unerledigte Teile des obigen Stoffs
  - Vorbereitung Partiellen Differentialgleichungen: Wärmeleitungsgleichung $u'_t(x,t) = c\,u''_{xx}(x,t)$ nach selbst beschaffter Literatur

Arbeiten

- ⊘ **Selbststudium:** Handout im Kurs abgegeben
- ⊘ Unerledigte Teile des obigen Stoffs
- ⊘ Vorbereitung Partiellen Differentialgleichungen: Wärmeleitungsgleichung $u'_t(x,t) = c\,u''_{xx}(x,t)$ nach selbst beschaffter Literatur

15.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 14 ◇

Knickung

(1) Folgendes Differentialgleichungssystem beschreibt die Spannungen in einer drehenden Scheibe (vgl. auch unter Handouts, Modellierung der Spannung in einer drehenden Scheibe Stufe D Nr. 10, Link).
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/AnwendMaterial/Handouts.htm
(passwortgeschützt)

$$\left| \begin{array}{lcl} x^2\,\rho\,\omega^2 + y(x) - z(x) + x\,y'(x) & = & 0 \\ -(1+\nu)\,y(x) + (1+\nu)\,z(x) + x\,(z'(x) - \nu\,y'(x)) & = & 0 \end{array} \right|$$

Dabei ist bei der Scheibe $x \in [r,\ R]$. Weiter gilt $y(x) = \sigma_x(x),\ \ z(x) = \sigma_\varphi(x)$.

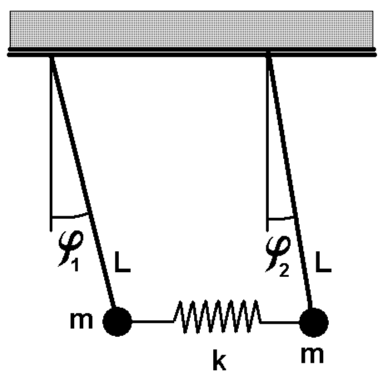
(a) Löse das Gleichungssystem unter der Annahme, dass gilt: $\nu = 0.3,\ \ r = 5,$ $R = 10,\ \ \rho = 1.$
Weiter sollen die Radialspannungen an den Rändern ($x = r,\ \ x = R$) gleich 0 werden.

(b) Stelle die Lösungen graphisch dar.

(c) Wo ist die Radialspannung maximal?

(d) Wo ist die Tangentialspannung maximal?

(2) Wir betrachten das nebenan gezeigte gekoppelte Pendel. Zwei durch eine Feder mit der Federkonstanten k verbundene Massen m sind an gleich langen Stangen aufgehängt, welche wir als gewichtslos annehmen. $\varphi_1,\ \varphi_2$ sind die Auschlagswinkel. Diese nehmen wir als klein an, sodass $L * \sin(\varphi(t))$ den Ausschlag y(t) approximiert und die Höhenänderung $h = L * \cos(\varphi(t))$ einer Masse etwa konstant ist. Nun stellen wir durch Betrachtung der durch die Massen verursachten Drehmomente eine Gleichungen auf:



Gekoppelte Pendel

Rücktreibende Kraft infolge Auslenkung $= -m\,g\,\sin(\varphi_2) \approx -m\,g\,\varphi_2$.
Rücktreibendes Moment infolge Auslenkung $= -L\,m\,g\,\sin(\varphi_2) \approx -L\,m\,g\,\varphi_2$.
Federkraft $= k\,L\,\sin(\varphi_2) \approx k\,L\,\varphi_2$.
Entgegengesetzt wirkendes Moment der Feder $\approx -L\,k\,L\,\varphi_2 = -k\,L^2\,\varphi 2$.
Kompensation dieses Moments durch das andere Pendel: $k\,L^2\,\varphi_1$.
Gleichgewicht mit „Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung“ $= (m\,L^2)\,\varphi_2{}''$.

Gleichung für das zweite Pendel: $(m\,L^2)\,{\varphi_2}'' = -L\,m\,g\,\varphi_2 - k\,L^2\,\varphi_2 + k\,L^2\,\varphi_1$.

Gleichung für das erste Pendel: $(m\,L^2)\,{\varphi_1}'' = -L\,m\,g\,\varphi_1 - k\,L^2\,\varphi_1 + k\,L^2\,\varphi_2$.

Anfangsbedingungen: $\varphi_1(0) = a,\;\; {\varphi_1}'(0) = 0,\;\; \varphi_2(0) = {\varphi_2}'(0) = 0$

$$\begin{array}{l}
{\varphi_2}''(t) + \dfrac{g}{L}\,\varphi_2(t) + \dfrac{k}{m}\,\varphi_2(t) - \dfrac{k}{m}\,\varphi_1(t) = 0,\\
{\varphi_1}''(t) + \dfrac{g}{L}\,\varphi_1(t) + \dfrac{k}{m}\,\varphi_1(t) - \dfrac{k}{m}\,\varphi_2(t) = 0,\\
\varphi_1(0) = a,\;\; {\varphi_1}'(0) = 0,\;\; \varphi_2(0) = 0,\;\; {\varphi_2}'(0) = 0
\end{array}$$

Löse das Differentialgleichungssystem und stelle die Lösungen graphisch dar.

(3) Ein Kleinprojekt:

Eine Masse m von 1000 N befindet sich oben auf einem parabelförmigen vereisten Hügel mit der Gleichung $y(x) = -0.001x^2$ (Masszahlen in Metern) und $y_{min} = -1000$. Die Masse m besitzt eine Initialgeschwindigleit von v_0. Der Reibungskoeffizient des vorhandenen Materials auf Eis beträgt 0.05. Nach einer bei x_0 sofort eingeleiteten Bremsung steigt der Reibungskoeffizient sprunghaft auf 0.8.

(a) Bei welchem v_0 ist bei gegebenem x_0 die letzte Möglichkeit zur Bremmsung vorhaden, damit m noch vor y_{min} zum Stillstand kommen kann? (Probiere mit x_0 = Nullstelle von $y(x) = -1000$ und verallgemeinere das Resultat falls möglich.) Stelle $v_0(x_0)$ graphisch dar.

(b) Bei welchem x_0 ist bei gegebenem v_0 die letzte Möglichkeit zur Bremmsung vorhaden, damit m noch vor y_{min} zum Stillstand kommen kann? (Probiere mit $v_0 = 0.1\,m/s$ und verallgemeinere das Resultat falls möglich.) Stelle $x_0(v_0)$ graphisch dar.

(c) Wandle die Aufgabe selbständig ab und ziehe daraus Rückschlüsse auf die Problemanik beim Skifahren bzw. beim Hochgebirgssport oder bei Fahrzeugen auf Strassen in vereisten Situationen. (Anwendungen ergeben sich auch bei Transportsystemen in Industrieanlagen.)
Hinweis: Man könnte zusätzlich noch den Luftwiderstand einbauen. Dabei wird die Tangentialbeschleunigung um den Term $\dfrac{c}{m}\,v(t)^2$ vermindert bei
$$c = \frac{c_w\,\rho\,A}{2},\;\; c_w = 1.00,,\;\; \rho = \rho_{Luft} = 1.2\,kg/m^3,\;\; A = \text{Stirnfläche von } m.$$

(4) Selbststudium: Studiere das Thema der Wärmeleitung in Stäben. Suche dazu selbständig Literatur. (*Hinweis:* Anhang zum Skript Mathematik II.)

15.3 Link zu den Lösungen Phase 14

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_14.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_14.nb

Kapitel 16

Phase 15 (I/15)

16.1 Stoffprogramm Phase 15 $\diamond$ M $\diamond$

⊘ Partiellen Differentialgleichungen, Wärmeleitung und andere

- Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen
- Das Beispiel der Wärmeleitgleichung
- Beispiellösungen der Wärmeleitgleichung bei verschiedenen Rand– und Anfangsbedingungen
- Ausblick
- Beispiele

Arbeiten

⊘ **Selbststudium:** Skript Mathematik II, Anhang zu partiellen Differentialgleichungen

16.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 15 ◇

Partielle Differentialgleichungen, Wäremeleitgleichung

(1) Wäremeleitgleichung I: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 10$ mit den homogenen Randbedingungen und den Anfangsbedingungen:
RBD: $u(0,t) = 0 = u(10,t)$ für $t \geq 0$
ABD: $u(x,0) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{10}\right) - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)$ für $0 \leq x \leq 10$.

(a) Löse die Wäremeleitgleichung! Dabei genügt ein numerisches Näherungsresultat bis und mit den 10 ersten Gliedern der zu erwartenden Summe.
(b) Stelle die Lösung in Graphen dar für $t = 0, \dfrac{1}{16}, \dfrac{2}{16}, \dfrac{3}{16}, \ldots, \dfrac{1}{2}$.

(2) Wäremeleitgleichung II: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 10$ mit den Rand– und Anfangsbedingungen:
RBD: $u(0,t) = 1,\ \ u(10,t) = 3$ für $t \geq 0$
ABD: $u(x,0) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{10}\right) - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}\right) + \dfrac{3-1}{10}\,x + 1$ für $0 \leq x \leq 10$.

(a) Löse die Wäremeleitgleichung! Dabei genügt ein numerisches Näherungsresultat bis und mit den 10 ersten Gliedern der zu erwartenden Summe.
(b) Stelle die Lösung in Graphen dar für $t = 0, \dfrac{1}{16}, \dfrac{2}{16}, \dfrac{3}{16}, \ldots, \dfrac{1}{2}$.

(3) Fallschirmsprung:

Ein Fallschirmspringer steigt aus einem Flugzeug auf $2000\,m$ über Grund aus und bewegt sich 10 Sekunden im freien Fall, beschleunigt durch die Schwerrkaft. Dann reisst er an der Leine, wobei sich der Schirm öffnet. Drauf schwebt er mit einer verminderten Sinkgeschwindigkeit zu Boden. Beim Sinken wirkt die Bescnleunigung $a = g - \dfrac{c}{m}\,v^2(t)$, $c = \dfrac{c_w\,\rho\,A}{2}$. g ist die Erdbeschleunigung, m die Masse des Springers, A die Stirnfläche und c_w der Wiederstandsbeiwert. Berechne die Endgeschwindigkeit v_B beim Aufprall (Näherungswert). Finde auch heraus, wie die Endgeschwindigkeit von der Masse des Springers abhängt.

Folgende Werte sind gegeben:

$g = 9.81\,m\,s^{-2},\ \ v(0) = 0\,m\,s^{-1},\ \ m = 80\,kg,\ \ t_1 = 10\,s,\ \ \rho = 1.2\,kg\,m^{-3}$.
Vor $t_1 = 10\,s:\ A = 0.8\,m^2,\ \ c_w = 1.00.$ Nach $t_1 = 10\,s:\ A = 25\,m^2,\ \ c_w = 1.33.$

Hinweis: Berechne eine hypothetische Geschwindigkeit v_u zur Zeit $t_u = \infty$ unter der hilfsweise verwendeten Annahme, dass eine Zeit unendlich sein kann und sich Parameter wie g u.s.w. bei Fall nicht ändern. v_u kann bei der Lösung des Problems hilfreich sein.

(4) Ein Kleinprojekt:

(a) Wie hoch kann man eine Säule bauen, bis sie durch ihr Eigengewicht einknickt? Wähle für eine erste Studie das Material Baustahl (homogen!), Durchmesser $10\,cm$, Kreisquerschnitt.

(b) Studiere die Abhängigkeit vom Material und die Abhängigkeit vom Querschnitt.

(c) Vergleich: Wie lang muss ein vertikal aufgehängtes Stahlseil mit dem Druchmesser $1\,cm$ sein, damit des durch sein Eigengewicht reisst?

(d) Wie hängt hier die Länge vom Querschnitt ab? Und wie vom Material?

(5) Selbststudium: Studiere das Thema der partiellen Differentialgleichungen, Anhang zum Skript Mathematik II.)

16.3 Link zu den Lösungen Phase 15

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_15.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_15.nb

Kapitel 17

Phase 16 (I/16)

17.1 Stoffprogramm Phase 16 ◇ M ◇

- ⊘ Reserve
- ⊘ Repetition
- ⊘ Ausblick

Arbeiten

- ⊘ **Selbststudium:** Generalrepetition
- ⊘ **Selbststudium:** Generalrepetition

17.2 Übungen in Analysis 3 ◇ M2 16 ◇

Partielle Differentialgleichungen, Wäremeleitgleichung

(1) Generalrepetition nach mündlicher sowie spezieller Anleitung.

(2) Löse die letzte(n) Modulprüfungsserie(n) /VD mit passendem Stoff, siehe

`http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html`.

17.3 Link zu den Lösungen Phase 16

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_16.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna1_16.nb

Kapitel 18

Tests Analysis Semester 1

18.1 Test ◇ M2–07/08–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Laplace-Transformationen

(1) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$4\,y''(t) - y(t) = t$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$.

(a) Berechne die Laplace–Transformierte Gleichung.

(b) Berechne daraus die Transformierte $Y(s)$ von $y(t)$ sowie die Partialbruchzerlegung von $Y(s)$.

(c) Berechne anschliessend durch Rücktransformatien die Lösung.

(d) Skizziere die Lösung zwischen $t = 0$ und $t = 5$.

(2) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'''(t) - y(t) = \delta(t)$$

mit den Randbedingungen $y(0) = y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 1$.

(a) Berechne die Partialbruchzerlegung von $Y(s)$.

(b) Berechne anschliessend durch Rücktransformatien die Lösung.

(c) Skizziere die Lösung zwischen $t = 0$ und $t = 6$.

(3) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(t) - y(t) = f(t)$$

mit der Anfangswertbedingung $y(0) = 1$. Dabei ist $f(t) = \sin(t)$ auf dem Intervall zwischen 0 und $T = \dfrac{\pi}{2}$. Weiter ist $f(t)$ periodisch mit der Periode T.

(a) Berechne die Laplace–Transformierte von $f(t)$.

(b) Berechne damit die Transformierte $Y(s)$ von $y(t)$ sowie die Partialbruchzerlegung von $Y(s)$.

(c) Die Berechnung der Lösung durch Rücktransformation von Hand oder durch ein nicht sehr ausdifferenziertes Computeralgebraprogramm wird vermutlich zeitlich mit sehr grossen Aufwand verbunden sein. Dennoch kann man anhand eines bekannten mathematischen Satzes entscheiden, ob sich das System stabil verhält, d.h. wie $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ sich verhält. Berechne diesen Limes!

(4) Gegeben ist das System

$$y'(t) + z'(t) = 0,\;\; y(t) + 2z(t) - 2y'(t) - z'(t) = u(t),\;\; u(t) = h(t) - h(t-1).$$

Dabei ist $h(t)$ der bekannte Einheitssprung. Anfangswertbedingungen: $y(0) = 0,\;\; z(0) = 0.$

(a) Berechne die Lösung rechts von 0 mit Hilfe von Laplace-Transformationen.

(b) Skizziere die Lösungen.

(5) Gegeben ist die Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$. Berechne den zu $t = 0$ gehörenden Punkt der Evolute.

Viel Glück!

WIR1

18.2 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_01_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_01_Loes.nb

18.3 Test ◇ M2–09/10–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Laplace-Transformationen, Differentialgleichungen, Statistik, Kombinatorik

(1) Abgabe des vorgängig behandelten Problems mit der Evolvente und der Evolute:

(a) Output mit Namen, Datum und Klasse beschriftet.

(b) Elektronisch per Mail mit Namen und Klasse im Filename erkennbar. (Achtung: Wenn möglich nur Source Code übermitteln, sofern ein Programm benutzt worden ist, auf das im Schulnetzwerk ein uneingeschränkter Zugriff existiert.)

(2) Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = f(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0$.

(a) Berechne die Laplace–Transformierte Gleichung. (Die Transformierte von $y(t)$ heisst $Y(s)$, diejenige von $f(t)$ heisst $F(s)$.)

(b) Berechne daraus die Transformierte $Y(s)$ von $y(t): \ Y(s) = \ldots ? \ldots$
Benutze dabei die Abkürzung $k := \sqrt{a^2 - 4\,b}$ und vereinfacht das Resultat, so dass dieses kurz ist und schnell lesbar wird.

(c) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 1,\ b = 1,\ f(t) \equiv 0,\ y_0 = 1,\ y'_0 = 0.$

(d) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 1,\ b = 1,\ f(t) \equiv 0,\ y_0 = 0,\ y'_0 = 1.$

(e) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 1,\ b = 1,\ f(t) \equiv 0,\ y_0 = 1,\ y'_0 = 1.$

(f) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = -1,\ b = 1,\ f(t) \equiv 0,\ y_0 = 0,\ y'_0 = 1.$

(g) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = -2,\ b = 1,\ f(t) \equiv 0,\ y_0 = 0,\ y'_0 = 1.$

(h) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = -3,\ b = 1,\ f(t) \equiv 0,\ y_0 = 0,\ y'_0 = 1.$

(i) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 0,\ b = -1,\ f(t) = \delta(t),\ y_0 = 0,\ y'_0 = 0.$

(j) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 0,\ b = 1,\ f(t) = \delta(t),\ y_0 = 0,\ y'_0 = 0.$

(3) Gegeben ist eine Kugel mit Mittelpunkt $M = O$ in einem kartesischen Koordinatensystem mit einem Radius $r = 10$. Durch diese Kugel wird ein Loch gebohrt mit einem Bohrer vom Durchmesser $d = 4$. Der senkrechte Abstand der Bohrerachse zu M beträgt 3. Berechne das Restvolumen der Kugel nach der Ausbohrung. (3 Stellen hinter dem Dezimalpunkt.)

(4) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'''(t) - 3\,y''(t) + 3\,y'(t) - y(t) = f(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\ y''(0) = y_0''$.

(a) Berechne mit Hilfe der Laplace–Transformationen die Lösung für:
$f(t) = \delta(t),\ y_0 = y_0' = y_0'' = 0.$

(b) Ermittle ebenso Lösung für:
$f(t) = e^{-t},\ y_0 = y_0' = y_0'' = 0.$

(c) Ermittle ebenso Lösung für:
$f(t) = e^{-t},\ y_0 = 1,\ y_0' = y_0'' = 0.$

(5) Eine Firma, welche seit 10 Jahren Gusspfannen für eine Warenhauskette herstellt, lässt beim Marktforschungsunternehmen Alpha eine Studie über die Verkaufsentwicklung und den Langzeiteinsatz der Geräte bei zufällig ermittelten Käufern an zwei Warenhausstandorten erarbeiten. Alpha liefert nach einiger Zeit zwei Datensätze mit der Angabe, dass jeder Satz zu einem Warenhausstandort gehöre. Der Chef der auftragserteilenden Firma zeigt sich darauf gegenüber einem Angestellten sichtlich erbost über Alpha. Der Angestellte wird beauftragt, die Datensätze zu studieren und danach dem Direktionskollegium zu präsentieren. Er hat seine Arbeit in folgende Teilaufgaben gegliedert, welche hier nachvollzogen werden sollen:

$$M_1 = \{8, 6, 0, 7, 1, 1, 2, 4, 3, 5, 2, 8, 4, 3, 0, 8, 2, 6, 8, 9, 9, 8, 0, 2, 6, 8, 2, 6, 0, 4, 6, 1, 8, 7, 0, 3, 2, 9, 5, 4, 4, 9, 4, 7, 9, 0, 2, 8, 5, 0\}$$

$$M_2 = \{1, 5, 7, 3, 9, 9, 3, 9, 6, 1, 7, 9, 1, 4, 8, 8, 2, 0, 5, 9, 7, 2, 3, 8, 3, 3, 4, 6, 2, 6, 4, 8, 3, 2, 3, 9, 7, 9, 8, 5, 3, 5, 6, 2, 9, 5, 1, 4, 1, 3\}$$

(a) Erstelle für M_1 und M_2 je eine Strichliste.

(b) Erstelle für M_1 und M_2 je ein Histogramm mit 10 Klassen.

(c) Berechne für M_1 und M_2 je den Stichprobenumfang, den Mittelwert und die Standardabweichung.

(d) Vergleiche die Datenmenge M_1 mit der Datenmenge M_2 mittels BoxWhiskers–Plots (Gegenüberstellung der Plots).

(e) Beschreibe, was die Datensätze überaus verdächtig machen könnte. Lege dar, wieso die Daten allenfalls zurückgewiesen werden.

(6) (a) Auf wieviele mögliche Arten kann man 14 Gerichte auf die 14 Ferientage verteilen?

(b) Auf wieviele mögliche Arten kann man 50 Arbeitsgänge auf die 7 Mitarbeiter möglichst so verteilen, dass höchstens einmal einer einen Arbeitsgang mehr als die anderen erledigen muss?

WIR1

Viel Glück!

18.4 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

18.5 Test ◇ M2–10/11–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.** **Viel Glück!**

Laplace-Transformationen, Differentialgleichungen, Statistik, Kombinatorik

(1) Abgabe des vorgängig behandelten Problems mit einer Modellierung eines oder mehrerer Körper und / oder mit der Evolvente und der Evolute:

(a) Output mit Namen, Datum und Klasse beschriftet.

(b) Zudem nach der Prüfung elektronisch per Mail mit Namen und Klasse im Filename erkennbar. (Achtung: Wenn möglich nur Source Code übermitteln, sofern ein Programm benutzt worden ist, auf das im Schulnetzwerk ein uneingeschränkter Zugriff existiert.)

(2) $$f(t) = \sin(3\,t+\pi) + \cos(3\,t) + t\cdot e^{-3\,t},\;\; f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$$

(a) Zeige die Berechnung der Laplace-Transformierten $F(s)$ mit Hilfe von Tabellen (Resultat in natürlicher Form mit drei Summanden, so weit wie möglich vereinfacht).

(b) Berechne $F(3)$ (einfachstes Endresultat).

(c) Was ergibt sich bei der Berechnung von $F(-3)$? (Kommentar?)

(3) Berechne die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t)$. Dabei ist $f(t)$ intervallweise wie folgt definiert:

$$f(t) := t \text{ für } t \in (-\infty,\, 1),\;\; f(t) := 1 \text{ für } t \in [1,\, \frac{\pi}{2}),\;\; f(t) := \sin(t) \text{ für } t \in [\frac{\pi}{2},\, \infty)$$

Das Resultat ist in Form einer Partialbruchentwicklung zu geben, wobei eine etwa auftretende Funktion e^{-s} als $\rho(s)$ zu schreiben ist.

(4) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem mit den Anf'bed. $x(0) = 0,\;\; y(0) = 1$:

$$\begin{array}{rcl} x'(t) - 2\,y(t) & = & \delta(t) \\ x(t) + y'(t) & = & -\sin(t) \end{array}$$

(a) Berechne das transformierte Gleichungssystem.

(b) Berechne die Transformierten $X(s)$ und $Y(s)$ in einfacher Darstellung (Partialbruchzerlegung!).

(c) Berechne, falls möglich, die Rücktransformierten $x(t)$ und $y(t)$.

(5) Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 1$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0,\;\; {y_0}' = 1$.

(a) Berechne die Laplace–Transformierte $Y(s)$ in Partialbruchdarstellung.

(b) Berechne daraus die Rücktransformierte $y(t)$ in ausmultiplizierter Form.

(c) Erstelle eine saubere Skizze von $y(t)$ für $t \in [0,\, 7]$.

(d) Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

(6) Gegeben sind zwei Datensätze M_1 und M_2. Dabei handelt es sich um die Durchmesser von je einer Stichprobe aus zwei Sendungen mit Bolzen, gemessen in Milimetern:

$$M_1 = \{6.36,\, 6.56,\, 6.42,\, 6.27,\, 6.36,\, 6.47,\, 6.29,\, 6.54,\, 6.3,\, 6.55,\, 6.46,\, 6.49,\, 6.38,\, 6.4,\, 6.35,\, 6.41,\, 6.56,\, 6.25,\, 6.34\}$$
$$M_2 = \{6.55,\, 6.48,\, 6.51,\, 6.51,\, 6.43,\, 6.51,\, 6.35,\, 6.46,\, 6.31,\, 6.31,\, 6.58,\, 6.51,\, 6.54,\, 6.35,\, 6.39,\, 6.59,\, 6.4,\, 6.5,\, 6.57\}$$

(a) Berechne für jede Stichprobe die folgenden statistische Kenngrössen: Die Lagemasse Minimum, Maximum, arithmetisches Mittel und den Median.

(b) Berechne für jede Stichprobe die Streumasse Standardabweichung und Quartilsdifferenz.

(c) Entscheide, ob es in der Stichprobe „schwache Ausreisser“ gibt, welche um mehr als 2 mal die Standardabweichung vom Mittelwert entfernt liegen.

(d) Zeichne für die Stichproben nebeneinander die beiden Box– and Whisker–Plots und beurteile damit, ob die Exemplare in den beiden Sendungen von demselben Lieferanten in Ostasien stammen können.

(7) Du bist Abteilungsleiter in einer Firma mit 14 Mitarbeitern in deiner Abteilung. Deine Leute arbeiten an Maschinen, welche alle in einer Reihe in einer langen Halle stehen.

(a) Auf wieviele Arten kannst du zur Lärmverminderung die Halle der Breite nach in drei Räume aufteilen, indem man exakt zwei Zwischenwände einbaut?

(b) Auf wieviele Arten kannst du die Mitarbeiter in 3 Gruppen so einteilen, dass zwei Gruppen zu 5 und eine Gruppe zu 4 Mitarbeitern entstehen?

(c) Auf wieviele Arten kannst du die Gruppen bilden und darin noch je einen Gruppenchef wählen?

(8) Du warst geschäftlich auf einer Insel, von welcher bekannt geworden ist, dass dort eine gewisse Mücke aufgetaucht sei, die eine schwere Krankheit überträgt. Auch ist es Tatsache, dass von 10 beliebig oft gestochenen Menschen im Mittel einer infiziert wird. Die Krankheit hat eine Inkubationszeit von 3 Monaten, bis sie ausbricht. Momentan steht aber ein Test zur Verfügung, welcher jedoch nur in 70 % der Fälle das richtige Resultat liefert. Falls du nicht infiziert bist und du dich fäschlicherweise behandeln lässt, sind die Nebenwirkungen etwa halb so schwerwiegend wie im Fall, dass dich die Krankheit trifft. Stelle die vorhandenen Wahrscheinlichkeiten einander gegenüber. Fälle damit ein Urteil darüber, ob es vorteilhaft für dich ist, den Test zu machen mit der davon abhängigen Behandlung.

WIR1

18.6 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Modulprüfung
2008
Klasse Mp 06 / M2p
Mathematik 1, 2. Jahr, Analysis 3

Zeit: 120 Minuten (dazu getrennt 60 Minuten Statistik)

WIR1-2008/ 10 /Burgdorf/ M42
Fr 1.2.08/09:00-11:00 /11:15-12:15

Bedingungen:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Punkten möglich.
- ⊘ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als die bezeichnete Anzahl n Aufgaben gegeben sind, können n Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf Freitag, 1. Februar 2008

18.7 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Analysis 3 Mp 06 / Mp 2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Hinweis: Nach den bisherigen Erfahrungen war in 120 Minuten ein erreichbares Maximum von ca. 50 Punkten möglich. Wähle daher deine Aufgaben mit grossem Bedacht aus.

(1) **(12 Punkte)**

$$\text{Sei} \qquad \vec{v}(r,u,t) = \begin{pmatrix} x(r,u,t) \\ y(r,u,t) \\ z(r,u,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r\,\cos(u)+5)\,\sin(t) \\ (r\,\cos(u)+5)\,\cos(t) \\ r\,\sin(u) \end{pmatrix},$$

$$u \in [0,\ 2\,\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],\ \ r \in [0,\ 1].$$

(a) Skizziere den durch $\vec{v}$ und $u \in [0,\ 2\,\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],\ \ r = 1$ parametrisierten Körper.

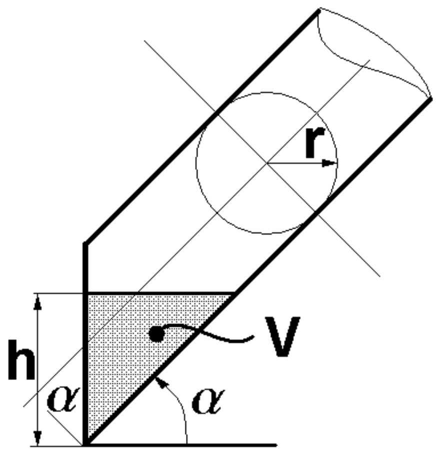
(b) Berechne die Jacobi–Determinante (Funktionaldeterminante)

$$\det(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,u,t)}) = \det(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}).$$

(c) Bekanntlich gilt $dV = \left|\det(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,u,t)})\right| \, dr\,du\,dt$. Berechne damit das Volumen des Körpers $|V_r| = |V_1| = \int\limits_{V_1} dV,\ \ u \in [0,\ 2\,\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],\ \ r \in [0,\ 1]$.

(d) Berechne damit das Volumen des Körpers $|V_2| = \int\limits_{V_2} dV,\ \ u \in [0,\ 2\,\pi],\ \ t \in [0,\ \pi]$, $r \in [0,\ 2]$. Wie gross ist damit der Faktor k in der Gleichung $|V_2| = k \cdot |V_1|$?

(2) **(6 Punkte)**



Ein rundes Rohr mit dem Radius r ist stirnseitig (links in nebenstehender Skizze) transparent durch ein Sichtglas verschlossen. Auf diesem Sichtglas soll eine Skala angebracht werden, auf welcher das jeweils im Rohr vorhandene Flüssigkeitsvolumen ablesbar ist.

(a) Berechne das Volumen $V(h, \alpha, r)$ allgemein.

(b) Berechne das Volumen $V(h, \alpha, r)$ für $r = 5\,cm$ und $\alpha = 40^o$ sowie $h = 8\,cm$.

(3) **(24 Punkte)**

Berechne die Laplace–Transformierten resp. die Rücktransformierten der nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \cosh(t) + \sinh(2\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = ?$

(b) $f(t) = e^t - 2\,e^t \sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = ?$

(c) $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = ?$

(d) $f(t) = \delta(t) + 1 + t + t^2 + t^3 \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = ?$

(e) $Y(s) = \dfrac{s}{s^2-1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = ?$

(f) $Y(s) = \dfrac{10s}{4\,s^2-4} + \dfrac{5}{s^2+s+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = ?$

(g) $Y(s) = \dfrac{4\,s}{8\,s^3+8} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = ?$

(h) $Y(s) = \dfrac{3}{s^4+s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = ?$

(4) **(12 Punkte)**

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$4\,y''(t) - 2\,y'(t) + y(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2), \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1$$

(a) Berechne die Laplace–Transformierte der Gleichung.

(b) Berechne die Lösung $y_0(t)$ durch Rücktransformation. Bezeichne dabei z.B. den Einheitssprung an der Stelle 2 mit $u(t-2)$.

(c) Skizziere die Lösung für $t \in [0,\ 3\,\pi]$.

(d) Skizziere die Lösung für $t \in [0,\ 12\,\pi]$.

(5) **(18 Punkte)**

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} {y_2}''(t) + a\,y_2(t) - b\,y_2(t) + b\,y_1(t) &= 0 \\ {y_1}''(t) + a\,y_1(t) - b\,y_1(t) + b\,y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System stellt bekanntlich ein Modell von zwei gekoppelten Pendeln dar.
Nimm als Anfangswerte: $y_1(0) = 1,\;\; {y_1}'(0) = 0,\;\; y_2(0) = 0,\;\; {y_2}'(0) = 0$

(a) Berechne die Laplace–Transformierte der Gleichungen.

(b) Löse das entstehende Gleichungssystem auf der Bildseite.

(c) Berechne die Rücktransformierten Funktionen.

(d) Skizziere die Funktionen für $a = 10$ und $b = 1$.

(e) Untersuche den Einfluss von a und b: Skizziere die Funktionen für $a = 5$ und $b = 1$. Was stellt man fest?

(f) Skizziere die Funktionen für $a = 5$ und $b = 2$. Was stellt man fest?

(6) **(9 Punkte)**

(a) Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{3}\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{1}{7}\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

i. Finde eine nicht konstante Lösung der Gleichung (mit Parameter).

ii. Finde eine Lösung mit der Anfangsbedingung $f(0,y) = e^{7\,y} + 1$.

(b) Gegeben ist die Kurve $y(x) = a\,\cosh(\dfrac{x}{a})$. Berechne die Krümmung für $x = 0$ und interpretiere den Parameter a.

— ENDE —

18.8 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VD2008Anal3_Math1_S1_M2_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VD2008Anal3_Math1_S1_M2_Loes.nb

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, 05. Februar 2010

18.9 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp08 / Mp2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

(1) **(9 Punkte)**

Bohrkern und Volumen:

Ein zylindrischer Bolzen mit dem Radius $r = 20$ wird exakt senkrecht und zentrisch zu seiner Achse mit einem Bohrer durchbohrt, dessen Radius ebenfalls $r = 20$ ist.

(a) Skizziere ausgebohrte Volumen. (3 Punkte)

(b) Wie gross ist das ausgebohrte Volumen? (6 Punkte)

(2) **(30 Punkte)**

Laplace–Transformationen und Rücktransformationen:

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \sin(3\,t) + \sinh(5\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(b) $f(t) = e^{t-3}\,e^{t+3} \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(c) $f(t) = e^{t}\,(1 + \sin(t)) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(d) $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(e) $f(t) = \delta(t) + (1+t)^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(f) $Y(s) = \dfrac{2\,s}{4\,s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(g) $Y(s) = \dfrac{s^2}{s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(h) $Y(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^3} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(i) $Y(s) = \dfrac{e^{-3}}{s-1} + \dfrac{e^{+3}}{s-1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(j) $Y(s) = \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{1}{1+s^2} + \dfrac{4}{s+s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(3) **(18 Punkte)**

Differentialgleichung:

Gegeben ist die Differentialgleichung $\quad y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y = f(t).$

(a) Sei $f(t) = e^{-t}$. Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Wendetangente? (2 Punkte)

(b) Skizziere diese Kurven über dem Bereich $D = [-1,\, 2.5]$. (4 Punkte)

(c) Bestimme für diese Kurven in D die vorhandenen Extremwertstellen mit ihren Werten sowie die restlichen Wendepunkte, sofern vorhanden. (3 Punkte)

(d) Bestimme für diese Kurven die Kurvenlängen zwischen $t = -1$ und $t = 2.5$ sowie zwischen $t = -1$ und $t = 6$. Numerische Resultate genügen. (3 Punkte)

(e) Löse das Anfangswertproblem mit $f(t) = t^2$ und den Anfangsbedingungen $y(0) = -1,\ \ y'(0) = y''(0) = 0.$ (6 Punkte)

(4) **(6 Punkte)**

Differentialgleichungssystem:

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{aligned} x(t)'' - y(t) &= 0 \\ y(t) - x'(t) &= 2\sin(t) \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= -1 \\ y(0) &= -1 \end{aligned}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \geq 0$.

Skizziere dann damit die Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sin(t)\, y(t) \end{pmatrix},\ \ t \geq 0.$

Was ist hier bemerkenswert?

(5) **(6 Punkte)**

Integration:

Zwei Mitarbeiter streiten sich darüber, welches der nachfolgend beschriebenen Volumen grösser sei. Entscheide den Streit und begründe die Entscheidung:

$$V_1 = \int_0^{4\pi}\int_0^{2\pi} (2x - y) + \ sin(x \cdot y)\, dx\, dy, \qquad V_2 = \int_0^{4\pi}\int_0^{2\pi} (2x - y) + \ sin(x + y)\, dx\, dy.$$

Gibt es in diesen Integralen überflüssige Terme? Wenn ja, welche?

(6) **(12 Punkte)**

Praktisches Beispiel:

Ein Fallschirmspringer springt zur Übung in einer Höhe von h über Grund aus dem Flugzeug. Die Leine zur Öffnung des Fallschirms ist bei diesem Sprung seitlich an der Sprungluke befestigt, sodass sich der Schirm sofort öffnet. Die Falldistanz während der Entfaltung vernachlässigen wir. Für den Flug gilt die folgende Differentialgleichung (AWP):

$$a(t) = v\,'(t) = g - \frac{c}{m}\,v^2(t), \;\; c = \frac{c_w\,\rho\,A}{2}$$

Dabei sind die folgenden Werte bekannt:

(a) $h = 1000\,m$
(b) $g = 9.81\,m\,s^{-2}$ (Gravitationskonstante)
(c) $m = 100\,kg$ (Masse)
(d) $c_w = 1.33$ (Widerstandsbeiwert für den geöffneten Schirm)
(e) $\rho = 1.2\,kg/m^{-3}$ (Dichte der Luft)
(f) $A = 25\,m^2$ (Stirnfläche des Schirms)

Berechne $v_\infty = v(\infty)$ mittels der Annahme $v\,'(\infty) = 0$. Führe dann v_∞ in der D'gl. ein. Damit lässt sich der Term $\dfrac{c}{m}$ substituieren. So erhält man eine separierbare D'gl., die lösbar ist. Beim Absprung soll $t = t_0 = 0\,sec$ gesetzt werden. Berechne daraus

(a) $v(t)$ mit numerischen Koeffizienten und damit (6 Punkte)
(b) $s(t)$ mit numerischen Koeffizienten. (3 Punkte)
(c) Berechne danach eine numerische Näherung für die Zeit t_{total}, während der sich der Fallschirmspringer in der Luft befindet, bis er auf dem Boden auftrifft. (3 Punkte)

(7) **(6 Punkte)**

Partielle Differentialgleichung:

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung $\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ mit den Anfangsbedingungen in $x_1 = 0,\;\; x_2 = 10,\;\; t_0 = 0$:

$$T(x_1,t) = 40, \;\; T(x_2,t) = 0, \;\; T(x,t_0) = 40 - 4\,x.$$

Gesucht ist die Lösung $T(x,t)$.

(*Hinweis:* Man versuche mit Hilfe eines konstruktiven Ansatzes eine Lösung zu ermitteln, indem man mit einem möglichst einfachen Ansatz für die Zeitabhängigkeit testet, ob die Gleichung erfüllt ist.)

---

(8) Abgabetermin ausstehende Abgaben (Nach Massgabe der Bedeutung)

Für Studierende (Repetenten und reguläre Studierende), welche noch ausstehende Arbeiten abgeben wollen: Der letzte mögliche Abgabetermin ist am Ende der auf Teil 1 folgenden Zwischenpause anlässlich dieser Prüfung.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, 05. Februar 2010

Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp08 / Mp 2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

(1) **(6 Punkte)**

Datenkorrektur:

Gegeben sind der Mittelwert $\bar{x} = 120.8$ und die Standardabweichung $s = 6.24$ eines von einem Vertragsunternehmen untersuchten Datensatzes mit 500 Messungen. Heute wurde bekannt, dass einer unserer schwach ausgebildeten Mitarbeiter seine Messungen systematisch falsch abgelesen hat. Er hat 76 mal den Wert 110 notiert statt den Wert 130.

(a) Versuche den wirklichen Mittelwert zu berechnen. (2 Punkte)

(b) Versuche die richtige Standardabweichung zu berechnen oder anzuznähern, falls dies möglich ist. (4 Punkte)

(2) **(9 Punkte)**

Qualitätskontrolle:

Mit zwei Maschinen A und B werden Bolzen produziert. An 12 aufeinanderfolgenden Tagen ist an jeder Maschine eine Stichprobe erhoben worden. $\bar{d}_{k,\,A}$ und $\bar{d}_{k,\,B}$ sind die aus den Stichproben errechneten Mitelwerte der Durchmesser für den Tag k in μm. Nachstehend sind nur die Differenz $\bar{d}_{k,\,A} - \bar{d}_{k,\,B}$ notiert. Man teste nun die Nullhypothese, dass beide Maschinen Bolzen mit den selben mittleren Massen liefern, gegen die Alternative, dass die eine Maschine, hier A, einen systematisch höheren Mittelwert liefert als B.

(a) Sei dabei $\alpha = 0.01$. Wenn die gemessene Situation in der Realität für die Alternativhypothese H_1 eine Wahrscheinlichkeit $P < \alpha$ ergibt, so ist H_1 bemerkenswert, unwahrscheinlich oder „siginifikant“ zum Niveau α. Frage: Ist H_1 signifikant zu α? (6 Punkte)

(b) Frage: Kann man damit die Alternativhypothese H_1 auf der Grundlage dieses Tests akzeptieren und muss man damit H_0 verwerfen? Erkläre den Sachverhalt auf der Grundlage des Resultats! (3 Punkte)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\bar{d}_{k,\,A} - \bar{d}_{k,\,B}$	12	9	2	0	1	3	-4	5	-5	1	2	6

(3) **(12 Punkte)**

Qualitätskontrolle:

Bei der Fliessbandfertigung von Motorengehäusen werden parallel zwei automatische Lehrenbohrwerke eingesetzt, wo jeweils in den Gehäusen Präsisionslöcher bebohrt werden. Die Toleranzen dieser Löcher werden in Mikrometern gemessen (μm). Die Lehrenbohrwerke sind so eingestellt, dass bei einer Abweichungen der Mittelwerte sowie der Standardabweichung der Differenz $|Sollmass - Istmass|$ pro volle Stunde um mehr als $30\,\mu m$ Alarm ausgelöst wird.
Da in letzter Zeit von der Abnehmerstelle trotzdem Reklamationen eingetroffen sind mit der Beanstandung, dass hier zwei verschiedene Qualitäten geliefert würden, wird an jedem Bohrwerk eine Stichprobe abgezogen und der Betrag der maximalen Abweichung der Lochdurchmesser vom vertraglich abgemachten Mittelwert in μm ermittelt. Nachstehend sind die beiden Datensätze aufgeführt:

$$Datensatz_1 = \{45, 7, 4, 49, 11, 7, 7, 5, 7, 41, 53, 1, 4, 41, 41, 22, 21, 2, 8, 2\} \text{ in } \mu m.$$

$$Datensatz_2 = \{27, 44, 4, 1, 16, 4, 12, 49, 2, 23, 68, 3, 13, 13, 50, 4, 42, 7, 27, 1\} \text{ in } \mu m.$$

(a) Ermittle die Mittelwerte der beiden Datensätze und beurteile diese bezüglich der Reklamationen. (3 Punkte)

(b) Ermittle die Standardabweichung der beiden Datensätze und beurteile diese bezüglich der Reklamationen. (3 Punkte)

(c) Zeichne von den beiden Datensätzen den Box-Whiskers-Plot im selben Diagramm und beurteile damit die Reklamationen. (6 Punkte)

(4) **(12 Punkte)**

Konfidenzintervalle:

Eine Firma fertigt seit Monaten Halbfabrikate für Haushaltsgeräte. Es handelt sich hierbei um Lagerplatten aus Kunststoff, in welche Löcher zur Aufnahme von Achsen für Reibräder eingelassen sind. In abgekühltem Zustand sollte der wichtigste Lochabstand $a_0 = 46.50\,mm$ und dazu die Toleranz $\pm\Delta a_0 = \pm 0.01\,mm$ betragen.
Aus der Erfahrung weiss man, dass der Mittelwert bei der Fabrikation $\bar{a} = 46.497\,mm$ beträgt. Die über lange Zeit ermittelte Standardabweichung ist $s = \Delta a$, $\pm\Delta a = \pm 0.044\,mm$. Ebenso ist durch die Erfahrung erhärtet worden, das die Werte für a einer Normalverteilung mit $\mu \approx \bar{a}$ und $\sigma \approx \Delta a$ genügen.

(a) Nun hat der Kunde mitgeteilt, dass im Falle $a \geq a_0 + 2\,\Delta a_0$ die eingebauten Reibräder in der Regel aneinander schleifen und dass sie sich dann sehr rasch abnutzen. Daher wird ein entsprechendes Stück Ausschuss, denn die Abnehmer des Kunden weigern sich, weiterhin solche Ware zu bezahlen. Die Stücke sollen demnach automatisch vermessen werden, um den derartigen Ausschuss schon vor dem Ausliefern aus der Sendung entfernen zu können. Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Stück zu entfernen ist. (4 Punkte)

(b) Berechne approximativ ein in der Fabrikation anzustrebendes neues $s = \Delta a_{neu}$ so, dass $a \geq 46.50 + 2 \cdot 0.01$ mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 0.01 eintrifft. (4 Punkte)

(c) Berechne als Alternative approximativ ein in der Fabrikation anzustrebendes neues $\bar{a}$ so, dass bei $\Delta a = 0.044\,mm$ jetzt $a \geq 46.50 + 2 \cdot 0.01$ mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 0.01 eintrifft. (4 Punkte)

(5) **(12 Punkte)**

Wahrscheinlichkeiten:

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Betrieb mit $n = 365$ Mitarbeitern mindestens einer am gemeinsam gefeierten Jahresabschlussfest Geburtstag hat? Und wie ist es bei nur $n = 20$ Mitarbeitern? (4 Punkte)

(b) Zum Wurf auf eine Darts-Scheibe (Geschicklichkeitsspiel mit diversen Spielregeln und Arten, bei dem eines der gleich grossen Felder mit den Nummern von 1 bis 20 mit einem Pfeil getroffen werden kann. Oft ist das Spiel in Clubs anzutreffen):
Pro Wurf ist die statistisch ermittelte Trefferwahrscheinlichkeit $P = 0.03$. Wie gross ist so die Wahrscheinlichkeit, mit 20 Würfen mindestens einen Treffer zu erzielen? (4 Punkte)

(c) Gegeben ist eine Maschine, die durchschnittlich alle 8 Wochen (40 Arbeitstage) einmal eingesetzt wird. Gestern ist sie eingesetzt worden. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie innerhalb der nächsten 4 Tagen eingesetzt werden muss? (Die Frage kommt eben bei Arbeitsbeginn vom Werkstattchef. Er muss die Maschine revidieren, möchte die Revision jedoch gerne ein paar Tage zurückstellen.) (4 Punkte)

— ENDE —

18.10 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html.

Allgemeine Bedingungen zur folgenden MP:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's usw. nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind in der Regel zwölf Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen. Andernfalls gelten die angegebenen Punktezahlen.
- ⊘ Mittleres Richtziel: Wenn an einer vollen Prüfung von zwei Stunden mehr als vier grössere Aufgaben mit zwölf oder mehr Punkten gegeben sind, sollten mindestens vier solche Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollen.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Donnerstag 03. 02. 2011

18.11 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp09 / Mp2

Viel Glück !

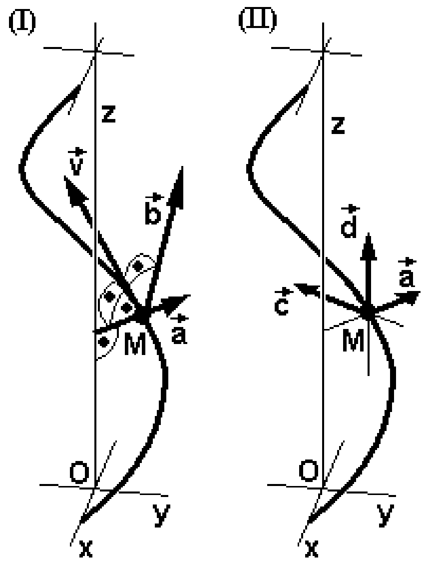
Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

(1) **(12 Punkte)**

Volumen von Schraubenlinienkörpern:

Gegeben ist eine Schraubenlinie

$$\vec{s} = \vec{s}(t) = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r_0\,\cos(t) \\ r_0\,\sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\ 1].$$



Diese Schraubenlinie verläuft auf einem Zylinder mit der Radius r_0. Daher ist der in den Skizzen gezeigte Vektor $\vec{a}$ senkrecht auf der Zylindermantelfläche und somit auf der Schraubenlinie. $\vec{d}$ ist parallel zur z–Achse. Die normierten Vektoren $\vec{v},\ \vec{a},\ \vec{b}$ bzw. $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d}$ bilden ein begleitendes Dreibein paarweise rechtwinkliger Vektoren (ONS).

Weiter ist $\vec{s} = \vec{s}(t) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$ der Ortsvektor von $M(t)$. $\vec{v} = \vec{v}(t)$ ist der Tangentenvektor an die Schraubenlinie in $M(t)$.

Weiter sei $r = r(t) := r_0\,(1 - \dfrac{t}{2\,\pi})$.

Im Falle (I) wird durch $\vec{k_1}(t,\,\varphi) = r(t)(\vec{a(t)}\,\cos\varphi + \vec{b(t)}\,\sin\varphi)$ ein auf der Kurve senkrecht stehender Kreis definiert, der zusammen mit $\vec{s(t)}$ eine in einen Spitz auslaufende Fläche $\vec{f_1}(t,\,\varphi)$ im Raum ergibt: $\vec{f_1}(t,\,\varphi) = \vec{s}(t) + \vec{k_1}(t,\,\varphi)$.

Im Falle (II) wird durch $\vec{k_2}(t,\,\varphi) = r(t)(\vec{a(t)}\,\cos\varphi + \vec{c(t)}\,\sin\varphi)$ ein horizontaler Kreis deniniert, der zusammen mit $\vec{s(t)}$ einen in einen Spitz auslaufende Fläche $\vec{f_2}(t,\,\varphi)$ im Raum ergibt: $\vec{f_2}(t,\,\varphi) = \vec{s}(t) + t,\,\vec{k_2}(\varphi)$.

(a) Skizziere die beiden durch die Flächen definierten Körper. (3 Punkte)

(b) Berechne das durch f_1 definierte Volumen V_1. (3 Punkte)

(c) Berechne das durch f_2 definierte Volumen V_2. (3 Punkte)

(d) Berechne das Kegelvolumen V_3, welches durch denselben Grundkreis wie bei f_2 und der Kegelhöhe $2\,\pi$ (Ganghöhe) gegeben ist. Berechne daraus das Verhältnis $V_3 : V_2$. (3 Punkte)

(2) **(21 Punkte)**

Laplace–Transformationen und Rücktransformationen:

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \cos(2\,t) + \cosh(3\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(b) $f(t) = e^{t-8}\, e^{-2\,t+3} \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(c) $f(t) = e^{-t}\,(\cos(t) - 2) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(d) $f(t) = (-t)^3 + \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(e) $Y(s) = \dfrac{4\,s}{2\,s^2 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(f) $Y(s) = \dfrac{s}{s^2 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(g) $Y(s) = 1 + \dfrac{2}{s} + \dfrac{-2}{s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(3) **(9 Punkte)**

Differentialgleichung:

Gegeben ist die Differentialgleichung $\quad y'(t) = -y(t) + \delta(t) + a\,\sin(t),\;\; y(1) = 1.$

(a) Sei in obiger Gleichung $y(t,\,a) := y(t)$. Setze $a = 1$. Berechne $y(t,\,1) := y_1(t)$. (3 Punkte)

(b) Skizziere die eben gefundene Funktion über dem Bereich $D = [0, 2]$ und berechne $y(0.5)$ sowie $y(2)$. (3 Punkte)

(c) Bestimme die Funktion $z(a) := y(2, a)$ und skizziere diese Funktion in einem charakteristischen Bereich. (3 Punkte)

(4) **(6 Punkte)**

Differentialgleichung:

Löse die folgende Differentialgleichung mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$y''(t) - y'(t) - 2\,y(t) = \frac{1}{2}\,cosh(t),\;\; y(0) = 1,\;\; y'(0) = -1.$$

(5) **(6 Punkte)**

Differentialgleichungssystem:

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) - z'(t) - z(t) &= 0 \\ y'(t) + y(t) + z'(t) + z(t) &= e^{-t} \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \in [-0.5, 3]$.

(6) **(6 Punkte)**

Differentialgleichung:

$y'(t) = y(t) \cdot e^{-t} + e^{-2t}, \; y(0) = 0.$

(a) Berechne $y(t) = y_{exakt}(t)$, falls möglich. (3 Punkte)

(b) Berechne $y(1.75) := y_{Euler}(1.75)$ numerisch nach Euler. Schrittweite $\Delta x = 0.5$. Berechne damit die Abweichung $|y_{Euler}(1.75) - y_{exakt}(1.75)|$ (3 Punkte)

(7) **(6 Punkte)**

Differentialgleichung allgemein:

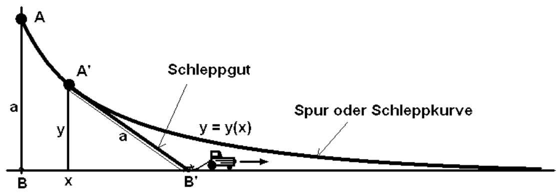
$y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = 1 + a \cdot t, \; y(0) = 0.$

(a) Berechne die allgemeine Lösung $y(t, a)$, falls möglich mit Hilfe des charakteristischen Polynoms. (5 Punkte)

(b) Von vievielen Parametern oder Variablen hängt die Lösung ab?. (1 Punkte)

(8) **(6 Punkte)**

Praktisches Beispiel:



Gegeben ist eine Schleppkurve (Bild). Ein Massenpunkt A ist hier an einem Seil der Länge a befestigt. A liegt anfangs auf der y–Achse. Das freie Seilende B befindet sich im Koordinatenursprung. Durch die Bewegung des Fahrzeugs wird das Seilende B der positiven x-Achse entlang geführt. Dabei beschreibt der hinterher gezogene Punkt A die Schleppkurve. Vorausgesetzt ist Gleitreibung.

(a) Modelliere die geometrische Situation durch eine Differentialgleichung:

$$y\,'(x) = \ldots = ?$$

(3 Punkte)

(b) Überprüfe, welche der folgenden Ausdrücke Lösungen der Differentialgleichung sind:

$$(a) \qquad y(x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} \qquad (b) \qquad y(t) = \frac{a}{\cosh(t)}$$

$$(c)\ x(y) = a\,\ln(a + \sqrt{a^2 - y^2}) - a\,\ln(y) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

(3 Punkte)

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, Donnerstag 03. 02. 2011

18.12 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp09 / Mp2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

(1) **(9 Punkte)**

Entscheidungsproblem:

Von einem neuen Flugzeugtyp ist eben bekannt geworden, dass bei 5 % der Maschinen bei einem Flug über Calamita (ein „Eisenberg“, dessen Erz ein Metallgehalt von über 70 Volumenprozente aufweist), die Funkverbindungen ausfallen und die Sender im Flugzeug ca. eine halbe Stunde lang Notsignale aussenden. Die Chance, dass es sich bei einem Flugzeug, welches Notsignale aussendet, um ein terroristischer Angriff handeln könnte und dass das Sendesystem manipuliert werden konnte, wird von der Herstellerfirma der Software mit 0.1 % angegeben. Nun fliegt ein solches Flugzeug, das Notsignale aussendet, aus Richtung Calamita etwas zu hoch gegen die nächst gelegene Flughafenzone, hinter der sich ein Spital mit ca. 100 Menschen befindet. Im Flugzeug sitzen vermutlich 10 Menschen. Man hat 3 Minuten zur Entscheidung für einen Abschuss. In dieser Zeit kann das Spital nicht evakuiert werden.

(a) Berechne hier die Wahrscheinlichkeit eines terroristischen Angriffs in der beschreibenen Situation. (6 Punkte)

(b) Begründe einen etwaigen Abschussentscheid oder den Gegenentscheid. (3 Punkte)

(2) **(9 Punkte)**

Personal- und Montageprobleme:

(a) In den nächsten Ferien könnte es eng werden in der Fabrikation. Von den 128 Mitarbeitern mieten 89 einen Parkplatz und besitzen daher ein Auto. Die andern erscheinen mit dem Velo zur Arbeit. Unser Betrieb hat es sich an Weihnachten zur Ehre gemacht, jedem Familienvater, der schulpflichtige Kinder hat, einen Velohelm zu schenken. So sind 62 Helme verschenkt worden. Fahrgemeinschaften bei den Autofahrern gibt es wegen der fliessenden Arbeitszeit keine. Die Autofahrer haben sich verpflichtet, nach Arbeitsschluss jeweils noch Waren für den Direktverkauf in ihrer Umgebung auszutragen, welche bei hohen Temperaturen rege bestellt werden. Genaue Angaben über die privaten Belange der Mitarbeiter gibt es sonst keine. Berechne falls möglich die Chance, dass ein Mitarbeiter während den Sommerschulferien nicht in den Urlaub reist unter der Bedingung, dass er Autofahrer ist und daher nach der Arbeitszeit noch Ware ausliefern kann. (3 Punkte)

(b) Ein Mechaniker entfernt an einer Maschine 7 Schraubenmuttern, alles Muttern mit $M10$–Gewinden, wie der denkt. Als er dann die Muttern nach dem Mitagessen genau betrachtet stellt er fest, dass 3 davon selbstsichernde Muttern mit eingelassenem Kunststoffsicherungsring sind. Eine hat sogar eine Nut eingefräst, wodurch sie nach dem Einbau in das Gehäuse von oben durch eine Rohröffnung mit dem Schraubenzieher gelocker und wieder angezogen werden kann. Die Montage des Gehäuses benötigt drei Stunden. Was ist die Chance, die Muttern zufällig richtig wieder zu montieren? (3 Punkte)

(c) Auf wieviele Arten kann bei einer Belegschaft von 14 Personen an 5 Mitarbeiter ein Bonus ausbezahlt werde, wenn es erlaubt ist, dass ein Mitarbeiter maximal 2 Boni kassieren kann und daher weniger als 5 Mitarbeiter etwas bekommen? (3 Punkte)

(3) **(9 Punkte)**

Qualitätsprognose:

(a) Wie gross ist die Chance, dass aus einer Lieferung von 28 Hochleistungspumpen 6 Pumpen, welche in einem unbewohnten, wettergeplagten Hochtal in Punkern verschlossen eingebaut werden, eine Dauerbetriebsdauer von mehr als 1 Jahr haben werden, wenn man durch Versuche herausgefunden hat, dass von 10 Pumpen nur 3 Stück diese Qualität aufgewiesen haben. (6 Punkte)

(b) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung der zugehörigen Verteilung. (3 Punkte)

(4) **(9 Punkte)**

Regression:

Gegeben sind die Fakultäten $k!$ der Zahlen von $k = 1$ bis $k = 12$ und damit die Punkte $(x(k), y(k)) = (k, k!)$. Es ist sofot klar, dass diese Punkte nicht auf einer Geraden liegen können.

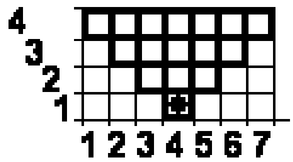
(a) Versuche daher herauszufinden, ob eher die Punkte $(x(k), y(k)) = (k, \ln(k!))$ auf einer Geraden liegen. Berechne dazu die zugehörige Funktion der Regressionsgeraden $y_1(x) = a_1\, x + b_1$. (3 Punkte)

(b) Versuche daher herauszufinden, ob vielleicht vielmehr die Punkte $(x(k), y(k)) = (k, \ln(k!))$ auf einer Parabel liegen. Berechne die zugehörige Funktion der Regressionsparabel $y_2(x) = a_2\, x^2 + b_2\, x + c_2$. (3 Punkte)

(c) Berechne die zugehörigen Fehlerquadratsummen $s_1 = \sum\limits_{k=1}^{12} ((\ln(k!) - y_1(k))^2$ und auch $s_2 = \sum\limits_{k=1}^{12} ((\ln(k!) - y_2(k))^2$ und beurteile, ob man mit der quadratischen Regression den Wert von s_1 halbieren kann. (3 Punkte)

(5) **(6 Punkte)**

Qualitätskontrolle:



In einem quadratischen Raster der Grösse 7×4 werden zufällig die Pixel schwarz oder weiss gefärbt. Was ist die Chance, dass das Pixel mit dem Markierpunkt unten (siehe Skizze, Startpixel **SP**) schwarz ist und sich dabei mindestens eine schwarze Linie vom Punkt **SP** nach oben (im fett dargestellten Bereich) ausbildet, in der immer schwarze Pixel entweder an der horizontalen Kante oder an einer Ecke „oben rechts — unten links“ oder „oben links — unten rechts“ zusammenstossen?

(6) **(12 Punkte)**

Datensätze:

Gegeben sind zwei Datensätze M_1 und M_2:

$$M_1 = \{44.0, 50.5, 51.4, 48.9, 52.3, 55.4, 54.5, 57.3, 58.4, 63.3, 65.9, 66.6\}$$

$$M_1 = \{44., 47.5, 47.1, 52.2, 49.9, 50.6, 52.5, 58.3, 58.6, 59.1, 61.8, 64.3\}$$

Dabei handelt es sich um die Temperaturmessungen an zwei gleichen belasteten Wellen am selben Tage etwa alle 15 Minuten nach der selben Startzeit.

(a) Berechne von den beiden Datensätzen jeweils Mittelwert, Median und Standardabweichung. (3 Punkte)

(b) Stelle die Datensätze in einem Box–Whiskers–Plot einander gegenüber. (3 Punkte)

(c) Bestimme zu den Datensätzen jeweils die Regressionsgerade numerisch und zeichne die Daten mit der Gerade je in ein Diagramm ein. (1. Datenelement bei 15 Minuten, Zeit in Minuten.) (3 Punkte)

(d) Beurteile die Bonität oder Güte der Daten unter der Annahme, dass sich eine Welle im Betrieb mit der Zeit vermutlich konstant erwärmen muss. (3 Punkte)

— ENDE —

18.13 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html.

Kapitel 19

Phase 17 (II/1)

Mathematik II, 2 Semester

19.1 Stoffprogramm Phase 17 ◇ M ◇

- ⊘ Organisatorisches, Trennung in Statistik und Analysis 4, Testdaten
- ⊘ Fourierreihen
  - Einführung
  - Periodische Funktionen
  - Trigonometrische Reihen
  - Beispiele
  - Das Problem der besten Approximation
  - Orthogonalitätsrelationen, Funktionenraum als Vektorraum, Skalarprodukt
  - Euler–Formeln

19.2 Übungen in Analysis 4 ◇ M2 01 ◇

Fourierreihen

(1) T–periodische und $2\,\pi$–periodische Funktion:

Gegeben ist die Funktion

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t & t \in [0,\ 1) \\ f(t+n), \quad n \in \mathbb{Z} & t \notin [0,\ 1) \end{cases}$$

(a) Bestimme T.

(b) Skizziere f.

(c) $t' = t \cdot \dfrac{2\,\pi}{T} \;\Rightarrow\; f(t) = f(t' \cdot \dfrac{T}{2\,\pi}) = f_1(t') = ?$

(d) Skizziere f_1.

(2) Trigonometrische Reihen:

(a) $s_n(t) = 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \sin(k\,t)$. Skizziere die Funktion für $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$
Errate, welche Funktion durch $s_n(t)$ approximiert werden könnte.

(b) Ersetze in $s_n(t)$ das k durch k^2 und gehe gleich vor wie in der letzten Teilaufgabe.

(c) Ersetze in $s_n(t)$ den Sinus durch den Cosinus und gehe gleich vor wie in der letzten Teilaufgabe.

(d) Ersetze in $s_n(t)$ das k durch $k^{1/2}$ und gehe gleich vor wie in der letzten Teilaufgabe.

(3) Berechne für die folgenden Funktionen die Fourierkoeffizienten bis zu $n = 10$ und skizziere die zugehörigen Approximationen:

(a) $f(t) = t,\ \ I = [0,\ 2\,\pi),\ \ T = 2\,\pi$

(b) $f(t) = t,\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\,\pi$

(c) $f(t) = t^2,\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\,\pi$

(d) $f(t) = \sin(t),\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\,\pi$

(e) $f(t) = \sin(t+1),\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\,\pi$

(f) $f(t) = \sin^2(t),\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\,\pi$

(g) $f(t) = \cos^2(t),\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\,\pi$

(h) $f(t) = e^t,\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\,\pi$

(i) $f(t) = \cosh(t),\ \ I = [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\,\pi$

WIR1

19.3 Link zu den Lösungen Phase 17

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_01.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_01.nb

Kapitel 20

Phase 18 (II/2)

Mathematik II, 2 Semester

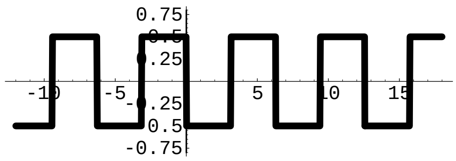
20.1 Stoffprogramm Phase 18 ◇ E+M ◇

- ⊘ Organisatorisches, Trennung in Statistik und Analysis 4, Testdaten
- ⊘ Fourierreihen
  - Das Darstellungsproblem
  - Das Konvergenzproblem
  - Satz von Dirichlet
  - Folgerungen aus dem Satz von Dirichlet
  - Konvergenzsatz für stückweise glatte Funktionen
  - Harmonische Analyse und Synthese: Beispiel

20.2 Übungen in Analysis 4 ◇ M2 02 ◇

Fourierreihen

(1)



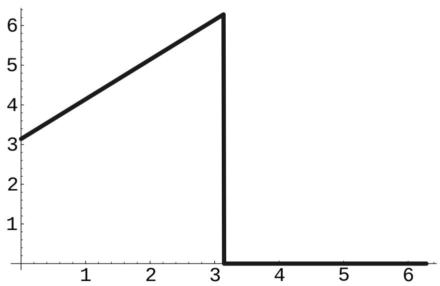
Stelle von der nebenstehend gezeigten Funktion mit einem Computer einen Plot her!

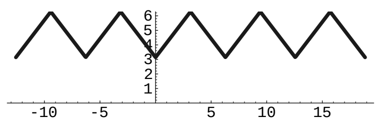
(2) Kann man die in der obigen Aufgabe gezeigte Funktion in eine Sinusreihe oder in eine Cosinusreihe entwickeln? Berechne allenfalls die ersten 10 Fourierkoeffizienten und zeichne die damit erhaltene Approximation in den Plot der letzten Aufgabe ein.

(3) Gegeben ist die unten in der Skizze links gezeigte Funktion

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t+\pi & t \in I = [0,\ \pi) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Um zu einer Fourierreihe ausschliesslich auf dem Intervall I zu kommen, wandeln wir die Funktion ab wie in der nachstehenden rechten Skizze gezeigt.





Abgewandelte Funktion

(a) Berechne die gesuchte Fourierreihe der abgewandelten Funktion.

(b) Zeichne eine Approximation der gesuchten Fourierreihe zusammen mit der abgewandelten Funktion. Beurteile das Verhalten an den Spitzen.

(c) Differenziere die erhaltene Fourierreihe gliedweise ausser für $t = n\,\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Differenziere ebenfalls die abgewandelte Funktion ausser für $t = n\,\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Untersuche, ob die so abgeleitete Fourierreihe als Approximation der abgeleiteten Funktion tauglich ist. (Plot!)

(4) Nun soll für die in der letzten Aufgabe behandelte Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $I = [0,\ \pi)$ eine andere Approximation gesucht werden. Es soll dazu neu die folgende $4\,\pi$–periodische Funktion verwendet werden:

$$g(t) = t + \pi, \qquad t \in I = [-2\pi,\ 2\pi)$$

Mit dieser Funktion werden die Spitzen in $t = 0$ und in $t = \pi$ vermieden.

(a) Berechne damit die gesuchte Fourierreihe auf die neue Art.

(b) Zeichne die entsprechende neue Approximation der gesuchten Fourierreihe zusammen mit der abgewandelten Funktion. Beurteile das Verhalten an den Spitzen.

(c) Differenziere die erhaltene Fourierreihe gliedweise ausser für $t = n\,\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Differenziere ebenfalls die abgewandelte Funktion ausser für $t = n\,\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Untersuche, ob die so abgeleitete Fourierreihe als Approximation der abgeleiteten Funktion tauglich ist. (Plot!)

(5) Es soll für die Funktion $h(t) = f(t) - \pi,\ \ f(t)$ wie oben, auf dem Intervall $I = [0,\ \pi)$ eine Approximation gesucht werden. Dazu soll wieder eine $4\,\pi$–periodische Funktion verwendet werden:

$$m(t) = t, \qquad t \in I = [-2\pi,\ 2\pi)$$

Mit dieser Funktion werden Spitzen in $t = 0$ und in $t = \pi$ wiederum vermieden.

(a) Berechne für h die Fourierreihe.

(b) Zeichne die Fourierreihe zusammen mit der Funktion auf I.

(c) Berechne koeffizientenweise das Integral über die Fourierreihe sowie das Integral über $h(t)$. Kann man die Integrationskonstanten so wählen, dass die beiden Integrale zueinander passen? Stelle die Sache so weit wie möglich graphisch dar und beurteile die Approximation.

20.3 Link zu den Lösungen Phase 18

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_02.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_02.nb

Kapitel 21

Phase 19 (II/3)

Mathematik II, 2 Semester

21.1 Stoffprogramm Phase 19 ◇ E+M ◇

- ⊘ Organisatorisches, Trennung in Statistik und Analysis 4, Testdaten
- ⊘ Fourierreihen
  - Harmonische Analyse und Synthese:
    - Beispiele
    - Möglichkeiten zur Berechnung von π
  - Linearkombinationen von Fourierreihen
  - Parsevalsche Gleichung
  - Beispiele, Anwendungen

21.2 Übungen in Analysis 4 ◇ M2 03 ◇

Fourierreihen

(1) Im Skript werden unter 4.3.1 und unter 4.3.5 mit Hilfe von Fourierreihen Formeln für die Approximation der Zahl π hergeleitet. Teste diese Formel aus und versuche Kurven der Art „genaue Stellen s in Abhängikeit der Anzahl Reiheglieder n“ zu ermitteln: $s(n) = ?$

(2) Ermittle z.B. mit Hilfe von Tabellen die Fourierreihe von

$$1,\, t,\, t^2,\, \ldots,\, t^5 \text{ auf } [-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\,\pi.$$

Ermittle daraus die Fourierreihe von $\dfrac{1-t^6}{1-t}$ auf $[-\pi-\varepsilon,\ \pi+\varepsilon)$.

(3) Ermittle die Fourierreihe von $e^{sin(t)+\cos(3\,t)}$ auf $[-\pi,\ \pi),\ \ T = 2\,\pi$.
Ermittle auch die komplexe Darstellung dieser Fourierreihe.

(4) Im Skript `http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf` werden z.B. unter 8.3.4. Fourierreihen verwendet, um die Schwingungen einer Platte berechnen zu können. Studiere dieses Vorgehen und mache dir so ein Bild von der Tragweite der Anwendung von Fourierreihen.

21.3 Link zu den Lösungen Phase 19

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_03.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_03.nb

Kapitel 22

Phase 20 (II/4)

Mathematik II, 2 Semester

22.1 Stoffprogramm Phase 20 $\diamond$ E+M $\diamond$

- ⊘ Komplexe Schreibweise von Fourierreihen
- ⊘ Diskrete Fouriertransformation (DFT)
- ⊘ Schnelle Fouriertransformation (FFT)

22.2 Übungen in Analysis 4 ◇ M2 04 ◇

Gibbs und DFT:

(1) Auf dem Intervall zwischen $-\pi$ und $+\pi$ ist die 2π–periodische Funktion $f(x) = x^2$. Ermittle heuristisch den Overshoot (Gibbs–Phänomen) bei der Fouriereintwicklung!

(2) Generiere eine Serie von Messwerten mittles der Funktion $f(t) = e^{\cos(t)} + \sin^2(t),\ T = 2\pi,\ n = 16,\ t_k = k \cdot \frac{2\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$. Berechne mit Hilfe der DFT damit als Approximation an die gegebenen Funktion ein trigonometrisches Polynom. Vergleiche die Graphen der wirklichen Funktion und der Approximation.

(3) Gegeben sind die Messwerte:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.309	0.588	0.809	0.951	0.99	0.951	0.809	0.588	0.309

Verwende die DFT, um daraus eine Foureirreihe zu machen. Zeichne die Funktion in das Diagramm der Messwerte ein.

(4) Gegeben sind die Messwerte:

x	0	.05	1.12	1.6	2.3	2.8	3.0	3.9	4.7	5.4
y	14.2	12.8	12.9	7.4	6.7	9.5	9.8	9.3	10.2	11.5
x	5.6	6.6	6.9	7.3	7.7	8.2	8.5	8.8	9.1	9.9
y	15.2	15.6	16.7	16.4	16.7	14.1	13.2	10.5	11.8	13.9

Verwende die DFT, um daraus eine Foureirreihe zu machen. Zeichne die Funktion in das Diagramm der Messwerte ein.
Problem: Was stellt man fest, das man nicht akzeptieren kann?

(5) Nimm die Daten der vorherigen Aufgabe, ersetze aber die x–Werte durch

$$k \cdot \frac{2\pi}{n},\ \ k = 0, \ldots, n-1.$$

Führe mit diesen Daten die DFT durch. Was stellt man jetzt fest?

(6)
(a) Studiere im Skript die FFT!
(b) Überlege dir, ob man diese Methode auf eines er beiden obigen Beispiele anwenden könnte.
(c) Suche in der Literatur ein Beispiel mit gerechneten Werten für die FFT.
(d) Suche auch Befehle in Mathemaitk–Programmen für den Computer, die die FFT anbieten.

WIR1

22.3 Link zu den Lösungen Phase 20

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_04.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_04.nb

Kapitel 23

Phase 21 (II/5)

Erscheint bei Gelegenheit
Mathematik II, 2 Semester

23.1 Stoffprogramm Phase 21 ◇ E+M ◇

- ⊘ Fouriertransformation
- ⊘ Fourierintegral
- ⊘ Selbststudium:
  - Bemerkungen und Regeln
  - Beispiele, Anwendungen

23.2 Übungen in Analysis 4 ◇ M2 05 ◇

Gibbs und Fouriertransformierte (Spektralfunktion):

(1)

$$f(t) \;=\; \begin{cases} (2\,t)^3 & t \in [-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}) \\ f(t+n) & n \in \mathbb{Z},\;\; t \notin [-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}) \end{cases}$$

(a) Entwickle f in eine Fourierreihe $\tilde{f}_n(t)$ von der Ordnung $n = 1$ bis zur Ordnung $n = 10$ und mehr. Skizziere einige der Approximationen.

(b) Um den Overshoot beim Gibbs-Phänomen zu studieren, soll die Differenzfunktion $\tilde{f}_n(t) - f(t)$ geplottet werden. Stelle einige der Plots dar.

(c) Untersuche den Overshoot heuristisch (d.h. für einige vernünftige n, wo der Rechnungsaufwand sich in Grenzen hält).

(2) Von den nachfolgenden Funktionen soll jeweils ein Plot hergestellt und die Fouriertransformierte oder Spektralfunktion $F(\Omega)$ berechnet werden:

(a)

$$f(\lambda) \;=\; \begin{cases} 1 & \lambda \in [0,\,1) \\ f(\lambda+n) & n \in \mathbb{Z},\;\; \lambda \notin [0,\,1) \end{cases}$$

(b)

$$f(\lambda) \;=\; \begin{cases} \sin(\lambda) & \lambda \in [0,\,\pi) \\ f(\lambda+n\,\pi) & n \in \mathbb{Z},\;\; \lambda \notin [0,\,\pi) \end{cases}$$

(c)

$$f(\lambda) \;=\; \begin{cases} \lambda & \lambda \in [0,\,3) \\ f(\lambda+3\,n) & n \in \mathbb{Z},\;\; \lambda \notin [0,\,3) \end{cases}$$

23.3 Link zu den Lösungen Phase 21

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_05.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_05.nb

Kapitel 24

Phase 22 (II/6)

Mathematik II, 2 Semester

24.1 Stoffprogramm Phase 22 ◇ E+M ◇

- ⊘ Fouriertransformation
- ⊘ Fourierintegral
  - Repetition Integralsatz
  - Parsevalsche Gleichung im kontinuierlichen Falle
  - Transformation einer Rechtecksfunktion
  - Integralsinuns
  - Bemerkungen und Regeln
  - Transformation und Rücktransformation wie bei der Laplace-Transformation
  - b-Band-Beschränktheit, Shannon
  - Kardinalsinus
  - Beispiele, Anwendungen: Lösen einer Differentialgleichung mit Hilfe der Fouriertransformation
- ⊘ Selbststudium:
  - Beispiele im Skript

24.2 Übungen in Analysis 4 ◇ M2 06 ◇

Diverse Berechnungen:

(1) Die folgende Funktion hat die Periode $T = 4$:

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t \in [-3,\, -1) \\ 2 & t \in [-1,\, 1) \end{cases}$$

(a) Skizziere die Funktion.

(b) Entwickle f in eine Fourierreihe $\tilde{f}_n(t)$ von beliebiger Ordnung n. Berechne die Fourierkoeffizienten numerisch in einer Tabelle bis zu $n = 50$. Was stellt man fest?

(c) Stelle einen Plot her für $n = 10$ und $n = 50$.

(d) Untersuche die Gleichung $2 = f(0) = \tilde{f}(0)$. Was kann man damit anfangen?

(e) Überprüfe an dieser Funktion die Gleichung von Parseval.

(f) Versuche mit Hilfe der letzten Gleichung eine Näherungsformel zur Berechnung von π zu finden und prüfe die Genauigkeit der Berechnung für $n = 1000$.

(2) Gegeben ist die folgende Funktion:

$$f(\lambda) \quad = \quad \begin{cases} \lambda & \lambda \in [-1,\, 1) \\ 0 & \lambda \not\in [-1,\, 1) \end{cases}$$

(a) Skizziere die Funktion.

(b) Berechne die Fouriertransormierte $F(\Omega)$ von $f(\lambda)$.

(c) Benutze $F(\Omega)$ zur Berechnung von $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x\cos(x)\,\sin(x) - \sin^2(x))}{x^2}\,dx$

(3) Kleinprojekt:

Die Wärmeleitgleichung für einen unendlich langen, eindimensionalen Stab (Draht) lautet:

$$u_t(x,t) = k^2\, u_{xx}(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t \in \mathbb{R}_0^+$$

Als Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ ist gegeben:

$$u(x,0) = e^{-x^2/\beta^2}, \;\; x \in \mathbb{R}_0^+, \;\; \beta \in \mathbb{R}^+$$

Suche die Lösung $u_t(x,t)$ der Gleichung für $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$. Verwende für die Lösung eine geeignete Darstellung.

WIR1

24.3 Link zu den Lösungen Phase 22

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_06.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_06.nb

Kapitel 25

Phase 23 (II/7)

Mathematik II, 2 Semester

25.1 Stoffprogramm Phase 23 $\diamond$ E+M $\diamond$

- $\oslash$ Übungen
- $\oslash$ Selbststudium:
  - Beispiele im Skript

25.2 Übungen in Analysis 4 ◇ M2 07 ◇

Zur Lösung von Differentialgleichungen:

(1) Die Fouriertransformierte von $y(t)$ sei $Y(\omega)$.

Berechne die Fouriertransformierten von $y'(t)$, $y''(t)$, $y'''(t)$, $y'''(t)$.

(2) Skizziere die Funktion und berechne die Fouriertransformierte:

(a)

$$f_1(t) \;=\; \begin{cases} c & t \in I_1 = [-1,\, 1) \\ 0 & t \notin I_1 \end{cases}$$

(b)

$$f_2(t) \;=\; \begin{cases} 1 & t \in I_2 = [-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & t \notin I_2 \end{cases}$$

(c)

$$f_3(t) = \cos(t) \cdot f_2(t)$$

(3)

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 1 & t \in [-1,\, 1) \\ 0 & t \notin [-1,\, 1) \end{cases}$$

Transformiere damit im Sinne von Fourier die unten angegebenen Gleichungen.
Löse anschliessend die Gleichungen auf der Bildseite und berechne die Rücktransformierte.
Überlege aufgrund der Resultate, ob man damit allenfalls die allgemeine Lösung oder allenfalls nur eine partikuläre Lösung gefunden hat!

(a) $y'(x) + 2\,y(x) = f(x)$

(b) $y'(x) + \frac{1}{2}\,y(x) = \frac{1}{2}\,f(x)$

(c) $y'(x) - y(x) = f(x)$

(d) $y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = f(x)$

25.3 Link zu den Lösungen Phase 23

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_07.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_07.nb

Kapitel 26

Phase 24 (II/8)

Mathematik II, 2 Semester

26.1 Stoffprogramm Phase 24 ◇ E+M ◇

- ⊘ Weiteres Konzept
- ⊘ Nochmals Übungen Fourier
- ⊘ Skriptexemplar Statistik
- ⊘ Repetition Statistik
  - Stichworte
- ⊘ Die Problematik des Konzepts
  - Grosse Sammlung von Beispielen und Rezepten
  - Das Problem des Denkens in Sammlungen: Wie finde ich zu meinem praktischen Problem das Konzept
  - Konzept Schlussprüfung: Fragen zum Kurs und kleine Beispiele
- ⊘ Selbststudium:
  - Besser Fragen zum Text
  - Übungen / Testvorbereitung / Test: Nach Absprache
- ⊘ Weiter mit Statistik: Skripte, Literatur, Links zu R-Material
  - Übungen im Labor zu 2 Handouts diverser Richtung (Einführung in R über je ca. 40 Seiten)
  - Skripts zu R: Siehe `http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MasterIndex.html` unter „(9) Statistikpakete". Achtung: Intern, nur mit Passwort

26.2 Übungen in Analysis 4 ◇ M2 08 ◇

Ehemalige Testaufgaben:

(1) Suche in den unter dem folgenden Link angegebenen Testserien die Aufgaben über Fourierreihen und informiere dich über mögliche Aufgabenstellungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/UebTests2000Diplom/BuchTestsMathII2000Dipl.pdf

(2) Suche in den unter dem folgenden Link angegebenen Vordiplomserien die Aufgaben über Fourierreihen und mache dir damit nochmals ein Bild von bisherigen mögliche Aufgabenstellungen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/UebTestsDiplom/BuchTestsMathVD.pdf

Suche „Fourier“ mit der erweiterten Suchfunktion des Acrobat Readers.

(3) Vorbereitung auf den Statistik-Unterricht:

(a) Beschaffe dir den zum kommenden Stoff gehörigen Skriptteil, falls er noch nicht verteilt ist.

(b) Beschaffe dir die empfohlenen Einführungen in das Statistik-Paket R. Links findest du unter:
http://de.wikipedia.org/wiki/GNU_R (Wikipedia)
http://de.wikibooks.org/wiki/GNU_R (Wikibooks)
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/DiverseSprachenPakete/DiverseIndex_m.htm
(Linkseite, Achtung: Intern, nur mit Passwort)

(c) Lade, falls noch nicht erlidigt, R herunter und installiere das Paket auf deinem privaten Rechner. Links findest du unter http://www.r-project.de/ oder http://www.r-project.org/

26.3 Link zu den Lösungen Phase 24

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_08.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LMMathAna2_08.nb

Kapitel 27

Phase 25 (II/9)

27.1 Stoffprogramm Phase 25 ◇ E+M ◇

Teil Analysis:

- ⊘ Test zur **Analysis**

Teil Statistik: Weiter mit Statistik, siehe Statistik–Skript (wird hier nicht mehr abgehandelt. Übungen im Skript integriert.)

- ⊘ Statistik: Vorbemerkungen
- ⊘ Arbeitsmethode
  - Wie lese ich einen mathematischen Text in der Situation an der FH
  - Problematik von Begriffen (Begriffsfelder etc.), Schulen mit einer eigenen Fachsprache u.s.w.
  -
- ⊘ Andocken an den bisherigen Statistik–Stoff: Arbeit mit dem Text
- ⊘ Bootstrap, Resampling: Absicht und Randbedingungen für eine Anwendung
  - Vertrauensintervalle für spezielle Lageparameter, Monte-Carlo-Simulationen
  - Ein Beispiel mit einem gegebenen Zufallsgenerator
  - Schluss auf ein Vertrauensintervall auf der Grundlage der 5-Schritte-Methode

Auf Wunsch der Teilnehmer: Nach speziellem Skript (nicht öffentlich zugänglich).

Kapitel 28

Phase 26 (II/10)

28.1 Stoffprogramm Phase 26 $\diamond$ E+M $\diamond$

- $\oslash$ Percentil–Lemma
- $\oslash$ Plug–In–Methode mit Bootstrap
- $\oslash$ Beispiel der Gewinnung einer empirischen Verteilungsfunktion
- $\oslash$ Berechnung des Vertrauensintervalls

Auf Wunsch der Teilnehmer: Nach speziellem Skript (nicht öffentlich zugänglich).

Kapitel 29

Phase 27 (II/11)

29.1 Stoffprogramm Phase 27 ◇ E+M ◇

- ⊘ Zusammenfassung Bootstrap-Percentil-Vertrauensintervalle
- ⊘ Problematik, Ratschläge, Zusammenfassung
- ⊘ Raten, Verhältnisse von Wahrscheinlichkeiten
- ⊘ Sensitivität, Spezifität, Beispiel
- ⊘ Beispiel aus der öffentlichen Diskussion
- ⊘ Vergleich von Raten
- ⊘ Heikle Fälle, kritischer Umgang
- ⊘ Vergleich von Messgrößen
- ⊘ Beispiel von korrelierten Messgrößen

Auf Wunsch der Teilnehmer: Nach speziellem Skript (nicht öffentlich zugänglich).

Kapitel 30

Phase 28 (II/12)

30.1 Stoffprogramm Phase 28 ◇ E+M ◇

- ⊘ Positiven und negative Korrelation, das Problem mit der Korrelation
- ⊘ Güte von Bootstrap-Percentil-Vertrauensinitervallen
- ⊘ Genauigkeit von Bootstrap-Percentil-Vertrauensinitervallen
- ⊘ Anzahl Notwendige Bootstrapkopien
- ⊘ Beispiele, Übungen

Auf Wunsch der Teilnehmer: Nach speziellem Skript (nicht öffentlich zugänglich).

Kapitel 31

Phase 29 (II/13)

31.1 Stoffprogramm Phase 29 ◇ E+M ◇

- ⊘ Standardfehler und Standardabweichung
- ⊘ Standardfehler des arithmetischen Mittels
- ⊘ Standardfehler der Wahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit)
- ⊘ Empirische Standardabweichung der Bootstrap-Kopie
- ⊘ Standardfehler des Medians
- ⊘ Modellierung mit Normalverteilungen
  - Wahrscheinlichdichte bei Normalverteilung, Normierung, Parameter Mittelwert und Standardabweichung
  - Geometrische Formen bei diversen Parametern
  - Verteilungsfunktion bei der Normalverteilung, Problem der Berechenbarkeit
  - Quantile und Vertrauensintervalle bei der Normalverteilung
  - Zentraler Grenzwertsatz
  - Anwendungen für Standardabweichung des Mittelwerts u.s.w.
  - Vertrauensintervalle
  - Beispiele
  - Normalverteilungen in technischen Anwendungen und im Qualitätsmanagement

Auf Wunsch der Teilnehmer: Nach speziellem Skript (nicht öffentlich zugänglich).

Kapitel 32

Phase 30 (II/14)

32.1 Stoffprogramm Phase 30 ◇ E+M ◇

- ⊘ Gaussche Fehlerrechnungen
- ⊘ Beispiele
- ⊘ Methoden
- ⊘ Verrechnung von Vertrauensintervallen
- ⊘ Beispiele und Übungen: Siehe auch

  http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Bootstrap.pdf

  http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Bootstrap.nb

Auf Wunsch der Teilnehmer: Nach speziellem Skript (nicht öffentlich zugänglich).

Kapitel 33

Phase 31 (II/15)

33.1 Stoffprogramm Phase 31 ◇ E+M ◇

- ⊘ Test
- ⊘ Rückgabe Test, Besprechung
- ⊘ Ausblicke

Auf Wunsch der Teilnehmer: Nach speziellem Skript (nicht öffentlich zugänglich).

Kapitel 34

Phase 32 (II/16)

34.1 Stoffprogramm Phase 32 ◇ E+M ◇

- ⊘ Offene Fragen, Abrundungen, Ausblicke, Nachholtests
- ⊘ Spezielle Themen nach Absprache und Wünschen
- ⊘ Abschluss

Auf Wunsch der Teilnehmer: Nach speziellem Skript (nicht öffentlich zugänglich).

Kapitel 35

Tests Analysis Semester 2

35.1 Test ◇ M2–07/08–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

(1) Sei die $2\,\pi$–periodische Funktion $f(x)$ gegeben durch $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $(0, 2\,\pi)$.

(a) Bestimme die Fourierreihe von f.

(b) Berechne damit die folgenden Reihen:

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad (3)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Hinweis: Dirichletsche Bedingung für die Konvergenz ... An den Sprungstellen Konvergenz gegen das arithmetische Mittel ... Parceval ...

(c) Durch f wird nun eine Funktion beschrieben, die im Labor mittels Überlagerung von Sinus– und Cosinusfunktionen erzeugt werden soll. Man verwendet dazu einfach die ersten hundert Glieder der jeweiligen Summen in der Fourierentwicklung von f und bricht dann ab. Wie verhält sich voraussichtlich die so konstruierte Näherungsfunktion an den Sprungstellen von f ?
(Stichwortartige Begründung.)

(d) Skizziere und beschreibe die einfachste stetige Funktion, die als Fourierreihe eine reine Sinusreihe hat, $8\,\pi$–periodisch ist und auf dem Intervall $(0, 2\,\pi)$ durch $f(x) = x^2$ gegeben ist. Begründe die Wahl.

(2) (a) Suche die Fourierreihe für die Funktion

$$f_1(t) \;=\; \begin{cases} t & t \in [0, \pi) \\ \text{sonst periodisch} & T = \pi \end{cases}$$

(b) Bestimme mit Hilfe der jetzt bekannten Fourierreihe die Fourierreihe der zweiten Funkton

$$f_2(t) \;=\; \begin{cases} 3 - t & t \in [0, \pi) \\ \text{sonst periodisch} & T = \pi \end{cases}$$

(3) (a) Suche die Fourierreihe für die Funktion

$$f_3(x) \;=\; \begin{cases} 2 + 2\,\cos(x) & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{sonst periodisch} & \text{Periode } = \pi \end{cases}$$

(b) Kann man bei dieser Reihe beurteilen, ob und allenfalls wie das Gibbs'sche Phänomen hier zur Wirkung kommt?

(c) Differenziere diese Fourierreihe gliedeweise. Welche Fourierreihe $f_4(x)$ entsteht jetzt und konvergiert diese Reihe noch?

(d) Im Falle der Konvergenz: Welche allenfalls einfache Funktion wird durch f_4 dargestellt?

(e) Schreibe die oben gegebene Fourierreihe $f_4(x)$ in komplexer Darstelltung.

(f) Bestimme daraus das Amplitudenspektrum und das Phasenspektrum (die ersten 4 Werte genügen allenfalls, falls man kein allgemeines Gesetz sieht).

(4) Gegeben sind die Messwerte $\{(0, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (5, 3), (6, 2), \ldots\}$. Wie man sieht, zeigt sich nach den ersten 3 Messwerten eine Periodizität: $y_k = y_{k+3}$.

(a) Bestimme mittels DFT eine Fourierreihe für diese Messserie und stelle die erhaltene Funktion sowie die Messwerte in einer Skizze dar.

(b) Ist es hier möglich, eine FFT zu machen?

(c) Beschreibe in wenigen Sätzen, wie man die Messungen gewinnen müsste, um mit FFT arbeiten zu können.

(5) Sei $H(x)$ die Einheitssprungfunktion mit der Sprungstelle $x = 0$ und $H(x - k)$ diejenige mit der Sprungstelle $x = k$. Weiter sind folgende Funktionen gegeben:

$$f_1(x) = (H(x+2) - H(x-2)), \qquad f_2(x) = (4 - x^2)\,(H(x+2) - H(x-2)),$$

$$F_3(\Omega) = \frac{(\cos(\Omega) + \sin(\Omega))}{\Omega}$$

(a) Skizziere die Funktion $f_1(x)$.

(b) Skizziere die Funktion $f_2(x)$.

(c) Berechne die Fouriertransformierte von $f_1(x)$

(d) Berechne die Fouriertransformierte von $f_2(x)$

(e) Berechne die inverse Fouriertransformierte von $F_3(\Omega)$

(6) Technisch–wissenschaftliche Fachlektüre, Testverständnis:
Lese das beiliegende Blatt aufmerksam durch und beantworte die folgenden Fragen:

(a) Im Text wird gezeigt, dass man mit Hilfe eines Separationsansatzes zu Basislösungen gelangen kann. Welche unbekannten Funktionsanteile im Zusammenhang mit den Basislösungen kann man dann mit Hilfe der Fouriertransformation berechnen?

(b) Sei $c = 1$ und $f(x) = 1,\ \ x \in [-1,\ 1],\ \ f(x) = 0$ sonst. Sei $g(x) = f(x - 100) \cdot f(x)$. Berechne $\hat{f}(\lambda)$ und $\hat{g}(\lambda)$.

(c) Berechne damit die Lösung für das eingangs gestellte Problem und die eben gegebenen Parameter resp. Funktionen für $x = t = 1$.

Viel Glück!

Fouriertransformationen und partielle Differentialgleichungen

Bsp.: Wir studieren das Beispiel einer einfachen Wellengleichung mit nur einer Ortsvariablen. Sei dabei $|u(x,t)|$ beschränkt und $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\begin{aligned} c^2\, u''_{xx} - u''_{tt} &= 0 && x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(x,0) &= f(x) && x \in \mathbb{R},\ (ABD) \\ {u_t}'(x,0) &= g(x) && x \in \mathbb{R},\ (ABD) \end{aligned}$$

Wir machen den Separationsansatz: $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$. Daraus folgt:

$$X\cdot T''_{tt} = c^2\cdot X''_{xx}\cdot T \ \Rightarrow\ \frac{1}{c^2}\cdot X\cdot T''_{tt} = X''_{xx}\cdot T \ \Rightarrow\ \frac{1}{c^2}\cdot\frac{T''_{tt}}{T} = \frac{X''_{xx}}{X} := \pm\lambda^2,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$$

Da die linke und die rechte Seite der letzten Gleichung von verschiedenen Variablen abhängen, erhalten wir daraus zwei separate Gleichungen. Jeweils der linke Ausdruck ist gleich $\pm\lambda^2$. $\leadsto$

$$T''_{tt} = \pm\lambda^2\, c^2\, T \qquad \text{und} \qquad X''_{xx} = \pm\lambda^2\cdot X$$

Je nach „+“ oder „-“ erhalten wir damit die Lösungspaare:

$$T = C_1\cdot e^{\pm\lambda\, c\, t},\ \ X = C_2\cdot e^{\pm\lambda\, x} \qquad \text{und} \qquad T = A\cdot e^{\pm i\,\lambda\, c\, t},\ \ X = B\cdot e^{\pm i\,\lambda\, x}$$

Das ergibt die folgenden Kombinationen:

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= C_1\cdot e^{i\,\lambda(x-c\,t)} \\ u_2(x,y) &= C_2\cdot e^{i\,\lambda(x+c\,t)} \\ u_3(x,y) &= C_3\cdot e^{-i\,\lambda(x-c\,t)} \\ u_4(x,y) &= C_4\cdot e^{-i\,\lambda(x+c\,t)} \end{aligned}$$

Diese vier Funktionen lassen sich trigonometrisch als Linearkombinationen von $\cos(\pm\lambda(x+c\,t)) = \cos(\lambda(x+c\,t))$ und $\cos(\pm\lambda(x-c\,t)) = \cos(\lambda(x-c\,t))$ sowie $i\,\sin(\pm\lambda(x+c\,t)) = \pm i\,\sin(\lambda(x+c\,t))$ und $i\,\sin(\pm\lambda(x-c\,t)) = \pm i\,\sin(\lambda(x-c\,t))$ linear zusammensetzen. Dafür genügt aber schon die Basis $\{\cos(\lambda(x+c\,t)),\ \cos(\lambda(x-c\,t)),\ i\,\sin(\lambda(x+c\,t)),\ i\,\sin(\lambda(x-c\,t))\}$. Diese Basis lässt sich, wie man leicht sieht, aus $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ gewinnen, womit $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ als Basislösungen genügen. Damit ist bei gegebenen λ die folgende Funktion $u_\lambda(x,t)$ eine Lösung:

$$u_\lambda(x,t) = C_1(\lambda)\cdot e^{i\,\lambda(x-ct)} + C_2(\lambda)\cdot e^{i\,\lambda(x+ct)} = e^{i\,\lambda\,x}\cdot(C_1(\lambda)\cdot e^{-i\,\lambda\,c\,t} + C_2(\lambda)\cdot e^{i\,\lambda\,c\,t})$$

Wir definieren nun: $\quad l := \dfrac{2\,\pi}{\lambda},\ \ \nu := \dfrac{c}{l},\ \ \omega = 2\,\pi\,\nu\ \Rightarrow\ \dfrac{\omega}{2\,\pi} = \nu = \dfrac{c}{l} = \dfrac{c\,\lambda}{2\,\pi}\ \Rightarrow\ \lambda\, c = \omega$

Damit wird: $\quad u_\lambda(x,t) = e^{i\,\lambda\,x}\cdot(C_1(\lambda)\cdot e^{-i\,\omega\,t} + C_2(\lambda)\cdot e^{i\,\omega\,t})$

Nun gilt für $c^2\,u''_{xx} - u''_{tt} = 0$ das „Superpositionsprinzip“: Zu zwei Lösungen $u_{\lambda_1}(x,t)$ und $u_{\lambda_2}(x,t)$ ist auch jede Linearkombination $\alpha\, u_{\lambda_1}(x,t) + \beta\, u_{\lambda_2}(x,t)$ Lösungen. Speziell ist also $u_{\lambda_1}(x,t) + u_{\lambda_2}(x,t)$ eine Lösung. Da für λ einzig die Forderung $\lambda\in\mathbb{R}$ gemacht worden ist, kann λ nicht als diskreter Summationsindex angenommen werden. Statt von einer Summenlösung mit beliebig vielen Summanden müssen wir daher eine Integrallösung als „Superposition“ annehmen:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda)\cdot e^{-i\,\omega\,t} + C_2(\lambda)\cdot e^{i\,\omega\,t})\cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda)\cdot e^{-i\,\lambda\,c\,t} + C_2(\lambda)\cdot e^{i\,\lambda\,c\,t})\cdot e^{i\,\lambda\,x}\, d\lambda$$

Dabei erhalten wir als Anfangsbedingungen für $t=0$ die Anfangsintegrale:

$$u(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}(C_1(\lambda)+C_2(\lambda))\cdot e^{i\,\lambda\,x}\,d\lambda=f(x)\qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial\,u(x,t)}{\partial\,t}\Big|_{t=0}=\int_{-\infty}^{\infty}i\,\lambda\,c\,(-C_1(\lambda)+C_2(\lambda))\cdot e^{i\,\lambda\,x}\,d\lambda=g(x)$$

Diese Integrale erkennen wir aber als die **Fourier–Rücktransformierten** von $v(\lambda)\;:=\;(C_1(\lambda)+C_2(\lambda))$ und von $w(\lambda)\;:=\;i\,\lambda\,c\,(-C_1(\lambda)+C_2(\lambda))$. Daher sind $v(\lambda)$ und $w(\lambda)$ die **Fourier–Transformierten** von $f(x)$ und $g(x)$.

Dazu kennen wir die Formeln:

$$v(\lambda):=(C_1(\lambda)+C_2(\lambda))=\hat f(\lambda)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot e^{-i\,\lambda\,x}\,dx$$

$$w(\lambda):=i\,\lambda\,c\,(-C_1(\lambda)+C_2(\lambda))=\hat g(\lambda)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\cdot e^{-i\,\lambda\,x}\,dx$$

$$\Rightarrow\; C_1(\lambda)=\frac{1}{2}(v(\lambda)-\frac{w(\lambda)}{i\,\lambda\,c})=\frac{1}{2}(\hat f(\lambda)-\frac{\hat g(\lambda)}{i\,\lambda\,c}),\qquad C_2(\lambda)=\frac{1}{2}(v(\lambda)+\frac{w(\lambda)}{i\,\lambda\,c})=\frac{1}{2}(\hat f(\lambda)+\frac{\hat g(\lambda)}{i\,\lambda\,c})$$

$$\Rightarrow\; u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}(C_1(\lambda)\cdot e^{-i\,\lambda\,c\,t}+C_2(\lambda)\cdot e^{i\,\lambda\,c\,t})\cdot e^{i\,\lambda\,x}\,d\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2}(\hat f(\lambda)-\frac{\hat g(\lambda)}{i\,\lambda\,c})(\lambda)\cdot e^{-i\,\lambda\,c\,t}+\frac{1}{2}(\hat f(\lambda)+\frac{\hat g(\lambda)}{i\,\lambda\,c})(\lambda)\cdot e^{i\,\lambda\,c\,t})\cdot e^{i\,\lambda\,x}\,d\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\hat f}{2}\,(e^{-i\,\lambda\,c\,t}+e^{i\,\lambda\,c\,t})-\frac{1}{\lambda\,c}\,\frac{\hat g}{2\,i}\,(e^{-i\,\lambda\,c\,t}-e^{i\,\lambda\,c\,t}))\cdot e^{i\,\lambda\,x}\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}(\hat f\,\cos(\lambda\,c\,t)-\frac{1}{\lambda\,c}\,\hat g\,\sin(\lambda\,c\,t))\cdot e^{i\,\lambda\,x}\,d\lambda$$

Folgerung: Damit erhalten wir die folgende **Lösung** von $c^2\,u''_{xx}-u''_{tt}=0$ und obigen Anf'bed.:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}(\hat f(\lambda)\,\cos(\lambda\,c\,t)-\frac{1}{\lambda\,c}\,\hat g(\lambda)\,\sin(\lambda\,c\,t))\cdot e^{i\,\lambda\,x}\,d\lambda\qquad\text{mit}$$

$$\hat f(\lambda)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot e^{-i\,\lambda\,x}\,dx,\qquad \hat g(\lambda)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\cdot e^{-i\,\lambda\,x}\,dx$$

35.2 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02_Loes.nb

35.3 Test ◇ M2–08/09–02–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

(1) Gegeben ist $f_1(t) = \sin(t),\ \ t \in [0,\, \pi)$ mit $f_1(t) = f_1(t + n\,\pi),\ \ n \in \mathbb{Z},\ \ T = \pi$.

(a) Erläutere, ob $f_1(t)$ eine gerade Funktion ist und ob man $f_1(t)$ in eine Cosinusreihe entwickeln kann. (Skizze!)

(b) Berechne die ersten 6 Fourierkoeffizienten und stelle das Approximationsergebnis für $f_1(t)$ so exakt wie möglich grahpisch dar.

(c) Berechne die ersten 6 Koeffizienten der Fourierreihe von $f_2(t) = |\sin(t)|$. Kann man das vorhergehende Resultat hier benutzen?

(d) Berechne die ersten Koeffizienten der Fourierreihe der $2\,\pi$–periodischen Funktion f_3 mit $f_3(t) = \sin(t),\ \ t \in [0,\, \pi)$ und $f_3(t) = 0,\ \ t \in [\pi,\, 2\,\pi)$. Kann man die vorhergehenden Resultate benutzen?

(e) Berechne die ersten Koeffizienten der Fourierreihe von f_4 mit $f_4(t) = \dfrac{d\,f_1(t)}{d\,t}$, falls f_1 differenzierbar ist. In den Punkten, wo f_1 nicht differenzierbar ist, soll f_4 auf vernünftige und natürliche Weise definiert werden. Kann man die vorhergehenden Resultate benutzen?

(2) Gegeben ist die Funktion $g_1(t) = t,\ \ t \in [0,\, 2),\ \ T = 2$.

(a) Bestimme die Fourierreihe von $g_1(t)$. (Anzugeben sind die ersten 4 Koeffizienten).

(b) Berechne damit die Fourierreihe von $g_2(t) = t^2,\ \ t \in [0,\, 2),\ \ T = 2$. (Anzugeben sind die ersten 4 Koeffizienten).

(3) (a) Beschreibe eine Methode zur Approximation der unendlichen Summe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2\,k+1)(2\,k+3)} = \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 9} + \ldots$ mit Hilfe einer Fourierreihe.

(b) Beschreibe eine Methode zur Approximation der Zahl π mit Hilfe einer Fourierreihe.

(4) Gegeben ist eine sogenannte „partielle“ Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ \ u(t,0) = u(t,\pi) = 0$$

(a) Untersuche, ob die Funktion $u(t,x) = c\cdot e^{-a\,t}\cdot \sin(b\,x)$ die Gleichung löst und in welcher Beziehung allenfalls a und b dabei stehen müssen.

(b) Untersuche, ob eine Linearkombination von Lösungen wieder Lösung sein kann.

(c) Untersuche, ob bei der letzten Teilaufgabe bezüglich eines betrachteten Wertes von t die Lösung etwas mit einer Fourierreihe zu tun hat. (*Hinweis:* Überlege dir, was für Werte b im Falle einer Fourierreihe annehmen darf.)

(5) Gegeben ist die Funktion $v_1(x) = \cos(x),\ \ x \in I = [-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}]$ und $v_1(x) = 0,\ \ x \notin I$. Sei dazu andererseits $v_2(x) = \pi,\ \ x \in [-1,\, 1]$ und $v_2(x) = 0$ sonst.

(a) Berechne die Fouriertransformierte von $v_1(x)$.

(b) Versuche, mit Hilfe von Fouriertransformationen die Differentialgleichung

$$y\,'(x) = v_2(x) - y(x)$$

zu lösen. (Eine partikuläre Lösung finden.)

(6) Beschreibe in kurzen Worten auf klare Weise den Begriff „DFT“. Erläutere dazu:

(a) Um was geht es dabei? — Was will man damit? — Was gewinnt man mittels DFT?

(b) Beschreibe anhand eines Beispiels, wie man konkret bei der Verwendung der DFT vorgeht.

(c) Wie hängt der Begriff „FFT“mit der DFT zusammen?

Viel Glück!

WIR1

35.4 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0809_02_02_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0809_02_02_Loes.nb

35.5 Test ◇ M2–09/10–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

(1) Gegeben ist die $2\,\pi$–periodische Funktion $f_1(t) = -t$, Fundamentalintervall $FI = (-\pi,\, \pi)$.

(a) Zeige die Berechnung der Fourierreihe $\tilde{f}_{1,\,6}(t)$ bis $n = 6$ exakt.

(b) Berechne $\Delta_{rel} = (\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^2(t)\,dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_{1,\,6}^2(t)\,dt)/(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^2(t)\,dt)$. (*Hinweis:* Parseval)

(c) Beurteile, ob es sich bei der Fourierreihe um eine reine Cosinus- oder Sinusreihe handelt.

(d) Bestimme die allgemeine Form der Reihe ($n = \infty$).

(e) Berechne den Wert der Reihe an der Stelle $t = \dfrac{\pi}{2}$ exakt: $f(\dfrac{\pi}{2}) = \sum\limits_{?}^{?}\,? = ?$

(f) Berechne die Werte $\tilde{f}_{1,\,n}(\dfrac{\pi}{2})$ für $n = 1,\,2,\,3,\,\ldots,\,6$ numerisch und beobachte, ob sich die Werte in eine Richtung bewegen oder ob und somit wie sie oszillieren. Beschreibe das Verhalten.

(g) Skizziere den Graphen der Fourierreihe $\tilde{f}_{1,\,6}(t)$ (für $n = 6$) über dem angegebenen Fundamentalintervall.

(h) Lese aus dem Graphen für $n = 6$ ab, wieviele horizontale Tangenten es an den Graphen innerhalb einer Periode gibt.

(i) Bestimme die komplexe Form der Fourierreihe bis $n = 6$ exakt (nicht numerisch).

(2) Gegeben ist die 1–periodische Funktion $f_2(t) = -t$ auf dem $FI = (-\dfrac{1}{2},\, \dfrac{1}{2})$. Gegenüber der letzten Aufgabe hat somit die Periode T und das FI geändert.

(a) Ermittle die Fourierreihe $\tilde{f}_{2,\,6}(t)$ (bis $n = 6$) exakt.

(b) Bestimme die allgemeine Form der Reihe ($n = \infty$).

(c) Berechne den Fehler, d.h. die Abweichung der Reihe bis $n = 6$ an der Stelle $t = \dfrac{1}{4}$ exakt.

(d) Skizziere den Graphen der Fourierreihe $\tilde{f}_{2,\,6}(t)$ (für $n = 6$) über dem angegebenen FI.

(e) Bestimme die komplexe Form der Fourierreihe bis $n = 6$ exakt (nicht numerisch).

(3) Sei die $2\,\pi$–periodische Funktion $f_3(t)$ gegeben durch $f(t) = (|-t+\pi| + \cos(\dfrac{t}{2}))$ über dem $FI = (-\pi,\, \pi)$.

(a) Bestimme die Fourierreihe $\tilde{f}_{3,\,4}(t)$ von $f_3(t)$ bis und mit $n = 4$ (Koeffizienten numerisch).

(b) Bestimme den Graphen der Fourierreihe $\tilde{f}_{3,\,4}(t)$ von $f_3(t)$ (bis und mit $n = 4$).

(4) (a) Suche die $2\,\pi$–periodische Fourierreihe für die Funktion (bis $n = 6$ oder allgemein):

$$f_4(t) \;=\; \begin{cases} 1 & t \in [0,\, \pi) \\ 0 & t \in [\pi,\, 2\,\pi) \end{cases}$$

(b) Die Fourierreihe $f_4(t)$ kann man als Funktion für eine periodisch ein– und ausgeschaltete konstante Spannung interpretieren. Was hat daher eine solche Spannung mit harmonischen Schwingungen zu tun?

(c) Beurteile, ob bei der Reihe für $f_4(t)$ das Gibbs'sche Phänomen zur Wirkung kommt!

(d) Differenziere die Fourierreihe für $f_4(t)$ und zeichne den Graphen für ein selbst gewähltes vernünftiges n. Beurteile, ob man das Resultat hier angesichts der einfach bestimmbaren Ableitung der Funktion $f_4(t)$ praktisch verwenden könnte.

(e) Ersetze t in $f_4(t)$ durch $c \cdot x$ und wähle c so, dass $g_4(c \cdot x) = f_{4,\,c}(x)$ eine Funktion mit der Periode $T = 2$ wird.

(f) Bestimme die Fourierreihe der Funkton $h_{4,\sin}(t) = f_4(t) \cdot \sin(t)$.

(5) Gegeben sind die Messwerte $(0,\,0)$, $(\frac{2\pi}{3},\,1)$, $(2\,\frac{2\pi}{3},\,3)$, $(3\,\frac{2\pi}{3},\,0)$, $(4\,\frac{2\pi}{3},\,1)$, $(5\,\frac{2\pi}{3},\,3)$, $(6\,\frac{2\pi}{3},\,0)$, ... Wie man sieht, zeigt sich nach den ersten 3 Messwerten eine Periodizität: $y_k = y_{k+3}$. Bestimme die Koeffizienten $\tilde{c}_s$ für die DFT.

(6) Sei $f(x) = e^{-x^2}$

(a) Zeige die Berechnung der Fouriertransformierten $\hat{f}(\Omega)$ von $f(x)$, falls diese existiert.

(b) Skizziere $f(x)$ und $\hat{f}(\Omega)$, falls diese möglich ist.

(c) Was ist bemerkenswert am Resultat?

(7) Sei $f_{a,\,b,\,c}(x) = c$ für $x \in [a,\, b]$ — und $f_{a,\,b,\,c}(x) = 0$ für $x \not\in [a,\, b]$

(a) Ermittle die Fouriertransformierte $\hat{f}(\Omega)$ von $f_{a,\,b,\,c}(x) = f_{1,\,2,\,3}(x)$.

(b) Ermittle die Fouriertransformierte $\hat{f}(\Omega)$ von $f_6(x) = f_{1,\,2,\,3}(x) + f_{4,\,5,\,6}(x)$.

Viel Glück!

35.6 Link zu den Lösungen

---

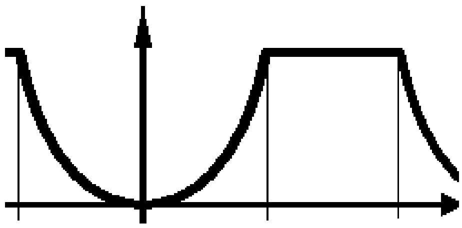
http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

35.7 Test ◇ M2–10/11–02–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

(1) Gegeben ist eine Funktion wie im Bilde gezeigt.



$$f(t) \;=\; \begin{cases} t^2 & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (\frac{\pi}{2})^2 = const. & t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\,\pi}{2}) \\ f(t + n\,2\,\pi) & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(a) Berechne die reellen Koeffizienten a_0 sowie $a_1, \ldots a_4$ und $b_1, \ldots b_4$ der Fourierreihe numerisch und präsentiere die Resultate in einer **Tabelle**.

(b) Berechne damit numerisch die absoluten Differenzen zwischen Näherungen und Funktionswerten $|\tilde{f}_4(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2})|$ sowie $|\tilde{f}_4(\frac{3\,\pi}{2}) - f(\frac{3\,\pi}{2})|$.

(c) Skizziere die Funktion sowie die berechnete Näherung möglichst exakt. Was ist zur erreichten Genauigkeit auf einen Blick zu sagen?

(d) Könnte man aus der Beziehung $f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2$ und der Fourierreihe einen Näherungswert von π berechnen? (Erwartet wird eine mathematische Erklärung).

(2) Gegeben ist die Funktion $g_1(t) = -t, \;\; t \in [-1,\, 1), \;\; T = 2$.

(a) Bestimme die Fourierreihe von $g_1(t)$.
(Anzugeben sind die ersten 4 Koeffizienten numerisch).

(b) Berechne damit die Fourierreihe von $g_2(t) = -3\,t + 2, \;\; t \in [-1,\, 1), \;\; T = 2$.
(Anzugeben sind die ersten 4 Koeffizienten numerisch.)

(c) Kann man aus den Fourierkoeffizienten von $g_1(t)$ diejenigen von $g_3(t) = -\frac{1}{2}\,t^2$, $t \in [-1,\, 1), \;\; T = 2$, berechnen? (Erwartet wird eine mathematische Erklärung).

(d) Es gilt ${g_1}'(t) = -1$. Gilt auch $\tilde{g}_1{}'(t) = -1$?
(Erwartet wird eine mathematische Erklärung).

(3) Gegeben sind die Messwerte $\{(0, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 3.5), (5, 7)\}$ $= \{(x_1, y_1), \ldots, (x_6, y_6)\}$. Man hat nun Grund zur Annahme, dass sich diese Messwerte periodisch fortsetzen, d.h. dass somit gilt: $y_k = y_{k+6}$ für alle k.

(a) Man beabsichtigt nun mittels DFT eine soweit wie möglich genaue Fourierreihe $\tilde{f}_6(t)$ für diese Messserie zu bestimmen. Berechne daher die Koeffizienten c_k numerisch (Wiedergabe in Tabellenform. Symmetrisch: c_k, $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$)

(b) Stelle die erhaltene Funktion $\tilde{f}_6(t)$ sowie die Messwerte in einer möglichst genauen Skizze dar. (Reelle Näherung!)

(c) Berechne den Wert der Fourierreihe $\tilde{f}_6(3.5)$. (Reelle Näherung!)

(d) Berechne die Abweichung des Werts der Fourierreihe $\tilde{f}_6(3.5)$ vom Wert der linearen Interpolation zwischen $(3, 2)$ und $(4, 3.5)$.

(4) Gegeben ist $f(t) = \cos(\frac{2\,t}{3}) + \sin(0.4\,t - 1)$.

(a) Skizziere die Funktion. (Hinweis: Probiere zuerst mit $t \in [0, 100]$.)

(b) Entscheide mathematisch, ob die Funktion f periodisch ist. Falls ja, so ermittle die Periode T.

(c) Versuche die Funktion in eine reelle Fourierreihe $\tilde{f}(t)$ zu entwickeln und berechne dazu numerisch $\tilde{f}_6(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{6} a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \sin(k\,\omega\,t)$. Berechne damit $|f(10) - \tilde{f}_6(10)|$ numerisch.

(d) Skizziere die Funktion nochmals möglichst exakt zwischen 0 und T, aber diesmal zusammen mit der erhaltenen Fourierreihe. Beantworte die Frage, ob die Genauigkeit der beiden Funktionen anhand der genauen Skizze noch unterscheidbar sein kann.

(e) Quadriere die Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k und berechne damit die Approximation einer neuen Fourierreihe $\tilde{h}_6(t) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{6} a_k^2 \cos(k\,\omega\,t) + b_k^2 \sin(k\,\omega\,t)$. Untersuche, ob das etwa gerade die Fourierreihe von $(f(t))^2$ ergeben könnte. Mache dazu einen Test: Berechne $\frac{(f(t))^2 - \tilde{h}_6(t)}{\tilde{h}_6(t)}$. Kommentiere das Resultat!

(5) Versuche von folgenden Funktionen die Fouriertransformierte herauszufinden:

(a) $f(x) = \cos(2\,x) + i\,\sin(2\,x)$.

(b) $f(x) = \sin(2\,x) + i\,\cos(2\,x)$.

(c) $\hat{f}(\omega) = \cos(2\,\omega) + i\,\sin(2\,\omega)$.

(6) Sei $H(x)$ die Einheitssprungfunktion mit der Sprungstelle $x = 0$ und $H(x - k)$ diejenige mit der Sprungstelle $x = k$. Sei $f(x) := \pi\,(H(x + \pi) - H(x - \pi))$.

(a) Skizziere die Funktion $f(x)$ und berechne die Fouriertransformierte von $f(x)$.

Viel Glück!

WIR1

35.8 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

Kapitel 36

Teil 2: Statistik

Die beiden Teile „Analysis“ und „Statistik“ werden hier aus softwaretechnischen Gründen in getrennten Teilen, jedoch fortlaufend nummeriert aufgeführt.

Kapitel 37

Phase 1 (I/1)

37.1 Stoffprogramm Phase 1 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

⊘ Download Skripts siehe Übungen unten (Kursmaterial, Ergänzungen, D-Software, Skripts dazu)

⊘ Offizielles Skript: Link auf der Skriptseite.

⊘ Statistik: Einführung

- Stochastik
- Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
- Deskriptive Statistik
- Mathematische, induktive Statistik
- Explorative Statistik
- Massenerscheinungen, Merkmale, Ausprägungen
- Qualitative und quantitative Ausprägungen
- Quantitativ: Zählen und messen
- Grundgesamtheit, Stichprobe, Umfang
- Urliste, Rangliste

Arbeiten

⊘ Nach dem bisher praktizierten System

⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

37.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 1

(1) Installiere die Statistik–Software **R** auf deinem privaten PC („R is a free software environment for statistical computing and graphics“.)
Link: http://www.r-project.org/

(2) Lade ab der Seite http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MasterIndex.html unter Gruppe (9), Statistik–Pakete („Intern“, mit dem dir bekanntem Passwort) ein Skriptum zur „Einführung in R“ herunter und **studiere** die Funktionsweise von R. (Es sind hier mehrere Möglichkeiten zur Auswahl gestellt. Nicht alle haben immer dieselben Vorlieben.)

(3) Nimm 5 Würfel und würfle 50 mal. Falls du keine Würfel auftreiben kannst, so sollst du mit Hilfe eines Mathematik-Programms eine Routine schreiben, die das Würfeln simuliert.

(a) Schreibe die gewürfelten Summen auf. (Z.B. Strichliste.)

(b) Mache eine Klasseneinteilung mit maximal 10 Klassen.

(c) Stelle das Resultat graphisch dar.

(d) Berechne die relativen Klassenhäufigkeiten.

(e) Berechne den Mittelwert und den Klassen–Mittelwert. Ebenso die Varianzen und Streuungen.

(f) Kommentar?

37.3 Link zu den Lösungen Phase 1

Hinweis zu MatLab:
http://rowicus.ch/Wir/Matlab_Octave/FileList.html (Teil über 3D Plots).

Hinweis zu R:
Im Übungsblatt sind Links für den Download von R sowie zu den R-Skripts angegeben.
Hinweis zu den nachstehenden Lösungen: Die Lösungen sind aus Praktikabilitätsgründen mit *Mathematica* produziert worden. In den bald 20 Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Vorteil dieses Verfahrens: Die Files mit dem reinen *Mathematica*–Source-Code in lassen sich damit sehr klein halten. Daher sind sie sehr einfach über Internet transportierbar. Es entstehen keine grossen Download–Zeiten und die Kosten des Speicherplatzes bei einem Provider übersteigen die gesetzten Grenzen nicht, denn die entstehenden File–Sammlungen haben beschränkte Grösse. Die abgearbeiteten Files mit dem Output mit Postscript-Graphiken sind allgemein sehr „schwer“, können aber jederzeit mit dem *Mathematica*–Programm aus dem Source-Code wieder erstellt werden. Dafür sind die mittels „Output beladenen Files“ erzeugten PDF-Files wieder klein, was sie transportabel macht.
Für den auf den folgenden Seiten wiedergegebene Output (bei der Alternativausgabe mittels des unten angegebenen klickbaren URL's via Internet abrufbar) sind daher die Seiten unabhängig nummeriert.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta01.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta01.nb

Kapitel 38

Phase 2 (I/2)

38.1 Stoffprogramm Phase 2 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Repetition zum Wesen der Statistik, Arten von Massenerscheinungen, Stichproben
- ⊘ Arbeitsweise der mathematischen Statistik
- ⊘ Beschreibende, deskriptive Statistik:
- ⊘ Fragen:
  - Häufigkeitsverteilungen
  - Häufigkeitsfunktion, Summenfunktion
  - Darstellungstechniken
  - Das Beispiel eines Abfüllversuches

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

38.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 2

---

(1) **Abfüllversuch:** Mit drei Gruppen wurden je 10 mal Kartonrollen in eine Schachtel abgefüllt. Alle Rollen und alle Schachteln waren etwa gleich gross. Die unten angegebenen Links führen zu den Messwerten (Daten):

Links:

Rohdaten Abfüllversuch (.txt):
http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/RohdatenAbfuellversuch_2008.txt

Rohdaten Abfüllversuch (.pdf):
http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/RohdatenAbfuellversuch_2008.pdf

Explorative Auswertung Abfüllversuch (.pdf):
http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/Abfuellversuch_2008.pdf

Explorative Auswertung Abfüllversuch (.nb):
http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/Abfuellversuch_2008.nb

Interpretiere und kommentiere die vorhandene explorative Auswertung und versuche selbst in der Sache zu übersichtlichen und aussagekräftigen Darstellungen der Daten zu gelangen.

(2) Daten:

151	0	161	5	171	6
152	0	162	7	172	4
153	1	163	5	173	3
154	1	164	5	174	2
155	2	165	6	175	3
156	3	166	7	176	1
157	3	167	5	177	1
158	5	168	5	178	1
159	6	169	6	179	0
160	4	170	5	180	0

Berechne mit Hilfe einer Statistik-Software Kenngrössen wie in einem "DispersionReport", einem "LocationReport" und einem "ShapeReport". Hilfestellung für diese Begriffe (Befehlsnamen aus einem Software-Paket):

LocationReport: Mean, HarmonicMean, Median
DispersionReport: Variance, Standard Deviation, Sample Range, MeanDeviation , MedianDeviation, QuartileDeviation
ShapeReport: Skewness, QuartileSkewness, KurtosisExcess

(3) (a) Nimm einen Würfel und würfle 30 mal.
(b) Nimm einen Würfel und würfle 100 mal.
(c) Stelle die Resultate graphisch dar. Vergleiche Mittelwerte und Varianz.
(d) Kommentar?

(4) Frage 30 Studenten nach der Aufstehzeit vom letzten Dienstag. Stelle die Daten dar. Intervalle? Vergleich in der Klasse?

(5) Anzahl N richtiger Lösungen von 6 Aufgaben und Häufigkeit $H(N)$:

N	0	1	2	3	4	5	6
$H(N)$	0	0	3	2	9	6	2

Darstellung? (Was kann man damit anfangen?)

(6) Lotto: 6 aus 39, 40, 41, 42. Gewinnchance?

38.3 Link zu den Lösungen Phase 2

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta02.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta02.nb

Kapitel 39

Phase 3 (I/3)

39.1 Stoffprogramm Phase 3 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Repetition nach Skript bis zu Häufigkeitsverteilungen, Verteilungsfunktion, Darstellungstechniken
- ⊘ Das Problem der Klassenbildungen bei einer großen Zahl von Ausprägungen
- ⊘ Kennzahlen einer Stichprobe: Lagemasse, Streumasse u.s.w.
- ⊘ Mittelwert (Lagemass), gewichtete Mittelwerte, empirische Varianz (Streumass), Standardabweichung, Standardintervall
- ⊘ Formeln, Berechnungsmethoden, Transformationen
- ⊘ **Selbststudium:** Vergleich mit der Mechanik: Massenverteilung

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

39.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 3

---

(1) Daten:

$$\begin{aligned} A &= \{1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3,4,4,4,5,5,6,6,7,8,9,10\} \\ B &= \{1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3,4,4,4,5,5,6,6,7,8,9,10,500001\} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Vergleiche Mittelwert und Median.

(2) Würfeln mit zwei Würfeln. Realisierte Ergebnismenge:

$\{(2,3)_1, (3,5)_2, (1,3)_3, (4,6)_4, (1,6)_5, (1,6)_6, (2,2)_7, (4,6)_8, (4,6)_9, (5,6)_{10}, (1,1)_{11}, (2,6)_{12}, (2,5)_{13}, (1,1)_{14}, (2,5)_{15}, (1,4)_{16}\}$

A: Mindestens eine der Zahlen ist durch 3 teilbar.
B: Beide Zahlen sind gerade.

(a) $h(A) = ?$

(b) $h(B) = ?$

(c) $h(A \cap B) = ?$

(d) $h(A \cup B) = ?$

(e) $h(G) = ?$

(3) (a) 2 mal mit 3 Würfeln würfeln. Chance, mindestens einmal 2 6–er zu würfeln = ?

(b) 2 mal mit 3 Würfeln würfeln. Chance, genau einmal 2 6–er zu würfeln = ?

(c) 2 mal mit 3 Würfeln würfeln. Chance, maximal einmal 2 6–er zu würfeln = ?

(4) $|G| = 100,\ \ |A \cup B| = 80,\ \ |A| = 50,\ \ |B| = 45,\ \ P(B \cap A) = ?$

(5) Schachtel mit 3 grünen und 7 roten Kugeln. 2 mal ziehen ohne zurücklegen. Chance nur rote Kugeln zu ziehen?

(6) Kartenspiel mit 36 Karten. 2 mal ziehen mit zurücklegen. Chance für 2 Asse?

(7) Lotto: 6 aus 42. Chance für 4 richtige Zahlen?

39.3 Link zu den Lösungen Phase 3

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta03.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta03.nb

Kapitel 40

Phase 4 (I/4)

40.1 Stoffprogramm Phase 4 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Vergleich mit der Mechanik: Massenverteilung
- ⊘ Beispiele
- ⊘ Über die Bedeutung der Masse der Stichprobe
- ⊘ Auswertung Beispiele
- ⊘ Darstellung BoxWhiskerPlot
- ⊘ Andere Plots
- ⊘ Beginn Kombinatorik

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

40.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 4

(1) **Selbststudium:** Skript, Kapitel Kombinatorik.

(2) Aus einer Sendung mit 1000 Stücken werden 50 Stücke zufällig herausgegriffen. Man stellt fest: 6 Teile sind defekt. 3 Teile haben Kratzer (A), 2 Teile haben Risse (B), 1 Teil hat Kratzer und Risse ($A \wedge B$). Die relative Häufigkeit soll als Schätzung der Wahrscheinlichkeit dienen.

$P(A \wedge B) = ?$ $\qquad P(A \vee B) = ?$

(3)

	Mutter		
	blond	dunkel	
Tochter	471	148	blond
	151	230	dunkel

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Tochter blond ist, falls die Mutter blond war.

(4) Man würfelt einmal mit 3 Würfeln. Was ist die Chance, dass alle Zahlen verschieden sind?

(5) Aus einer Sendung mit 50 Stücken werden 5 Stücke zufällig herausgegriffen. Falls alle Stücke der Stichprobe gut sind, wird die Sendung akzeptiert. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sendung akzeptiert wird, obwohl 20 % der Stücke der Sendung unbrauchbar sind?

(6) Eine Münze wird 4 mal geworfen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass zweimal Kopf und zweimal Zahl kommt? Was ist die Wahrscheinlichkeit, die Reihenfolge K-Z-K-Z zu erhalten?

40.3 Link zu den Lösungen Phase 4

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta04.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta04.nb

Kapitel 41

Phase 5 (I/5)

41.1 Stoffprogramm Phase 5 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Weitere Kenngrößen
  - Diverse Mittelwerte einer Verteilung
  - Momente einer Verteilung
  - Die Schiefe einer Verteilung
  - Kurtosis und Exzess
  - Sinn und Gefahr von Kenngrößen
- ⊘ Die 6 Fälle der elementaren Kombinatorik
  - Formeln, Begründung
  - Beispiel: Wie lange dauert es, wenn man alle Sitzordnungen einer
  - Klasse mit 30 Studierenden durchspielt und pro Platzwechsel 10 Sekunden annimmt (Zeit in Alter des Universums).

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

41.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 5

---

(1) „Würfelspiel“ mit 2 Tetraedern. Gesucht sind folgende Ereignismengen und ihre Mächtigkeiten:

(a) Menge der atomaren Ereignisse.

(b) Menge der Elementarereignisse (Fundamentalmenge) Ω.

(c) Ereignismenge $\mathcal{P}(\Omega)$ (σ–Algebra) resp. Menge aller Ereignisse .

(d) Ereignis „Summe der Punkte $= 4$“.

(e) Ereignis „Summe der Punkte ≤ 4“.

(f) Ereignis „$R_1 \leq 2 \ \wedge \ R_1 \leq 2$“.

(g) Ereignis „$R_1 \leq 1 \ \vee \ R_1 \leq 2$“.

(2) Ein Artikel besteht aus 3 Teilen A, B und C. Die Wahrscheinlichkeit, dass A defekt ist, ist 5%. Die Wahrscheinlichkeit, dass B defekt ist, ist auch 5%. Die Wahrscheinlichkeit, dass C defekt ist, ist 10%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nichts defekt ist?

(3) Man würfelt dreimal mit einem Würfel. Was ist die Chance, dass genau einmal eine Zahl grösser vier kommt?

(4) Aus einer Sendung mit 90 Stücken und 10% Ausschuss werden 9 Stücke zufällig herausgegriffen (ohne zurücklegen). Falls alle Stücke der Stichprobe gut sind, wird die Sendung akzeptiert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Stück entdeckt wird?

(5) Russisches Roulett im Film 'The deer hunters': 12 Patronenplätze pro Revolver und ein Schuss geladen .3 Spieler spielen. Jeder drückt zweimal ab (eigener Revolver).

(a) Wahrscheinlichkeit, dass sich keiner verletzt?

(b) Wahrscheinlichkeit, dass sich genau der zweite verletzt?

(c) Wahrscheinlichkeit, dass sich maximal der letzte verletzt?

41.3 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 5 L 1

---

(1) „Würfelspiel“ mit 2 Tetraedern. Gesucht sind folgende Ereignismengen und ihre Mächtigkeiten:

(a) Menge der atomaren Ereignisse.

$\rightsquigarrow \{R = 1, R = 2, R = 3, R = 4\} := \{R(1), R(2), R(3), R(4)\}$

(b) Menge der Elementarereignisse (Fundamentalmenge) Ω.

$\rightsquigarrow \{(R_1(1), R_2(1)), (R_1(1), R_2(2)), (R_1(1), R_2(3)), (R_1(1), R_2(4)),$
$(R_1(2), R_2(1)), (R_1(2), R_2(2)), (R_1(2), R_2(3)), (R_1(2), R_2(4)),$
$(R_1(3), R_2(1)), (R_1(3), R_2(2)), (R_1(3), R_2(3)), (R_1(31), R_2(4)),$
$(R_1(4), R_2(1)), (R_1(4), R_2(2)), (R_1(4), R_2(3)), (R_1(4), R_2(4))\}$

(c) Ereignismenge $\mathcal{P}(\Omega)$ (σ–Algebra) resp. Menge aller Ereignisse .

$\rightsquigarrow \{\{(R_1(1), R_2(1))\}, \{(R_1(1), R_2(2))\}, \ldots,$
$\{(R_1(4), R_2(4))\}, \{(R_1(1), R_2(1)), (R_1(1), R_2(2))\}, \ldots,$
$\{(R_1(4), R_2(3)), (R_1(4), R_2(4))\}, \ldots,$
$\{(R_1(1), R_2(1)), (R_1(1), R_2(2)), (R_1(1), R_2(3))\}, \ldots,$
$\{(R_1(1), R_2(1)), \ldots, (R_1(4), R_2(4))\}\}$

(d) Ereignis „Summe der Punkte $S = 4$“.

$\rightsquigarrow \{\{(R_1(1), R_2(3))\}, \{(R_1(2), R_2(2))\}, \{(R_1(3), R_2(1))\}\}$

(e) Ereignis „Summe der Punkte $S \leq 4$“.

$\rightsquigarrow\ (S \leq 4)\ \Leftrightarrow ((S = 2)\ \vee\ (S = 3)\ \vee\ (S = 4))$

$\rightsquigarrow \{\{(R_1(1), R_2(1))\}, \{(R_1(1), R_2(2))\}, \{(R_1(2), R_2(1))\},$
$\{(R_1(1), R_2(3))\}, \{(R_1(2), R_2(2))\}, \{(R_1(3), R_2(1))\}\}$

(f) Ereignis „$R_1 \leq 2\ \wedge\ R_1 \leq 2$“.

$\rightsquigarrow \{\{(R_1(1), R_2(1))\}, \{(R_1(1), R_2(2))\}, \{(R_1(2), R_2(1))\}, \{(R_1(2), R_2(2))\}\}$

(g) Ereignis „$R_1 \leq 1\ \vee\ R_1 \leq 2$“.

$\rightsquigarrow \{\{(R_1(1), R_2(1))\}, \{(R_1(1), R_2(2))\}, \{(R_1(1), R_2(3))\}, \{(R_1(1), R_2(4))\},$
$\{(R_1(2), R_2(2))\}, \{(R_1(3), R_2(2))\}, \{(R_1(4), R_2(2))\}\}$

41.4 Link zu den Lösungen Phase 5

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta05.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta05.nb

Kapitel 42

Phase 6 (I/6)

42.1 Stoffprogramm Phase 6 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Kombinatorik: Alle 6 klassischen Fälle, Formeln (Permutationen, Kombinationen, Variationen)
- ⊘ Beispiele mit großen Zahlen, welche erstaunen mögen!
- ⊘ **Selbststudium:**
  - Wahrscheinlichkeitsrechnung:
  - Problemstellung
  - Anwendung
  - Personen
  - Zufallsexperiment
  - Zufallsprozess
  - Die Begriffe im Zusammenhang mit dem Ereignis
  - Ereignisalgebra
  - Boolsche Algebren
  - Mächtigkeiten und Häufigkeit
  - Ereignisbäume
- ⊘ Klassische Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

42.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 6

(1) Kommentar zur Statistik und zur Darstellung?

(2) Berechne die Anzahl Möglichkeiten, 30 Studierende auf 30 Plätze zu setzen! Vergleiche die Zeit, welche es braucht um alle Sitzordnungen im 10–Sekunden–Takt auszuführen, mit dem Alter des Universums ($13.5 \cdot 10^9$ Jahre)!

(3) Berechne die Anzahl Möglichkeiten, einen Bildschirm mit 1000×1000 Pixel mit $2 \cdot 10^6$ Farben zu kolorieren!

(4) Berechne die Anzahl Möglichkeiten, beim Jassen 9 Karten aus 36 Karten zu ziehen (Ausgabe)!

(5) Würfeln mit einem Würfel:

(a) $P(X = 1) = ?\qquad P(X = 2) = ?\qquad P(X = 3) = ?\ldots$

(b) $P(1 < X < 2) = ?$

(c) $P(1 \leq X < 6) = ?$

(d) $P(\frac{2}{3} < X < \frac{5}{2}) = ?$

%

(6) Schachtel mit 4 roten Kugeln und 6 gelben Kugeln. Experiment: 2 Kugeln werden zufällig gezogen ohne zurücklegen $\rightsquigarrow$ X = Anzahl rote Kugeln.

(a) $P(X=0)=?$

(b) $P(X=1)=?$

(c) $P(X=2)=?$

(d) $P((X=0)\ \vee\ (X=1)\ \vee\ (X=2))=?$

(e) $P(X<3)=?$

(f) $P(1<X<2)=?$

(g) $P(X\leq 1)=?$

(h) $P(X\geq 1)=?$

(i) $P(X>1)=?$

(j) $P(X=1)=?$

(k) $P(0.5<X<10)=?$

(7) Urne mit 2 blauen und 3 roten Kugeln, ziehen mit zurücklegen.

(a) Wahrscheinlichkeits– oder Ereignisbaum?

(b) $P(\text{Gezogene Kugeln haben verschiedene Farben})=?$

42.3 Link zu den Lösungen Phase 6

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta06.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta06.nb

Kapitel 43

Phase 7 (I/7)

43.1 Stoffprogramm Phase 7 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Beispiele zur Kombinatorik
- ⊘ Zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:
  - Problemstellung
  - Anwendung
  - Personen
  - Zufallsexperiment
  - Zufallsprozess
  - Die Begriffe im Zusammenhang mit dem Ereignis
  - Ereignisalgebra
  - Boolsche Algebren
  - Zum Laplace-Experiment
  - Zur Wahrscheinlichkeit nach Laplace
- ⊘ **Selbststudium:**
- ⊘ Mächtigkeiten und Häufigkeit
- ⊘ Ereignisbäume
- ⊘ Klassische Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

43.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 7

Studiere im Skript die Begriffe „Wahrscheinlichkeitsfunktion“ und „Verteilungsfunktion“. Löse darauf die folgenden Aufgaben:

(1) Experiment: Würfeln mit einem Würfel. X = Anzahl erzielte Punkte.

(a) Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion?
(b) Graph der Verteilungsfunktion?

(2) Experiment: Würfeln mit zwei Würfeln. X = Anzahl erzielte Punkte.

(a) Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion?
(b) Graph der Verteilungsfunktion?

(3) Experiment: Würfeln mit drei Würfeln. X = Anzahl erzielte Punkte.

(a) Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion?
(b) Graph der Verteilungsfunktion?

(4) Experiment: Würfeln mit einem Würfel. X = Anzahl Würfe bis zum Eintreffen der ersten sechs.

(a) Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion?
(b) Graph der Verteilungsfunktion?

(5) Experiment: Werfen von vier Münzen. X = Anzahl Köpfe.

(a) Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion?
(b) Graph der Verteilungsfunktion?

(6) Experiment: Kontrolle von Werkstücken. Ziehe ohne zurücklegen 2 Stücke aus einer Urne mit 10 Stücken, worin 4 defekt sind. X = Anzahl defekte gezogene Stücke.

(a) Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion?
(b) Graph der Verteilungsfunktion?

43.3 Link zu den Lösungen Phase 7

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta07.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta07.nb

Kapitel 44

Phase 8 (I/8)

44.1 Stoffprogramm Phase 8 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Mächtigkeiten und Häufigkeit
- ⊘ Ereignisbäume
- ⊘ Beispiele
- ⊘ Klassische Wahrscheinlichkeit nach Laplace
- ⊘ Beispiele
- ⊘ **Selbststudium:** Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

44.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 8

---

(1) Experiment: Roulett. X = Winkel bezüglich gegebener Achse.

(a) $P(X \leq x) = ?$, $F(x) = ?$

(b) Graph der Verteilungsfunktion F?

(c) Graph der Wahrscheinlichkeitsdichte f?

(2)

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot k & x \in [0,2] \\ 0 & x \notin [0,2] \end{cases}$$

(a) $k = ?$

(b) Graph von f?

(c) Graph von F?

(3)

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot k & x \in [-1,1] \\ 0 & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

(a) $k = ?$

(b) Erklärung?

(4)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c \cdot e^{-\alpha \cdot x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) $c, \alpha = ?$

(b) Graph von f?

(c) Graph von F?

44.3 Link zu den Lösungen Phase 8

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta08.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta08.nb

Kapitel 45

Phase 9 (I/9)

45.1 Stoffprogramm Phase 9 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Repetition: Wahrscheinlichkeit als Maß für Gewinnchancen
- ⊘ Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
  - Begriff, Axiome, Folgerungen
  - Der Begriff Wahrscheinlichkeitsraum
  - Bedingte Wahrscheinlichkeit
  - Beispiele
- ⊘ **Selbststudium:**
  - Ereignisbäume (Skript)
  - Totale Wahrscheinlichkeit (Skript)

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

45.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 9

(1) $A = \{0, 1, \ldots 4\}$, $B = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $C = \{1, 2, \ldots, 50\}$, $D = \{1, 2, \ldots 100\}$,
$E = \{1, 2, \ldots, 1000\}$, $F = \{1_1, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 3_3, 4_1, \ldots, 10_1, \ldots, 10_{10}\}$
Berechne jeweils (falls möglich):

(a) Spannweite r

(b) Mittelwert $\bar{x}$

(c) Varianz

(d) Standardabweichung s und $\frac{s}{r}$

(e) Standardintervall

(f) Median

(g) Modus

(2) $\Omega = \{5, 6, 5, 7, 5, 8, 7, 9, 4, 10, 15, 18, 12, 15, 19, 20, 1, 3, 2, 4, 8, 6, 11, 5, 16, 17, 13, 5, 19, 4\}$

(a) Mache eine Klasseneinteilung mit maximal 10 Klassen.

(b) Stelle das Resultat graphisch dar.

(c) Berechne die relativen Klassenhäufigkeiten.

(d) Berechne den Mittelwert und den Klassen–Mittelwert. Ebenso die Varianzen und Streuungen.

(3) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ (Tetraeder–„Würfel“ .)

(a) Teilereignisse von Ω?

(b) Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse von Ω?

(4) Lotto: 6 aus 49. Chance für mindestens 3 richtige Zahlen?

(5) Gegeben: Klasse mit 30 Studenten, Jahre mit immer 365 Tagen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens je 2 Studenten am selben Tag Geburtstag?

(6) Jemand wirft eine Münze mit Durchmesser $2.0\,cm$ in ein Quadrat–Kasten mit Seitenlänge $7.0\,cm$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er eine Diagonale?

45.3 Link zu den Lösungen Phase 9

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta09.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta09.nb

Kapitel 46

Phase 10 (I/10)

46.1 Stoffprogramm Phase 10 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Test: (Gemachter Test siehe hinten)
- ⊘ **Selbststudium:**
  - Testnachbereitung
  - Ereignisbäume (Skript)
  - Totale Wahrscheinlichkeit (Skript)

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

46.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 10

---

(1) Mache eine Generalrepetition des Stoffes nach Skript! Fasse den für wichtig gehaltenen Stoff zusammen — für eine spätere Repetition auf die Modulprüfung hin.

(2) Arbeite an der Einführung in *R, Octave, Mathematica u.s.w.*!

(3) Je nach Fall: Mache zudem die Verbesserung zum letzten Test oder repetiere den Stoff für den nächsten Test.

46.3 Link zu den Lösungen Phase 10

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta10.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta10.nb

Kapitel 47

Phase 11 (I/11)

47.1 Stoffprogramm Phase 11 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- ⊘ Zufallsvariablen
- ⊘ Verteilungsfunktion
- ⊘ Verteilungstypen
- ⊘ Diskrete Verteilung
- ⊘ **Selbststudium:**
  - Von früher: Totale Wahrscheinlichkeit
  - Kontinuierliche Verteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte
  - Das Problem der Wahrscheinlichkeitsfunktion
  - Mass– oder Kennzahlen einer Verteilung
  - Allgemeines
  - Mittelwert
  - Erwartungswert
  - Symmetrische Verteilung
  - Varianz, Standardabweichung
  - Momente einer Verteilung
  - Schiefe einer Verteilung

  - Weitere Kenngrößen
  - Momentenerzeugende charakteristische Funktion

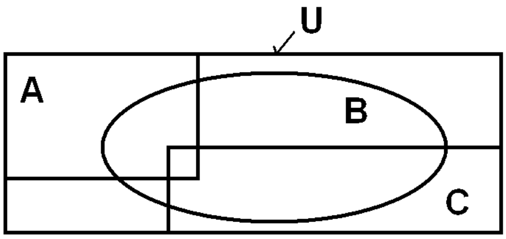
Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

47.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 11

Falls noch nicht erledigt: Verbesserung resp. Bearbeitung der letzten Prüfung!

(1) $|U| = 100$,
$|A| = |B| = |C| = 50$,
$|A \cap B| = 30$,
$|B \cap C| = 25$,
$|A \cap C| = 20$,
$|A \cap B \cap C| = 5$,
$|U \setminus (A \cap B \cap C)| = ?$,
$|U \setminus (A \cup B \cup C)| = ?$



(2) Eine Gruppe von Studenten hat die Körpergrösse von Mitstudenten gemessen. Hier sind die Messdaten (in cm): :

173	178	177	173	184	161	162	169	154	188
177	177	169	183	185	183	173	192	182	181
176	177	169	177	173	163	192	165	156	159
175	173	179	178	177	168	158	183	187	175
174	173	179	169	179	168	174	194	160	187

(a) Teilen Sie die Daten in Klassen ein mit den Klassenmitten $152, 157, 162, \ldots$ (Klassenbreite 5).

(b) Stellen Sie die Klassen in einem Balkendiagramm oder Histogramm dar.

(c) Berechne jeweils (falls möglich):

i. Spannweite r
ii. Mittelwert $\bar{x}$
iii. Varianz
iv. Standardabweichung s und $\frac{s}{r}$
v. Standardintervall
vi. Median
vii. Modus

(3) Zufallsexperiment: Zweimal ziehen einer Karte aus einem Spiel mit 36 Karten (4 Könige, gleichviele rote wie schwarze ..., mit zurücklegen.)

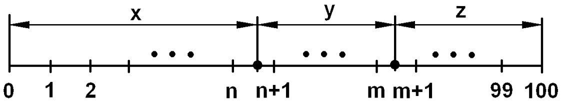
(a) Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein König kommt?

(b) Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein König oder eine rote Karte kommt?

(c) Wahrscheinlichkeit, dass einmal ein König oder eine Dame und auch einmal eine rote Karte kommt?

(4) 10 Freundinnen können unabhängig aus einem Sortiment von Pullovern mit 50 möglichen Farben zweimal einen Pullover auswählen. Jede Farbe ist jedesmal gleich wahrscheinlich. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei gleichfarbige Pullover ausgegeben werden müssen?

(5)



(a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, zwei verschiedene Marken zwischen die Zentimeter–Markierungen auf einem Massstab von 100 cm Länge zu setzen?

(b) Wieviele Lösungen (x, y, z) in $\mathbb{N}$ hat die folgende Gleichung:

$$x + y + z = 100$$

WIR

47.3 Link zu den Lösungen Phase 11

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta11.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta11.nb

Kapitel 48

Phase 12 (I/12)

48.1 Stoffprogramm Phase 12 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Test retour
- ⊘ Repetition:
  - Wahrscheinlichkeitsverteilungen
  - Zufallsvariable
  - Verteilungsfunktion
  - Verteilungstypen
- ⊘ Weiter mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen
  - Diskrete Verteilung
  - Kontinuierliche Verteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte
  - Das Problem der Wahrscheinlichkeitsfunktion
  - Beispiele
- ⊘ Mass– oder Kennzahlen einer Verteilung
  - Allgemeines
  - Mittelwert
  - Erwartungswert
  - Symmetrische Verteilung
  - Varianz, Standardabweichung

- ⊘ **Selbststudium:**
  - Momente einer Verteilung
  - Schiefe einer Verteilung
  - Weitere Kenngrössen
  - Momentenerzeugende charakteristische Funktion
  - Spezielle diskrete Verteilungen
  - Bernoulliverteilung
  - Gesetze für die Binomialverteilung
  - Poissonverteilung
  - Pascalverteilung
  - Geometrische Verteilung
  - Hypergeometrische Verteilung
  - Spezielle stetige Verteilungen
  - Allgemeines
  - Rechtecksverteilung
  - Normal– oder Gaussverteilung
  - Grenzwertsätze von Moivre Laplace
  - Lokaler Grenzwertsatz
  - Grenzwertsatz von De Moivre/ Laplace
  - Das Gesetz von Bernoulli der grossen Zahlen
  - Bemerkung zum Zufall
  - Tschebyscheffsche Ungleichung
  - Logarithmische Normalverteilung
  - Exponentialverteilung
  - Weibullverteilung
  - Gammaverteilung
  - Ausblick
  - Siehe auch Ergänzungsmaterial (Seite 31 ff)

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

48.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 12

---

(1) Spiel: Zuerst würfeln einer Zahl ≥ 5 und anschliessend ziehen eines roten Königs aus einem Kartenspiel. Danach würfeln einer 3. Gewinnchance?

(2) Von 368 Kunden sind 213 weiblich. 148 Kunden kaufen das Produkt „LuMix“. Davon sind 97 weiblich. Was ist die Chance, dass LuMix an weibliche Kunden verkauft wird? Was ist die Chance, dass ein LuMix–Käufer weiblich ist?

(3) (a) Eine nicht exponentiell wachsende Insekten–Population wächst mit der Zeit t nach dem Gesetz $p(t) = 22 + 16\,t + 3\,t^2$. Der Anteil der Rasse K wächst nach dem Gesetz $q(t) = 21+10\,t+t^2$. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit mit der Zeit, ein Exemplar der Rasse K zu fangen?

(b) Eine exponentiell wachsende Insekten–Population wächst mit der Zeit t nach dem Gesetz $f(t) = 2\,e^t$. Der Anteil der Rasse K wächst nach dem Gesetz $g(t) = \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}\,t}$. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit mit der Zeit, ein Exemplar der Rasse K zu fangen?

(c) Mit einem Würfel hat man 1000 mal gewürfelt und 289 mal eine 6 erhalten. Wie ist die Wahrscheinlichkeit zu beurteilen, eine 6 zu würfeln?

(4) In einer Urne befinden sich 4 rote, 2 gelbe, 3 grüne und 1 schwarze Kugel.

(a) Was ist die Chance, in 2 Zügen die Farben gelb und rot zu ziehen?

(b) Was ist die Chance, in 3 Zügen nur verschiedene Farben zu ziehen?

(5) Gegeben ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$.
Für $x_1 = 0$ ist $p(X = x_1) = \dfrac{1}{6}$, für $x_2 = 2$ ist $p(X = x_2) = \dfrac{1}{3}$,
für $x_3 = 3$ ist $p(X = x_3) = \dfrac{1}{12}$, für $x_4 = 5$ ist $p(X = x_4) = \dfrac{1}{12}$
und für $x_5 = 7$ ist $p(X = x_5) = \dfrac{1}{3}$.

(a) Schreibe ein Programm zur Darstellung der Sprungfunktion $h(x)$ (Einheitssprung bei $x = 0$).

(b) Schreibe ein Programm zur Darstellung der Verteilungsfunktion $F(x)$.

(c) Stelle mit dem Computer einen Plot her von $F(x)$.

(d) Stelle mit dem Computer eine Tabelle her mit den Werten $(x,\, F(x))$ an den Sprungstellen.

48.3 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 12a

---

(1) Gegeben ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$.
Für $x_1 = 0$ ist $p(X = x_1) = \frac{1}{6}$, für $x_2 = 2$ ist $p(X = x_2) = \frac{1}{3}$,
für $x_3 = 3$ ist $p(X = x_3) = \frac{1}{12}$, für $x_4 = 5$ ist $p(X = x_4) = \frac{1}{12}$
und für $x_5 = 7$ ist $p(X = x_5) = \frac{1}{3}$.

(a) Schreibe ein Programm zur Darstellung der Sprungfunktion $h(x)$ (Einheitssprung bei $x = 0$).

(b) Schreibe ein Programm zur Darstellung der Verteilungsfunktion $F(x)$.

(c) Stelle mit dem Computer einen Plot her von $F(x)$.

(d) Stelle mit dem Computer eine Tabelle her mit den Werten $(x, F(x))$ an den Sprungstellen.

48.4 Link zu den Lösungen Phase 12

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta12.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta12.nb

Kapitel 49

Phase 13 (I/13)

49.1 Stoffprogramm Phase 13 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Beantworte die folgenden Fragen:
  http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/StatistikFragenZuVerteilungen.pdf
- ⊘ Verteilungen:
  - Bernoulliverteilung
    http://de.wikipedia.org/wiki/Bernoulliverteilung
  - Gesetze für die Binomialverteilung
    http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialverteilung
  - Poissonverteilung
    http://de.wikipedia.org/wiki/Poissonverteilung
  - Hypergeometrische Verteilung
    http://de.wikipedia.org/wiki/Hypergeometrische_Verteilung
- ⊘ **Selbststudium:**
  - Geometrische Verteilung
    http://de.wikipedia.org/wiki/Geometrische-Verteilung
  - Spezielle stetige Verteilungen
  - Allgemeines
  - Rechtecksverteilung
  - Normal– oder Gaussverteilung
    http://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung

- – Pascalverteilung
- – Spezielle stetige Verteilungen
- – Allgemeines
- – Rechtecksverteilung
- – Grenzwertsätze von Moivre Laplace
- – Lokaler Grenzwertsatz
- – Grenzwertsatz von De Moivre/ Laplace
- – Das Gesetz von Bernoulli der grossen Zahlen
- – Bemerkung zum Zufall
- – Tschebyscheffsche Ungleichung
- – Logarithmische Normalverteilung
- – Exponentialverteilung
- – Weibullverteilung
- – Gammaverteilung
- – Ausblick
- – Siehe Skript und auch auch Ergänzungsmaterial (Seite 31 ff)
- – Siehe auch
  http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/StatistikFragenZuVerteilungen
  (mit Lösungen)

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

49.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 13

---

(1) Am Bahnhof A steigen pro Tag $4'000$ Fahrgäste in den Pendelzug. Am darauffolgenden Bahnhof B sind es $2'000$ Fahrgäste pro Tag. Eine Umfrage hat ergeben, dass in A 10 % Schwarzfahrer einsteigen und in B 2 %. Am darauffolgenden Bahnhof C steigt ein Kontrolleur zu. Was ist die Chance, dass er einen Schwarzfahrer erwischt?

(2) Am Bahnhof C, der sich im Noberlquatier befindet, steigen pro Tag noch zusätzlich $1'000$ Fahrgäste in den Pendelzug. Es gibt dort unter den Passagieren aber auch 1.5 % Drogendealer, die alle schwarz fahren. Andere Schwarzfahrer gibt es dort keine. Was ist die Chance, dass es sich bei einem zufällig erwischten Schwarzfahrer um einen Drogendealer handelt?

(3) Beantworte die folgenden Statistik–Fragen zu Verteilungen auf der Grundlage der Skripte:

(Verwende das Statistik-Skript und die Ergänzungen, zuerst wichtige fett gedruckt.)

(a) **Bernoulli-Verteilung:**
   i. Was ist das für eine Verteilung?
   ii. Eigenschaften?
   iii. Beispiele?

(b) **Binomial-Verteilung:**
   i. Was ist das für eine Verteilung?
   ii. Eigenschaften?
   iii. Beispiele?

(c) **Poisson-Verteilung:**
   i. Was ist das für eine Verteilung?
   ii. Eigenschaften?
   iii. Beispiele?

(d) Pascal-Verteilung:
   i. Was ist das für eine Verteilung?
   ii. Eigenschaften?
   iii. Beispiele?

(e) Geometrische Verteilung:
   i. Was ist das für eine Verteilung?
   ii. Eigenschaften?
   iii. Beispiele?

(f) **Hypergeometrische-Verteilung:**
   i. Was ist das für eine Verteilung?
   ii. Eigenschaften?

iii. Beispiele?

(g) Rechtecksverteilung:

i. Was ist das für eine Verteilung?

ii. Eigenschaften?

iii. Beispiele?

(h) **Normalverteilung:**

i. Was ist das für eine Verteilung?

ii. Eigenschaften?

iii. Beispiele?

(i) Erkläre folgende Sachverhalte und Verteilungen:

i. Zum Grenzwertsätze von Moivre Laplace

ii. Lokaler Grenzwertsatz

iii. Grenzwertsatz von De Moivre/ Laplace

iv. Das Gesetz von Bernoulli der grossen Zahlen

v. Bemerkung zum Zufall

vi. Tschebyscheffsche Ungleichung

vii. Logarithmische Normalverteilung

viii. Exponentialverteilung

ix. Weibullverteilung

x. Gammaverteilung

xi. Ausblick

(4) Binomialverteilung, Beispiel:

Siehe auch *http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialverteilung* *und*
http://de.wikipedia.org/wiki/Bernoulliverteilung

Mit einem unfaire Würfel, bei dem mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.3$ die Zahl 6 kommt, wird zehn mal gewürfelt.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man genau vier mal die 6 kommt?

(b) Skizziere die Verteilungsfunktion für die Binomialverteilung $B(10, 0.3)$ und lokalisiere dort $P(X = 4)$.

(5) Binomialverteilung, Beispiel:

Aus der Erfahrung ist bekannt, dass bei Lieferant A von 10 angekauften Pumpen durchschnittlich 2 über 6 Jahre Dauerlaufzeit ohne Schaden überstehen.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Lieferung von 20 Pumpen mindestens 5 sind, die nach 6 Jahren keinen Schaden aufweisen?

(b) Berechne den Erwartungswert (durchschnittliche Anzahl Pumpen, die nach 6 Jahren keinen Schaden aufweisen) und die Standardabweichung (Wurzel aus der Varianz).

(6) Geometrisches Modell, Beispiel:

Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Geometrische_Verteilung

In einem Einfüllzylinder einer Montagemaschine befinden sich etwa 1000 Schrauben vom Lieferanten A. Wird eine Schraube von der Maschine montiert, so wird automatisch von einem Förderband wieder eine Schraube in den Zylinder nachgeliefert. Der Zylinder dient demnach als Puffer. Bei der Eingangskontrolle anlässlich der Anlieferung der Schrauben wurden zehn Prozent auf ihre Qualität geprüft und am Kopf rot markiert.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einer Maschine 1, 2, 3, u.s.w., 19 oder 20 rot markierte Schrauben eingebaut werden?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 Schrauben nur nicht rot markierte (d.h. unmarkierte Schrauben) eingebaut werden?

(c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der eingebauten roten Schrauben.

(7) Hypergeometrisches Modell, Beispiel:

Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Hypergeometrische_Verteilung

(a) In einer Schachtel befinden sich 26 weisse und 4 graue Mäuse. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim zufälligen Einfangen von 5 Mäusen 2 graue erwischt?

(b) Bei der Produktion von Plastic–Gehäusen sind erfahrungsgemäss 3% Ausschuss. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man in einer Stichprobe von 10 Gehäusen aus einer Lieferung von 100 Gehäusen, k Ausschussgehäuse findet?

  i. $k = 0$

  ii. $k = 1$

  iii. $k = 2$

  iv. $k = 3$

  v. Berechne für den betrachteten Fall den Erwartungswert und die Standardabweichung.

49.3 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 13a

(1) Am Bahnhof A steigen pro Tag $4'000$ Fahrgäste in den Pendelzug. Am darauffolgenden Bahnhof B sind es $2'000$ Fahrgäste pro Tag. Eine Umfrage hat ergeben, dass in A 10 % Schwarzfahrer einsteigen und in B 2 %. Am darauffolgenden Bahnhof C steigt ein Kontrolleur zu. Was ist die Chance, dass er einen Schwarzfahrer erwischt?

(2) Am Bahnhof C, der sich im Noberlquatier befindet, steigen pro Tag noch zusätzlich $1'000$ Fahrgäste in den Pendelzug. Es gibt dort unter den Passagieren aber auch 1.5 % Drogendealer, die alle schwarz fahren. Andere Schwarzfahrer gibt es dort keine. Was ist die Chance, dass es sich bei einem zufällig erwischten Schwarzfahrer um einen Drogendealer handelt?

49.4 Link zu den Lösungen Phase 13

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta13.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta13.nb

Anhang Phase 13

49.5 Übungen zur Statistik: Fragen zu Verteilungen

---

(1) Beantworte die folgenden Statistik–Fragen zu Verteilungen auf der Grundlage der Skripte:

(Verwende das Statistik-Skript und die Ergänzungen, zuerst wichtige fett gedruckt.)

(a) **Bernoulli-Verteilung:**
  i. Was ist das für eine Verteilung?
  ii. Eigenschaften?
  iii. Beispiele?

(b) **Binomial-Verteilung:**
  i. Was ist das für eine Verteilung?
  ii. Eigenschaften?
  iii. Beispiele?

(c) **Poisson-Verteilung:**
  i. Was ist das für eine Verteilung?
  ii. Eigenschaften?
  iii. Beispiele?

(d) Pascal-Verteilung:
  i. Was ist das für eine Verteilung?
  ii. Eigenschaften?
  iii. Beispiele?

(e) Geometrische Verteilung:
  i. Was ist das für eine Verteilung?
  ii. Eigenschaften?
  iii. Beispiele?

(f) **Hypergeometrische-Verteilung:**
  i. Was ist das für eine Verteilung?
  ii. Eigenschaften?
  iii. Beispiele?

(g) Rechtecksverteilung:
  i. Was ist das für eine Verteilung?
  ii. Eigenschaften?
  iii. Beispiele?

(h) **Normalverteilung:**

i. Was ist das für eine Verteilung?
ii. Eigenschaften?
iii. Beispiele?

(i) *Erkläre folgende Sachverhalte und Verteilungen (mit Hilfe der Literatur und der Skripte):*
   i. Zum Grenzwertsätze von Moivre Laplace
   ii. Lokaler Grenzwertsatz
   iii. Grenzwertsatz von De Moivre/ Laplace
   iv. Das Gesetz von Bernoulli der grossen Zahlen
   v. Bemerkung zum Zufall
   vi. Tschebyscheffsche Ungleichung
   vii. Logarithmische Normalverteilung
   viii. Exponentialverteilung
   ix. Weibullverteilung
   x. Gammaverteilung
   xi. Ausblick

(2) Einige Erläuterungen:

(a) **Bernoulli-Verteilung:**

i. Um was handelt es sich?

Die Bernoulli–Verteilung ist eine „atomare“ Binomialverteilung mit $n = 1$ und $k = 0$ oder $k = 1$:

$$P(k) := P(X = k) := Be(k, p) = Bi(1, k, p), \;\; k \in \mathbb{N}_0, \;\; k \leq 1$$

ii. Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Bernoulli-Verteilung
Veranschaulichung: Galton-Brett, siehe
http://de.wikipedia.org/wiki/Galtonbrett

(b) **Binomial-Verteilung:**

i. Um was handelt es sich?

Sei z.B. $p = \frac{g}{m}$. Oder p sei als Grenzwert einer relativen Häufigkeit gegeben, $q = 1 - p$.

$$P(k) := P(X = k) := Bi(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k \, q^{(n-k)}, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; k \in \mathbb{N}_0, \;\; k \leq n$$

In einem unendlich grossen Vorrat (Kiste, Urne) sind zwei Typen von Elementen A und B vorhanden. A kann immer mit der Wahrscheinlichkeit p und B mit der Wahrscheinlichkeit q gezogen werden.
Statt aus einem unendlichen Vorrat kann man auch aus einem endlichen Vorrat mit Zurücklegen ziehen.
Zieht man nun n Elemente, wovon k Elemente vom Typ A und der Rest, d.h. $n - k$ Elemente, vom Typ B sind, so multiplizieren sich der Unabhängigkeit wegen die Wahrscheinlichkeiten: $p \cdot p \cdot \ldots \cdot p \cdot q \cdot \ldots \cdot q = p^k \, q^{(n-k)}$. Dabei kann Typ A in der Reihenfolge auf $\binom{n}{k}$ Arten aus den n Elementen gezogen werden. Der Rest ist jeweils vom Typ B.

Es geht also hier um die Frage, was die Wahrscheinlichkeit ist bei n Zügen k mal Typ A zu ziehen und als Rest Typ B zu erhalten, wenn die Wahrscheinlichkeit für A und B bei jedem Zug dieselbe bleibt.

ii. Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialverteilung
Veranschaulichung: Galton-Brett, siehe
http://de.wikipedia.org/wiki/Galtonbrett

(c) **Poisson-Verteilung:**

i. Um was handelt es sich?

Wird ein Bernoulli-Experiment sehr oft durchgeführt und ist die Erfolgswahrscheinlichkeit p sehr klein, so ist die Poisson–Verteilung eine gute Näherung für die entsprechende Binomial–Verteilung. Man bezeichnet daher die Poisson–Verteilung manchmal als die **Verteilung der seltenen Ereignisse**. Man sagt: Zufallsvariablen mit einer Poisson-Verteilung „genügen dem Poisson-Prozess". Druch eine Grenzwertbetrachtung oder eine differentielle Betrachtung gewinnt man mit $\lambda =$ Erwartungswert $=$ Varianz:

$$P(k) := P(X = k) := P_\lambda(X = k) := Po(\lambda, k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-k} = \lim_{n\to\infty} Bi(n, k, \frac{\lambda}{n}),\ \ p = \frac{\lambda}{n}$$

Beispiele: Die Poissonverteilung $P_\lambda(n)$ mit $\lambda = \dfrac{t_2}{t_1} = n \cdot p$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass im Zeitraum t_2 genau n unabhängige Ereignisse stattfinden. λ ist „die mittlere Auftretenshäufigkeit eines Ereignisses".
Praktische Beispiele: Blitzeinschlagstatistik, Eintrittstatistik in ein Warenhaus, Statistik des radioaktiven Zerfalls u.s.w.

ii. Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Poisson-Verteilung

(d) **Pascal-Verteilung:**

i. Um was handelt es sich?

Die Pascal–Verteilung heisst auch **negative Binomialverteilung**.
Wie bei der Binomialverteilung wird aus einer Urne, in dem sich Objekte vom Typ A und vom Typ B befinden, mit Zurücklegen gezogen.
Dabei wird so lange ein Element von Typ A gezogen und wieder zurückgelegt, bis zum ersten Mal genau k solche Elemente vorhanden sind. Damit definieren wir eine Zufallsvariable $X :=$ „Zahl der Versuche, bis erstmals k Erfolge resultiert haben". k ist dabei vorgegeben. Daher variiert man die Zahl n der Versuche. X kann somit die Werte k, $k + 1, \ldots, n_1, \ldots$ annehmen. X hat also abzählbar unendlich viele Ausprägungsmöglichkeiten.
Angenommen, bei $n - 1$ Versuchen habe man $k - 1$ Erfolge gehabt. Dann ist mit der Zufallsvariablen $Y :=$ „Zahl der Elemente Sorte A bei $n - 1$ Versuchen":

$$P(Y = k - 1) := Bi(n - 1, k - 1, p) = \binom{n-1}{k-1} p^{(k-1)}\, q^{(n-1-(k-1))}$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass nochmals ein Element der Sorte A gezogen wird:

$$P(X = n) := P(Y = k - 1) \cdot p = \binom{n-1}{k-1} p^k\, q^{(n-k)}$$

ii. Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Pascal-Verteilung .
(Beachte den Hinweis, wieso die Verteilung „negativ"genannt wird.)

(e) **Geometrische Verteilung:**

i. Um was handelt es sich?

Bei der geometrischen Verteilung geht es beim zugehörigen Bernoulli–Experiment um die Wahrscheinlichkeit, dass man bei n Ziehungen exakt beim $n+1$–ten Versuch Erfolg hat. Vorher hatte man n mal Misserfolg (eine Möglichkeit!):

$$P(Y = n) = p^1\, q^n = p\, q^n$$

Eine andere Definitionsart ist, dass man n Versuche bis zum ersten Erfolg benötigt, total also n Versuche:

$$P(X = n) = p^1\, q^{(n-1)} = p\, q^{(n-1)}$$

Anwendungen: Wartezeitenanalyse, Wahrscheinlichkeiten der Lebensdauer von Bauteilen u.s.w.
Die geometrische Verteilung ist ein Spezialfall der Pascal–Verteilung.

ii. Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Geometrische_Verteilung

(f) **Hypergeometrische-Verteilung:**

i. Um was handelt es sich?

Bei der hypergeometrischen Verteilung gehen wir wieder wie beim Bernoulli–Experiment von einer zweitypigen Grundgesamtheit (Typen A, B) aus. Wir ziehen zufällig n Elemente nacheinander ohne Zurücklegen.
Die hypergeometrische Verteilung gibt dann Auskunft darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit in der Stichprobe n_1 Elementen vom Typ A vorkommen. Gegeben sei eine Grundgesamtheit des Umfangs $N = n_1 + n_2$, n_1 Elemente sind vom Typ A, n_2 Elemente vom Typ B. M Elemente werden herausgegriffen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man genau k Treffer (Typ A) herausgreift?

$$P(X = k) := Hyp(n_1, n_2, M, k) = \frac{g}{m} = \frac{\binom{n_1}{k} \cdot \binom{n_2}{M-k}}{\binom{n_1+n_2}{M}} = \frac{\binom{n_1}{k} \cdot \binom{n_2}{M-k}}{\binom{N}{M}}$$

Diese Verteilung ist in der Qualitätskontrolle bedeutend.

ii. http://de.wikipedia.org/wiki/Hypergeometrische_Verteilung

(g) **Rechteckverteilung oder stetige Gleichverteilung:**

i. Um was handelt es sich?

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$

Bedeutung: Eine stetige Zufallsvariable X heisst gleichverteilt auf dem Intervall $[a,\, b]$, wenn eine Rechteckverteilung für $f(x)$. vorliegt.

Wichtig: Zufallszahlengeneratoren!

ii. Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Rechteckverteilung

(h) **Normalverteilung oder Gauss–Verteilung:**

i. Um was handelt es sich?

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\, e^{\frac{1}{2}\,(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Dabei ist μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung.

Die besondere Bedeutung der Normalverteilung ist unter anderem durch den zentralen Grenzwertsatz bedingt. Dieser zeigt, dass eine Summe von n unabhängigen und identisch verteilten (d.h. ihre Verteilungen sind gleich) Zufallsvariablen im Grenzwert normalverteilt ist. Wenn also eine Zufallsvariable durch Überlagerung einer großen Zahl von Einflüssen entstehen, wobei jeder einzelne Einfluss einen im Vergleich zur Gesamtsumme unbedeutenden Beitrag liefert, so kann man sie als normalverteilt ansehen. Bei vielen Vorgängen des Ingenieurbereichs, aber auch der Natur– oder der Wirtschaftswissenschaften ist das in guter Näherung der Fall.

ii. Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung

Kapitel 50

Phase 14 (I/14)

50.1 Stoffprogramm Phase 14 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- Punktschätzer: Näherungswerte für empirisch gemessene Parameter
- Genauigkeit von Punktschätzern: Konfidenz- oder Vertrauensintervalle
- Beispiele
- Siehe Skript und auch auch Ergänzungsmaterial (ca. Seite 78 ff)
- Siehe auch
  http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/StatistikFragenZuVertrauensinterv
  — „StatistikFragenZuVertrauensintervallenUndTests.pdf“ eingeben
- **Selbststudium:**
  - Skript zum Thema lesen
  - Ergänzungen zum Thema lesen
  - Siehe auch Wikipedia
    http://de.wikipedia.org/wiki/Punktsch%C3%A4tzer — „Punktschätzer“ eingeben
    http://de.wikipedia.org/wiki/Stichprobe
    http://de.wikipedia.org/wiki/Vertrauensintervall
    http://de.wikipedia.org/wiki/Konfidenzintervall
    http://de.wikipedia.org/wiki/Statistischer_Test
    http://de.wikipedia.org/wiki/Vorzeichentest
    http://de.wikipedia.org/wiki/Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

50.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 14

(1) Empirisch gewonnene Daten:

151	0	161	5	171	6
152	0	162	7	172	4
153	1	163	5	173	3
154	1	164	5	174	2
155	2	165	6	175	3
156	3	166	7	176	1
157	3	167	5	177	1
158	5	168	5	178	1
159	6	169	6	179	0
160	4	170	5	180	0

Durch diese Messdaten ist eine natürliche Klasseneinteilung gegeben. Die relative Klassenhäufigkeit wird als Wahrscheinlichkeit angenommen. Skizziere die empirische Wahrscheinlichkeitsfunktion und die empirische Verteilungsfunktion.

(2) Es wird mit drei Würfeln gewürfelt. Die Summen der Augenzahlen werden als Werte der Zufallsvariablen definiert. Zeichne die ideale Wahrscheinlichkeitsfunktion und die ideale Verteilungsfunktion (Laplace–Experiment).

(3) Poisson–Verteilung, Beispiel:

Siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/Poisson-Verteilung`

Auf dem Monte Tempesta schlägt in einer Sommerwoche durchschnittlich alle 10 Minuten (t_1) ein Blitz in einen Experimentiermast auf dem Gipfel ein. Werden nun im Takt von 60 Minuten (eine Stunde) die Blitze gezählt, so würde man im Mittel 6 Blitze erwarten ($\lambda =$ Anzahl Blitze pro Stunde), die in den Mast einschlagen. $P_\lambda(n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass in der innerhalb einer Stunde (t_2) genau n Blitze in den Mast einschlagen.

(a) Berechne $P_\lambda(n)$ für $n = 0, \ldots, 20$.

(b) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung.

(4) Pascal–Verteilung, Beispiel:

Siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/Negative_Binomialverteilung`

Herr Gork Busch verkauft an einer Waffenmesse automatische Schusswaffen. Aus seiner Erfahrung ist ihm bekannt, dass er bei jedem fünften Besucher seines Messestandes Erfolg hat. Er hat beschlossen, nach dem zehnten Verkaufserfolg mit seinen Kollegen eine Flasche zu öffnen um seinen Erfolg zu begiessen. Eine Verhandlung mit einem Kunden dauert etwa vier Minuten. Die Kunden stehen wegen seinem Produkt Schlange, denn die Messen findet in Texas statt und wir erleben gerade Zeiten von grosser Unsicherheit, nicht nur wegen der Tropenstürme.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Gork Busch nach zwei Stunden seine Flasche öffnen, d.h. nach etwa dreissig Standbesuchern?

(b) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für diese Verteilung.

(5) Rechteckverteilung oder stetige Gleichverteilung, Beispiel:

Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Stetige_Gleichverteilung

Ein Zufallsgenerator soll Dezimalzahlen auf 14 Nachkommastellen zwischen 0 und 1 liefern.

(a) Beschreibe mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion das Wahrscheinlichkeitsverhalten.

(b) Berechne dazu den Erwartungswert und die Standardabweichung.

(6) Normalverteilung oder Gauss–Verteilung, Beispiel:

Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung

Bei der Produktion von Präzisionswellen mit dem Durchmesser $5.295\,mm$ ist durch Meßserien ein mittlerer Fehler (Standardfehler) von $0.003\,mm$ festgestellt worden. Da eine Grossserie von $100'000$ Stück geplant ist, soll der Durchmesser durch eine Normalverteilung mit $\sigma = 0.003\,mm$ und $\mu = 5.295\,mm$ beschrieben werden.

(a) Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Welle grösser als $0.005\,mm$ ist.

(b) Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass eine Welle dicker als $5.298\,mm$ ist.

(c) Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Welle kleiner als $0.002\,mm$ ist (Güteklasse A).

(7) Approximation duch eine Normalverteilung, Beispiel:

Siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung

Für sehr große Werte von n kann diese Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden (Satz von Moivre-Laplace, zentraler Grenzwertsatz). Dabei ist der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

Für $\sigma > 3$ kann man folgende Näherung brauchen:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{k=x_1}^{x_2} \binom{n}{k} p^k \, q^{n-k} \approx \Phi(\frac{x_2 + 0.5 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1 - 0.5 - \mu}{\sigma})$$

Die Verkleinerung der unteren Grenze um 0.5 und die Vergrösserung der oberen Grenze um denselben Wert heisst **Stetigkeitskorrektur**. Damit erhält man eine bessere Approximation bei einer geringen Standardabweichung.

Problem im Anschluss an Aufgabe 4, Serie 13:

Mit einem unfaire Würfel, bei dem mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.3$ die Zahl 6 kommt, wird $100'000$ mal gewürfelt.

(a) Berechne μ und σ und entscheide, ob die obige Approximation zulässig ist.

(b) Benütze nun die obige Approximation mit der Stetigkeitskorrektur. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens $10'000$ und maximal $90'000$ mal die 6 kommt?

(c) Approximiere die Binomialverteilung durch die Normalverteilung diesmal ohne die Stetigkeitskorrektur. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens $10'000$ und maximal $90'000$ mal die 6 kommt und vergleiche das Resultat mit dem Resultat der letzten Teilaufgabe.

50.3 Link zu den Lösungen Phase 14

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta14.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta14.nb

Anhang Phase 14

50.4 Übungen zur Statistik: Fragen zu Vertrauensintervallen und Tests

---

Beantworte die folgenden Statistik–Fragen zu Vertrauensintervallen und Tests der Skripte:

(Verwende das Statistik-Skript und die Ergänzungen, zuerst wichtige fett gedruckt.)

(1) Punktschätzer:

(a) Was ist ein Punktschätzer für einen Parameter? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 78 ff oder wikipedia.)

(b) Warum braucht man den Begriff „Punktschätzer“? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 78 ff oder wikipedia.) (Siehe z.B. Ergänzungen p. 78 ff oder wikipedia.)

(c) http://de.wikipedia.org/wiki/Punktsch%C3%A4tzer
http://de.wikipedia.org/wiki/Stichprobe

(d) Beispiele für Parameter, die man schätzen muss? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 78 ff.)

(e) Was ist die Erwartungstreue bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)

(f) Was ist die Konsistenz bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)

(g) Was ist die Wirksamkeit bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)

(h) Was ist die Effizienz bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)

(i) Wann ist eine Schätzung optimal? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 80 ff.)

(2) Maximum–Likelihood–Verteilung

(a) Was ist die Maximum–Likelihood–Verteilung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 83 ff.)

(b) *Kann bei der ersten Lesung ausgelassen werden.*

(3) Vertrauensintervalle oder Konvidenzintervalle:

(a) Wie steht es mit der Genauigkeit eines Punktschätzers? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 86 ff.)

(b) Was ist ein Vertrauensintervall?

(c) Was ist ein Konvidenzintervall?

(d) http://de.wikipedia.org/wiki/Vertrauensintervall

(e) Was ist der Konfidenzkoeffizient $\gamma = 1 - \alpha$? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 86 ff.)

(f) Was ergibt sich für eine Vertrauensintervalllänge, wenn in Beispiel 2 (siehe Ergänzungen p. 87) die Werte wie folgt gewählt werden: $P = 0.95,\ \ c = 1.96,\ \ \bar{x} = 4,\ \ \sigma = 3,\ \ n = 1000$?

%

(4) Statistische Tests:

(a) Was ist ein statistischer Test? (Siehe z.B. wikipedia.)

(b) `http://de.wikipedia.org/wiki/Statistischer_Test`

(c) Was ist der Vorzeichentest? (Siehe z.B. wikipedia.)

(d) `http://de.wikipedia.org/wiki/Vorzeichentest`

(e) Was ist der Rangtest? (Siehe z.B. wikipedia.)

(f) `http://de.wikipedia.org/wiki/Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test`

Kapitel 51

Phase 15 (I/15)

51.1 Stoffprogramm Phase 15 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Das Problem des Mittelwerts und der Standardabweichung bei Veränderung eines Datensatzes, wenn nur noch die zu ändernden Daten und Mittelwerts und Standardabweichung bekannt sind. (Skript)
- ⊘ Besprechungen von Übungen (aus den Serien 13,14,15,16)
- ⊘ Übung: Konfidenzintervall für den Mittelwert bei Normalverteilung und bekannter Standardabweichung resp. Varianz

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

51.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 15

(1) Daten:

151	0	161	5	171	6
152	0	162	7	172	4
153	1	163	5	173	3
154	1	164	5	174	2
155	2	165	6	175	3
156	3	166	7	176	1
157	3	167	5	177	1
158	5	168	5	178	1
159	6	169	6	179	0
160	4	170	5	180	0

Durch diese Messdaten ist eine natürliche Klasseneinteilung gegeben. Die relative Klassenhäufigkeit wird als Wahrscheinlichkeit angenommen. Berechne μ.

(2) Es wird mit drei Würfeln gewürfelt. Die Summen der Augenzahlen werden als Werte der Zufallsvariablen definiert. Berechne μ.

(3) Ein Tennisball wird auf ein Hausdach geworfen, von wo er in die 14 m lange Dachrinne hinunterrollt. Für Längenposition auf der Dachrinne verwenden wir ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in der Mitte der Rinne. Für die Auftreffposition ist eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x) = a \cdot (e^{-x^2} - b)$ so zu modellieren, dass für die Verteilungsfunktion $F(x)$ gilt: $F(-7) = 0, \;\; F(+7) = 1$.

(a) Berechne a und b.

(b) Skizziere f und F.

(4) Weitere Fragen zur Statistik (wichtig für Modulprüfung)

(a) Was ist ein Punktschätzer für einen Parameter? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 78 ff oder wikipedia.)
`http://de.wikipedia.org/wiki/Punktsch%C3%A4tzer`
`http://de.wikipedia.org/wiki/Stichprobe`

(b) Warum braucht man den Begriff „Punktschätzer"? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 78 ff oder wikipedia.)

(c) Beispiele für Parameter, die man schätzen muss? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 78 ff.)

(d) Was ist die Erwartungstreue bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)

(e) Was ist die Konsistenz bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)

(f) Was ist die Wirksamkeit bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)

(g) Was ist die Effizienz bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)

(h) Wann ist eine Schätzung optimal? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 80 ff.)

(i) Was ist die Maximum–Likelihood–Verteilung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 83 ff.) *Kann bei der ersten Lesung ausgelassen werden.*

(j) Wie steht es mit der Genauigkeit eines Punktschätzers? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 86 ff.)

(k) Was ist ein Vertrauensintervall? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 86 ff oder wikipedia.) `http://de.wikipedia.org/wiki/Vertrauensintervall`

(l) Was ist ein Konfidenzintervall? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 86 ff oder wikipedia.) `http://de.wikipedia.org/wiki/Konfidenzintervall`

(m) Was ist der Konfidenzkoeffizient $\gamma = 1 - \alpha$? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 86 ff.)

(n) Was ergibt sich für eine Vertrauensintervalllänge, wenn in Beispiel 2 (siehe Ergänzungen p. 87) die Werte wie folgt gewählt werden: $P = 0.95,\ c = 1.96,\ \bar{x} = 4,\ \sigma = 3,\ n = 1000$?

(o) Was ist ein statistischer Test? (Siehe z.B. wikipedia.) `http://de.wikipedia.org/wiki/Statistischer_Test`

(p) Was ist der Vorzeichentest? (Siehe z.B. wikipedia.) `http://de.wikipedia.org/wiki/Vorzeichentest`

(q) Was ist der Rangtest? (Siehe z.B. wikipedia.) `http://de.wikipedia.org/wiki/Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test`

(5) In der Literatur (*)[1] ist folgender Sachverhalt beschrieben:
Zur Bestimmung der Streckgrenze einer Stahlsorte A hat man $n = 145$ Messungen durchgeführt. Daraus konnte man das arithmetische Mittel zu $\bar{x} = 314.0\, N/mm^2$ bestimmen. $\bar{x}$ ist bekanntlich ein geeigneter Punktschätzer für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit. Aus der Erfahrung weiss man, dass das Streumass σ der Grundgesamtheit ziemlich genau durch den Wert $\sigma^2 = 1000\,(N/mm^2)^2$ gegeben ist. Weiter weiss man aus der Erfahrung, dass die mittlere Streckgrenze mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit eine normalverteilte Zufallsgrösse $\bar{X}$ ist (mit der Normalverteilung $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$).
Daraus möchte man Genauigkeitsschranken oder Vertrauensgrenzen für den Mittelwert μ der Halbjahresproduktion bestimmen. Es ist bei der Firma üblich, in solchen Fällen Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau $\varepsilon =$ oder $\lambda = 0.99 = 1 - \alpha$ anzugeben. Bestimme das Konfidenzintervall $[c_{\alpha/2}, c_{1-\alpha/2}]$.

(6) Bei der Produktion von Süssigkeiten werden 2 Typen von verschiedenfarbigen Bonbons mit unterscheidbaren Aromen hergestellt. Bis anhin wurden die Typen getrennt verpackt und in alle Welt versandt: Rote mit der Verpackungsaufschrift R und blaue mit er Aufschrift B. Nun hat es sich gezeigt, dass die Etiketten mit den Aufschriften R und B in verschiedenen asiatischen Ländern, wo die Abpackung in lokale Verkaufstüten stattfindet, nicht richtig gelesen werden können, da dort andere Schriften verwendet werden. Die eine Abpackungsstation hatte daher öfters nur R erhalten, die andere nur B. Das hat zu Gewinneinbrüchen geführt.

[1] Gefunden in: Storm, Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle, Fachbuchverlag Leipzig, Köln

Es soll daher untersucht werden, welche Risiken ein Mischversand bietet. Man möchte somit 2000 Bonbons vom Typ R und 2000 vom Typ B in Versandkisten schütten und gut mischen. Lokal sollen dann daraus Tüten von je 20 Bonbons abgepackt werden. Man geht dabei von einer zufälligen Ziehung einer Stichprobe mit $n = 20$ aus.

(a) Handelt es sich beim Ziehen der Stichprobe um ein Bernoulliexperiment? Ermittle allenfalls die Wahrscheinlichkeitsfunktion.

(b) Ermittle die Chance, mit der in einer Verkaufstüte mindestens 5 Bonbons vom Typ R und mindestens 5 vom Typ B zu finden sind.

(c) Formuliere das Ergebnis in der Sprache der Vertrauensintervalle und berücksichtige dabei das Konfidenzniveau.

(7) Mit Automaten werden Präzisionswellen für Mikromotoren in der Computertechnik fabriziert. Diese sollen zu zu einem hohen Grade langfristig zuverlässig sein. Daher wird die Qualität dauernd überwacht. In Experimenten werden die Automaten der Reihe nach überwacht. Automat $A1$ zeigt nun bei einer Analyse die folgenden Ausschusszahlen pro Minute:

Defekte pro Min.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Abs. Häufigkeit	56	202	381	526	530	404	270	56	137	44	26	9	3

In 56 Fällen wurden danach bei der Messung 0 defekte Wellen registriert. Mehr als 12 defekte Wellen kamen bei der Überwachung nicht vor.
Man weiss aus der Erfahrung, dass die gemessene Verteilung gut durch eine Poisson–Verteilung angenähert werden kann. Dabei ist $x_0 = 0,\ \ x_1 = 1, \ldots, x_{12} = 12$. Dazu gehören die gemessenen Häufigkeiten $h_0 = \frac{56}{(56+202+...+3)},\ \ h_1 = \frac{202}{(56+202+...+3)}$.

(a) Der Parameter λ oder μ bei der Poisson–Verteilung soll durch den Mittelwert aller Messungen $\hat{x}_i$ geschätzt werden. Ermittle damit die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 12 Ausschusswellen pro Miniute produziert werden: $P_a(X > 12) = \,?$ (Verlustgrenze für die Firma.)

(b) Der Parameter λ oder μ bei der Poisson–Verteilung soll durch die Varianz σ^2 geschätzt werden, denn bei der Poisson–Verteilung ist $\mu = \sigma^2$. Ermittle auch bei diesem Verfahren die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 12 Ausschusswellen pro Miniute produziert werden: $P_b(X > 12) = \,?$ (Verlustgrenze für die Firma.)

51.3 Link zu den Lösungen Phase 15

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta15.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta15.nb

Kapitel 52

Phase 16 (I/16)

52.1 Stoffprogramm Phase 16 ◇ M ◇

Statistik, 1 Semester

- ⊘ Besprechungen von Übungen (aus den Serien 15,16)
- ⊘ Übung:
  - Vorzeichentest
  - Probleme mit Binomialverteilung
  - Testvorbereitung
- ⊘ **Selbststudium:** Angegebene Übungen

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

52.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ I / 16

---

(1) Schiefe: $\gamma = \frac{1}{\sigma^3} \cdot E((X-\mu)^3)$

Sei

$$f(x,p) \;=\; \begin{cases} \frac{\sqrt{p}\left(-p^{\frac{3}{2}}+\sqrt{8+p^3}\right)}{2} + p\,x & ,\ x \in [\frac{-\left(-p^{\frac{3}{2}}+\sqrt{8+p^3}\right)}{2\sqrt{p}}, 0) \\ \frac{\sqrt{p}\left(-p^{\frac{3}{2}}+\sqrt{8+p^3}\right)}{2} - \frac{\left(-p^{\frac{3}{2}}+\sqrt{8+p^3}\right)x}{2\sqrt{p}} & ,\ x \in [0,p] \end{cases}$$

Sei $f(x,p) = 0,\ x \notin [\frac{-\left(-p^{\frac{3}{2}}+\sqrt{8+p^3}\right)}{2\sqrt{p}}, p]$

(a) Untersuche das Verhalten von $f(x,p)$ in Abhängigkeit von p (Plot).

(b) Untersuche das verhalten der Schiefe γ in Abhängigkeit von p (Plot).

(2) Vorzeichentest:

Bei der Qualitätsprüfung anlässlich der Herstellung von Schrauben stehen zwei Prüfverfahren A und B zur Auswahl, bei denen man das maximale Drehmoment beim Einschrauben in eine Präzisionsmutter misst. Es werden nun 25 Schrauben je mit beiden Verfahren geprüft. In 4 Fällen zeigt das Verfahren B ein grösseres Drehmoment als das Verfahren A. In 3 Fällen sind die Drehmomente innerhalb der Ablesegenauigkeit nicht unterscheidbar. Im Rest der Fälle zeigt jedoch das Verfahren A ein grösseres Drehmoment als das Verfahren B.
Wir stellen nun die **Hypothese** H_0 auf: „Die beiden Verfahren sind nicht wesentlich verschieden, d.h. das Resultat beim Verfahren A ist gleich dem Resultat beim Verfahren B."
H_0 vergleichen wir mit der **Alternativhypothese** H_1: „Die beiden Verfahren sind wesentlich verschieden, d.h. das Resultat beim Verfahren A ist ungleich dem Resultat beim Verfahren B."

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter Annahme von H_0 bei den gegebenen Zahlen eine Abweichung der beiden Verfahren auftritt, dass also H_0 falsch sein muss.

%

(3) Datensatzänderung, Datehsatzkorrketur:

Gegeben ist von einem Datensatz mit $n = 4984$ Messungen der gerundete Mittelwert $\bar{x}_n = 652$ und die gerundete Standardabweichung $StD = 184$. Weiter ist bekannt, dass die Messungen in Klassen eingeteilt worden waren. Es handelt sich also hier approximativ um Mittelwert und Standardabweichung von mittleren Klassenwerten.
Nun ist bekannt geworden, dass eine Messvorrichtung, mit der $j = 196$ Werte gemessen worden sind, die Klassenwerte 650 statt richtig 670 geliefert hat. Ebenfalls sind bei dieser Messvorrichtung 212 Werte der Klassengrösse 750 als unsinnig abgetan und unterdrückt worden. n ist also zu klein eingerechnet. Berechne den korrigierten Mittelwert und die korrigierte Standardabweichung in 2 Stufen.

Bemerkung zur Lösung dieser Aufgabe: Diese soll mit einem Rechner ausgeführt werden. Eine Musterlösung wird bei Gelegenheit unter dem folgenden Link bereitgestellt:

Link zur Theoriegrundlage dieser Aufgabe:
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Zusatz/AnhangStatistDatenkorrektur.pdf

Link zur Lösung dieser Aufgabe (sobald bereit):
http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/UEMAlg16_zus.pdf

52.3 Link zu den Lösungen Phase 16

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta16.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta16.nb

Kapitel 53

Tests Statistik Semester 1

53.1 Test Statistik ◇ M2–08/09–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Schildere kurz die notwendigsten, wesentlichen Eigenschaften eines brauchbaren Zufallsgenerators, welcher Zufallszahlen aus dem Intervall [0, 1) generiert.

(2) Zwei vergleichbare Datensätze sollen betreffend ihrer Streuung untersucht werden. Wie kann man sich rasch graphisch ein Bild von der Lage machen?

(3) Im Lager sind zwei Kisten mit äusserlich vergleichbaren Gußstücken gefunden worden. Früher hatte man mit grosser Streuung zwei Typen aus unterschiedlichen Legierungen produziert, wobei der eine Typ im Mittel etwa $8\,mm$ grösser als der andere war. Nun will die Firmenleitung mit Hilfe statistischer Methoden und damit zerstörungsfrei herausfinden, ob es sich bei den beiden Kisten um dieselben oder um verschiedene Typen handelt. Ein Ingenieur hat in der Folge den Auftrag zu einer ersten Untersuchung erhalten, die jetzt ebenfalls durchgeführt werden soll. Hier die Längen der beiden Datensätze in mm:

$$S_1 = \{189, 196, 156, 173, 155, 179, 195, 186, 181, 168, 193, 158, 172, 174, 157, 209, 165, 203, 143, 153, 203, 183, 153, 186, 154, 192, 214, 157, 217, 156, 158, 182, 179, 206, 178, 173, 151, 177, 169, 177\}$$

$$S_2 = \{161, 162, 192, 181, 188, 154, 167, 152, 148, 175, 153, 197, 161, 198, 148, 169, 168, 184, 157, 180, 173, 188, 176, 205, 147, 160, 178, 155, 154, 143, 145, 210, 144, 170, 201, 140, 192, 173, 193, 180\}$$

(a) Ordne die beiden Datensätze je in einer Rangliste. Diese Listen sind für das Folgende notwendig.

(b) Berechne von den beiden Datensätzen je das Minimum, das Maximum und die Spanne.

(c) Berechne von den beiden Datensätzen je den arithmetischen Mittelwert.

(d) Berechne von den beiden Datensätzen als erstes Streumass je die Standardabweichung.

(e) Berechne von den beiden Datensätzen je den Median und die Quartile $q_{0.25}$ und $q_{0.75}$.

(f) Stelle die beiden Datensätze in Box-Whisker-Diagrammen gegenüber.

(g) Teile die Daten der beiden Sätze je in Klassen der Länge 10 ein, wobei die 1. Klasse bei 140 beginnen soll. Zeichne damit die Histogramme der beiden Datensätze in einer Gegenüberstellung. Bestimme von jedem Datensatz auch den Modus der Klassen.

(h) Erstelle nun eine erste qualitative Beurteilung darüber, ob es sich hier um die selben Typen handeln kann.

(4) (a) Wieviele Möglichkeiten hat man, aus einer Schachtel mit 4 Messingschrauben und 5 äusserlich gleichen Stahlschrauben 3 Schrauben mit Hilfe eines Automaten blind herauszugreifen und einzubauen?

(b) Ein Computerprogramm soll aus einem Zeichenvorrat von 128 auf dem Bildschirm darstellbaren Zeichen zufällig 3 Zeichen herausgreifen und auf dem Bildschirm anordnen. Wieviele Anordnungen gibt es, wenn das 28. und das 65. Zeichen aus „politischen Gründen nie nebeneinander stehen dürfen“, da dies als unanständig erachtet wird?

(c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln mit 2 Würfeln mindestens einmal eine 6 zu würfeln?

(d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse von $k = 20$ Mitgliedern zwei am selben Tag Geburtstag haben? (Annahme: Jeder Tag ist gleich wahrscheinlich.))
Hinweis: Überlege, was bei der Auswahl von 20 *aus* 365 *bei mit oder ohne Wiederholung die günstigen, die ungünstigen oder die möglichen Fälle für eine Bedeutung haben...*

(e) Löse das vorherige Beispiel auch mit $k = 41$.

(5) Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim Spiel mit zwei Würfeln zweimal eine 6 zu würfeln. Vergleiche das mit der Wahrscheinlichkeit, mit dem zweiten Würfel eine 6 zu würfeln unter der Bedingung, dass mit dem ersten Würfel schon eine 6 geworfen worden ist!

(6) In einem Team mit 6 Mitgliedern werden alle 4 Monate die Aufträge nach dem Zufallsprinzip neu verteilt, damit keine Bevorzugten auserkoren und dann gemobbt werden. Auf der Arbeitsvorbereitungsliste für das Jahr stehen 2 Jobs in Projekt A, 3 Jobs in Projekt B und 5 Jobs in Projekt C, die alle pro Einsatz im Job je 4 Monate dauern. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

(a) Die Wahrscheinlichkeit, zweimal dasselbe Projekt zu ziehen.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, nie Projekt B zu ziehen.

(c) Die Wahrscheinlichkeit, einmal wenigstens Projekt A zu ziehen.

Hinweis Benutze als Beispiel die Beilage „Benutzung des Ereignisbaumes“!
(Die pro Einsatz nicht verteilten Jobs werden an ein anderes Team abgegeben.)

Viel Glück!

53.2 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2MathStat_0809_01_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2MathStat_0809_01_Loes.nb

53.3 Test ◇ M2–09/10–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Laplace-Transformationen, Differentialgleichungen, Statistik, Kombinatorik

(1) Abgabe des vorgängig behandelten Problems mit der Evolvente und der Evolute:

(a) Output mit Namen, Datum und Klasse beschriftet.

(b) Elektronisch per Mail mit Namen und Klasse im Filename erkennbar. (Achtung: Wenn möglich nur Source Code übermitteln, sofern ein Programm benutzt worden ist, auf das im Schulnetzwerk ein uneingeschränkter Zugriff existiert.)

(2) Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = f(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0,\ \ y'(0) = y_0'$.

(a) Berechne die Laplace–Transformierte Gleichung. (Die Transformierte von $y(t)$ heisst $Y(s)$, diejenige von $f(t)$ heisst $F(s)$.)

(b) Berechne daraus die Transformierte $Y(s)$ von $y(t)$: $Y(s) = \ldots ? \ldots$
Benutze dabei die Abkürzung $k := \sqrt{a^2 - 4\,b}$ und vereinfacht das Resultat, so dass dieses kurz ist und schnell lesbar wird.

(c) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 1,\ \ b = 1,\ \ f(t) \equiv 0,\ \ y_0 = 1,\ \ y_0' = 0.$

(d) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 1,\ \ b = 1,\ \ f(t) \equiv 0,\ \ y_0 = 0,\ \ y_0' = 1.$

(e) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 1,\ \ b = 1,\ \ f(t) \equiv 0,\ \ y_0 = 1,\ \ y_0' = 1.$

(f) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = -1,\ \ b = 1,\ \ f(t) \equiv 0,\ \ y_0 = 0,\ \ y_0' = 1.$

(g) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = -2,\ \ b = 1,\ \ f(t) \equiv 0,\ \ y_0 = 0,\ \ y_0' = 1.$

(h) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = -3,\ \ b = 1,\ \ f(t) \equiv 0,\ \ y_0 = 0,\ \ y_0' = 1.$

(i) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 0,\ \ b = -1,\ \ f(t) = \delta(t),\ \ y_0 = 0,\ \ y_0' = 0.$

(j) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 0,\ \ b = 1,\ \ f(t) = \delta(t),\ \ y_0 = 0,\ \ y_0' = 0.$

(3) Gegeben ist eine Kugel mit Mittelpunkt $M = O$ in einem kartesischen Koordinatensystem mit einem Radius $r = 10$. Durch diese Kugel wird ein Loch gebohrt mit einem Bohrer vom Durchmesser $d = 4$. Der senkrechte Abstand der Bohrerachse zu M beträgt 3. Berechne das Restvolumen der Kugel nach der Ausbohrung. (3 Stellen hinter dem Dezimalpunkt.)

(4) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'''(t) - 3\,y''(t) + 3\,y'(t) - y(t) = f(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\ y''(0) = y_0''$.

(a) Berechne mit Hilfe der Laplace–Transformationen die Lösung für:
$f(t) = \delta(t),\ \ y_0 = y_0' = y_0'' = 0.$

(b) Ermittle ebenso Lösung für:
$f(t) = e^{-t},\ \ y_0 = y_0' = y_0'' = 0.$

(c) Ermittle ebenso Lösung für:
$f(t) = e^{-t},\ \ y_0 = 1,\ \ y_0' = y_0'' = 0.$

(5) Eine Firma, welche seit 10 Jahren Gusspfannen für eine Warenhauskette herstellt, lässt beim Marktforschungsunternehmen Alpha eine Studie über die Verkaufsentwicklung und den Langzeiteinsatz der Geräte bei zufällig ermittelten Käufern an zwei Warenhausstandorten erarbeiten. Alpha liefert nach einiger Zeit zwei Datensätze mit der Angabe, dass jeder Satz zu einem Warenhausstandort gehöre. Der Chef der auftragserteilenden Firma zeigt sich darauf gegenüber einem Angestellten sichtlich erbost über Alpha. Der Angestellte wird beauftragt, die Datensätze zu studieren und danach dem Direktionskollegium zu präsentieren. Er hat seine Arbeit in folgende Teilaufgaben gegliedert, welche hier nachvollzogen werden sollen:

$M_1 = \{8, 6, 0, 7, 1, 1, 2, 4, 3, 5, 2, 8, 4, 3, 0, 8, 2, 6, 8, 9, 9, 8, 0, 2, 6, 8, 2, 6, 0, 4, 6, 1, 8, 7, 0, 3, 2, 9, 5, 4, 4, 9, 4, 7, 9, 0, 2, 8, 5, 0\}$

$M_2 = \{1, 5, 7, 3, 9, 9, 3, 9, 6, 1, 7, 9, 1, 4, 8, 8, 2, 0, 5, 9, 7, 2, 3, 8, 3, 3, 4, 6, 2, 6, 4, 8, 3, 2, 3, 9, 7, 9, 8, 5, 3, 5, 6, 2, 9, 5, 1, 4, 1, 3\}$

(a) Erstelle für M_1 und M_2 je eine Strichliste.

(b) Erstelle für M_1 und M_2 je ein Histogramm mit 10 Klassen.

(c) Berechne für M_1 und M_2 je den Stichprobenumfang, den Mittelwert und die Standardabweichung.

(d) Vergleiche die Datenmenge M_1 mit der Datenmenge M_2 mittels BoxWhiskers–Plots (Gegenüberstellung der Plots).

(e) Beschreibe, was die Datensätze überaus verdächtig machen könnte. Lege dar, wieso die Daten allenfalls zurückgewiesen werden.

(6) (a) Auf wieviele mögliche Arten kann man 14 Gerichte auf die 14 Ferientage verteilen?

(b) Auf wieviele mögliche Arten kann man 50 Arbeitsgänge auf die 7 Mitarbeiter möglichst so verteilen, dass höchstens einmal einer einen Arbeitsgang mehr als die anderen erledigen muss?

WIR1

Viel Glück!

53.4 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

53.5 Test ◇ M2–10/11–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.** **Viel Glück!**

Laplace-Transformationen, Differentialgleichungen, Statistik, Kombinatorik

(1) Abgabe des vorgängig behandelten Problems mit einer Modellierung eines oder mehrerer Körper und / oder mit der Evolvente und der Evolute:

(a) Output mit Namen, Datum und Klasse beschriftet.

(b) Zudem nach der Prüfung elektronisch per Mail mit Namen und Klasse im Filename erkennbar. (Achtung: Wenn möglich nur Source Code übermitteln, sofern ein Programm benutzt worden ist, auf das im Schulnetzwerk ein uneingeschränkter Zugriff existiert.)

(2) $$f(t) = \sin(3\,t+\pi) + \cos(3\,t) + t\cdot e^{-3\,t},\;\; f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$$

(a) Zeige die Berechnung der Laplace-Transformierten $F(s)$ mit Hilfe von Tabellen (Resultat in natürlicher Form mit drei Summanden, so weit wie möglich vereinfacht).

(b) Berechne $F(3)$ (einfachstes Endresultat).

(c) Was ergibt sich bei der Berechnung von $F(-3)$? (Kommentar?)

(3) Berechne die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t)$. Dabei ist $f(t)$ intervallweise wie folgt definiert:

$$f(t) := t \text{ für } t \in (-\infty,\, 1),\;\; f(t) := 1 \text{ für } t \in [1,\, \frac{\pi}{2}),\;\; f(t) := \sin(t) \text{ für } t \in [\frac{\pi}{2},\, \infty)$$

Das Resultat ist in Form einer Partialbruchentwicklung zu geben, wobei eine etwa auftretende Funktion e^{-s} als $\rho(s)$ zu schreiben ist.

(4) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem mit den Anf'bed. $x(0) = 0,\;\; y(0) = 1$:

$$\begin{array}{rcl} x\,'(t) - 2\,y(t) &=& \delta(t) \\ x(t) + y\,'(t) &=& -\sin(t) \end{array}$$

(a) Berechne das transformierte Gleichungssystem.

(b) Berechne die Transformierten $X(s)$ und $Y(s)$ in einfacher Darstellung (Partialbruchzerlegung!).

(c) Berechne, falls möglich, die Rücktransformierten $x(t)$ und $y(t)$.

(5) Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 1$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0,\ \ {y_0}' = 1$.

(a) Berechne die Laplace–Transformierte $Y(s)$ in Partialbruchdarstellung.

(b) Berechne daraus die Rücktransformierte $y(t)$ in ausmultiplizierter Form.

(c) Erstelle eine saubere Skizze von $y(t)$ für $t \in [0,\ 7]$.

(d) Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

(6) Gegeben sind zwei Datensätze M_1 und M_2. Dabei handelt es sich um die Durchmesser von je einer Stichprobe aus zwei Sendungen mit Bolzen, gemessen in Milimetern:

$$M_1 = \{6.36,\ 6.56,\ 6.42,\ 6.27,\ 6.36,\ 6.47,\ 6.29,\ 6.54,\ 6.3,\ 6.55,\ 6.46,\ 6.49,\ 6.38,\ 6.4,\ 6.35,\ 6.41,\ 6.56,\ 6.25,\ 6.34\}$$
$$M_2 = \{6.55,\ 6.48,\ 6.51,\ 6.51,\ 6.43,\ 6.51,\ 6.35,\ 6.46,\ 6.31,\ 6.31,\ 6.58,\ 6.51,\ 6.54,\ 6.35,\ 6.39,\ 6.59,\ 6.4,\ 6.5,\ 6.57\}$$

(a) Berechne für jede Stichprobe die folgenden statistische Kenngrössen: Die Lagemasse Minimum, Maximum, arithmetisches Mittel und den Median.

(b) Berechne für jede Stichprobe die Streumasse Standardabweichung und Quartilsdifferenz.

(c) Entscheide, ob es in der Stichprobe „schwache Ausreisser“ gibt, welche um mehr als 2 mal die Standardabweichung vom Mittelwert entfernt liegen.

(d) Zeichne für die Stichproben nebeneinander die beiden Box– and Whisker–Plots und beurteile damit, ob die Exemplare in den beiden Sendungen von demselben Lieferanten in Ostasien stammen können.

(7) Du bist Abteilungsleiter in einer Firma mit 14 Mitarbeitern in deiner Abteilung. Deine Leute arbeiten an Maschinen, welche alle in einer Reihe in einer langen Halle stehen.

(a) Auf wieviele Arten kannst du zur Lärmverminderung die Halle der Breite nach in drei Räume aufteilen, indem man exakt zwei Zwischenwände einbaut?

(b) Auf wieviele Arten kannst du die Mitarbeiter in 3 Gruppen so einteilen, dass zwei Gruppen zu 5 und eine Gruppe zu 4 Mitarbeitern entstehen?

(c) Auf wieviele Arten kannst du die Gruppen bilden und darin noch je einen Gruppenchef wählen?

(8) Du warst geschäftlich auf einer Insel, von welcher bekannt geworden ist, dass dort eine gewisse Mücke aufgetaucht sei, die eine schwere Krankheit überträgt. Auch ist es Tatsache, dass von 10 beliebig oft gestochenen Menschen im Mittel einer infiziert wird. Die Krankheit hat eine Inkubationszeit von 3 Monaten, bis sie ausbricht. Momentan steht aber ein Test zur Verfügung, welcher jedoch nur in 70 % der Fälle das richtige Resultat liefert. Falls du nicht infiziert bist und du dich fäschlicherweise behandeln lässt, sind die Nebenwirkungen etwa halb so schwerwiegend wie im Fall, dass dich die Krankheit trifft. Stelle die vorhandenen Wahrscheinlichkeiten einander gegenüber. Fälle damit ein Urteil darüber, ob es vorteilhaft für dich ist, den Test zu machen mit der davon abhängigen Behandlung.

WIR1

53.6 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, 30. Januar 2009

53.7 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Statistik 1 Mp 07 / Mp 2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Hinweis: Für eine Aufgabe mit 3 Punkten kann man ca. 5 Minuten rechnen. Vermutlich wird man daher in einer Stunde nur eine Auswahl aus der Serie lösen können. Wähle also mit Bedacht!

(1) **(6 Punkte)**

Die Chance Geld zu verlieren:

Eine kürzlich gegründete Firma hat schon 448 Kunden in ihrer Kartei, die wöchentlich persönlich vorbeikommen, um technische Waren abzuholen. 45 davon haben eine sehr schlechte Bonität. Sie haben bisher keine Rechnung bezahlt. Pro Viertelstunde kommen ca. 3 Kunden vorbei. Wie gross ist die Chance, dass in der nächsten Viertelstunde der Lehrling an drei solche schlechten Kunden Ware herausgibt? (Bevor der Lehrling instruiert werden kann.)

(a) Wenn angenommen wird, dass jeder Kunde mehrmals vorbeikommt (d.h. mit zurücklegen).

(b) Wenn angenommen wird, dass jeder Kunde nur einmal vorbeikommt (d.h. ohne zurücklegen).

(2) **(3 Punkte)**

Qualitätskontrolle:

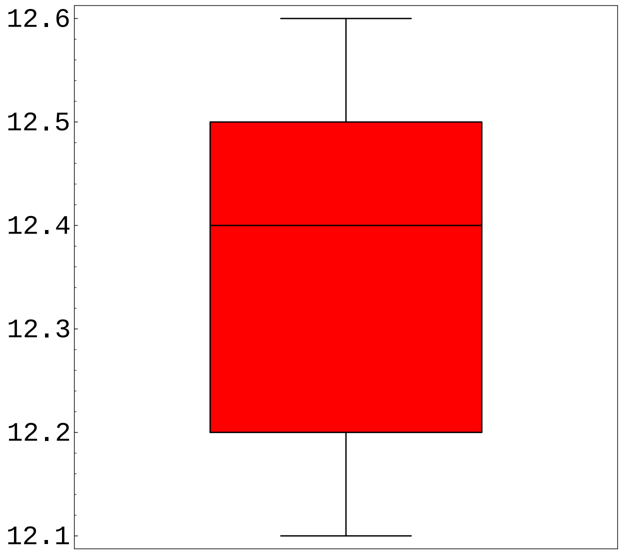
Aus einer Sendung mit 1000 Stücken eines Halbfabrikates werden zu Prüfzwecken 10 Stücke als Stichprobe zufällig herausgegriffen. Falls alle Stücke der Stichprobe gut sind, wird die Sendung akzeptiert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sendung akzeptiert wird, obwohl 12 % aller Stücke der Sendung unbrauchbar sind?

(3) **(9 Punkte)**

Herstellung von Stiften, Stiftdicke in mm:

In der Stichprobe Nummer $S154$ wurde 7 mal der Wert 12.4 gemessen, 12 mal der Wert 12.5, 14 mal der Wert 12.6, 15 mal der Wert 12.7, 11 mal der Wert 12.8 und 5 mal der Wert 12.9. Dazu sind für eine schon früher gemessenen Stichprobe $S094$ die folgenden Daten bekannt:

Stichprobenumfang $N_{S094} = 64$, Mittelwert $\bar{x}_{S094} = 12.3594$, Standardabweichung $s = 0.145535$. Dazu hat man noch einen Box–Whisker–Plot:



(a) Berechne für die Stichprobe $S154$ den Mittelwert und die Standardabweichung.

(b) Stelle für die Stichprobe $S154$ den Box–Whisker–Plot her und entscheide damit qualitativ, ob diese Stichprobe von der Stichprobe $S094$ wesentlich verschieden ist.

(c) Inzwischen ist bekannt geworden, dass in der Stichprobe $S094$ bei der Dateneintragung ein systematischer Fehler vorgekommen ist. Es wurde 5 mal der Wert 12.1 eingetragen. Richtig wäre stattdessen 5 mal der Wert 12.7 gewesen. Berechne damit, falls möglich, den korrigierten Mittelwert und die korrigierte Standardabweichung.

(4) **(9 Punkte)**

Normalverteilter Fehler:

Bei der Produktion von Gleitlagern mit dem Innen–Nenndurchmesser $5.295\,mm$ ist durch Meßserien ein mittlerer Fehler (Standardfehler) von $0.005\,mm$ festgestellt worden. Da hier wiederum eine Grossserie von $100'000$ Stück geplant ist, soll auf Grund der Erfahrung der Durchmesser durch eine Normalverteilung mit $\sigma = 0.005\,mm$ und $\mu = 5.295\,mm$ beschrieben werden.

(a) Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler des Innendurchmessers eines Lagers grösser als $0.007\,mm$ ist. **(Teilaufgabe mit 6 Punkten)**

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Welle mit dem grössten messbaren Durchmesser von $5.300\,mm$ im gelagerten Bereich klemmen wird.

(5) **(6 Punkte)**

Konfidenzintervall:

Zur Bestimmung der Streckgrenze einer Stahlsorte A hat man n = 150 Messungen durchgeführt. Daraus konnte man das arithmetische Mittel zu $\bar{x} = 315.0\, N/mm^2$ bestimmen. $\bar{x}$ ist ein geeigneter Punktschätzer für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit. Aus der Erfahrung weiss man, dass das Streumass σ^2 der Grundgesamhteit ziemlich genau durch den Wert $\sigma^2 = 900(N/mm^2)^2$ gegeben ist. Weiter weiss man aus der Erfahrung, dass die mittlere Streckgrenze mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit eine normalverteilte Zufallsgrösse $\bar{X}$ ist (mit der Normalverteilung $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$). Daraus möchte man Genauigkeitsschranken oder Vertrauensgrenzen für den Mittelwert μ der Halbjahresproduktion bestimmen. Es ist bei der Firma üblich, in solchen Fällen Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau $\varepsilon =$ resp. $\lambda = 0.99 = 1 - \alpha$ anzugeben. Bestimme das Konfidenzintervall $[c_{\alpha/2}, c_{1-\alpha/2}]$.

(6) **(6 Punkte)**

Hypothesentest:

Anlässlich der Herstellung von Wellen wird die Qualität geprüft. Zwei Prüfverfahren V_1 und V_2 werden zur Auswahl vorgeschlagen. Dabei wird die maximale Laufzeit bei der höchsten zulässigen Drehzahl gemessen, unter Verwendung von verschiedenen Lagern je nach Verfahren. Nun macht man einen Versuch mit je 20 Wellen in beiden Verfahren. In 3 Fällen zeigt das Verfahren V_1 eine längere Laufzeit als das Verfahren V_2. In 17 Fällen ist das Verfahren V_2 besser. Eine exakt gleiche Laufzeit bei beiden Verfahren kommt nicht vor.
Zur Sache formulieren wir eine die Hypothese H_0: „Die beiden Verfahren sind nicht wesentlich verschieden, d.h. das Resultat beim Verfahren V_1 ist praktisch gleich dem Resultat beim Verfahren V_1.“ H_0 vergleichen wir mit der folgenden Alternativhypothese H_1: „Die beiden Verfahren sind wesentlich verschieden.“ Damit ist gemeint, dass das Resultat beim Verfahren V_1 ungleich ist dem Resultat beim Verfahren V_2. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter Annahme von H_0 hier dennoch die gemessene Abweichung der beiden Verfahren auftreten kann. Gelingt es somit, die Hypothese H_0 aufrecht zu erhalten, wenn man der Alternative höchstens eine Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\,\%$ zubilligt?

(7) **(3 Punkte)**

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

In einem Lager befinden sich je eine sehr grosse Menge von gemischt eingelagerten älteren Elektromotoren von zwei Liferanten A und B. Beide Lieferanten haben etwa gleich viele Geräte geliefert. Um sie zu unterscheiden, muss man eine kleine Etikette ablesen, wozu es gute Augen und viel Licht braucht. Der grosse Raum hat kein Tageslicht und eine schlechte Beleuchtung. Dem Lager werden zufällig 40 Geräte entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass man ein Gerät vom Liferanten A erwischt, ist 0.5. Ebenso für B. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staplerfahrer bei einem Lagerbesuch maximal 5 Motoren vom Lieferanten B mitnimmt? — Der Lieferant B hat eben angefragt, ob er zu Prüfzwecken 5 ältere Geräte ausleihen kann.

(8) **(12 Punkte)**

Kontingenztafel oder Kreuztabelle:

Ein Edelmetall verarbeitendes Unternehmen besitzt 90 gewöhnliche und 10 gepanzerte Lieferwagen, letztere für den Transport von Ware mit sehr hohem Wert. Die beiden Wagentypen kann man von aussen kaum voneinander unterscheiden. Im Mittel machen alle Wagen etwa gleich lange Tagesrouten. Die Firma beschäftigt gleichviele Fahrer und Fahrerinnen, zusammen soviele wie die Lieferwagen, wobei die Fahrer aus Sicherheitsüberlegungen zu vier mal soviel für Sicherheitstransporte in gepanzerten Fahrzeugen eingesetzt werden wie die Fahrerinnen. Die Beschäftigten wissen auf ihren Transporten nicht, was der Inhalt der transportierten verschlossenen Metallkisten ist. Nun studiert man in der Firma mitten im Frieden ein möglicher erster Überfall. Infolge der Struktur der Belegschaft darf angenommen werden, dass niemand von der eigenen Firma am Überfall beteiltigt sein kann. Alle Wagen sind im Einsatz.

(a) Erstelle eine Kreuztabelle (Kontingenztafel) für die Situation an diesem Tag, an dem alle Wagen und Fahrer resp. Fahrerinnen im Einsatz sind.

(b) Was ist die Chance, dass es im Falle eines ersten Überfalles an einem solchen Tag einen Sicherheitstransport trifft?

(c) Was ist die Chance, dass im Falle eines ersten Überfalles ein Sicherheitstransport mit einer Frau am Steuer überfallen wird?

(d) Was ist die Chance, dass im Falle eines ersten Überfalles ein Sicherheitstransport überfallen wird unter der Voraussetzung (resp. der Bedingung), dass eine Frau am Steuer sitzt? (Dies unter der Annahme, dass die Übeltäter gezielt Transporte mit Frauen auswählen.)

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, 05. Februar 2010

53.8 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp08 / Mp2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

(1) **(9 Punkte)**

Bohrkern und Volumen:

Ein zylindrischer Bolzen mit dem Radius $r = 20$ wird exakt senkrecht und zentrisch zu seiner Achse mit einem Bohrer durchbohrt, dessen Radius ebenfalls $r = 20$ ist.

(a) Skizziere ausgebohrte Volumen. (3 Punkte)

(b) Wie gross ist das ausgebohrte Volumen? (6 Punkte)

(2) **(30 Punkte)**

Laplace–Transformationen und Rücktransformationen:

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \sin(3\,t) + \sinh(5\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(b) $f(t) = e^{t-3}\,e^{t+3} \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(c) $f(t) = e^{t}\,(1 + \sin(t)) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(d) $f(t) = \dfrac{t}{t^2 + 1} \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(e) $f(t) = \delta(t) + (1 + t)^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(f) $Y(s) = \dfrac{2\,s}{4\,s^2 + 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(g) $Y(s) = \dfrac{s^2}{s^2 + 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(h) $Y(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^3} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(i) $Y(s) = \dfrac{e^{-3}}{s - 1} + \dfrac{e^{+3}}{s - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(j) $Y(s) = \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{1}{1 + s^2} + \dfrac{4}{s + s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(3) **(18 Punkte)**

Differentialgleichung:

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y = f(t)$.

(a) Sei $f(t) = e^{-t}$. Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Wendetangente? (2 Punkte)

(b) Skizziere diese Kurven über dem Bereich $D = [-1,\, 2.5]$. (4 Punkte)

(c) Bestimme für diese Kurven in D die vorhandenen Extremwertstellen mit ihren Werten sowie die restlichen Wendepunkte, sofern vorhanden. (3 Punkte)

(d) Bestimme für diese Kurven die Kurvenlängen zwischen $t = -1$ und $t = 2.5$ sowie zwischen $t = -1$ und $t = 6$. Numerische Resultate genügen. (3 Punkte)

(e) Löse das Anfangswertproblem mit $f(t) = t^2$ und den Anfangsbedingungen $y(0) = -1,\;\; y'(0) = y''(0) = 0$. (6 Punkte)

(4) **(6 Punkte)**

Differentialgleichungssystem:

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{aligned} x(t)'' - y(t) &= 0 \\ y(t) - x'(t) &= 2\sin(t) \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= -1 \\ y(0) &= -1 \end{aligned}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \geq 0$.

Skizziere dann damit die Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sin(t)\, y(t) \end{pmatrix},\;\; t \geq 0$.

Was ist hier bemerkenswert?

(5) **(6 Punkte)**

Integration:

Zwei Mitarbeiter streiten sich darüber, welches der nachfolgend beschriebenen Volumen grösser sei. Entscheide den Streit und begründe die Entscheidung:

$$V_1 = \int\limits_0^{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} (2x - y) + \; sin(x \cdot y)\, dx\, dy, \qquad V_2 = \int\limits_0^{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} (2x - y) + \; sin(x + y)\, dx\, dy.$$

Gibt es in diesen Integralen überflüssige Terme? Wenn ja, welche?

(6) **(12 Punkte)**

Praktisches Beispiel:

Ein Fallschirmspringer springt zur Übung in einer Höhe von h über Grund aus dem Flugzeug. Die Leine zur Öffnung des Fallschirms ist bei diesem Sprung seitlich an der Sprungluke befestigt, sodass sich der Schirm sofort öffnet. Die Falldistanz während der Entfaltung vernachlässigen wir. Für den Flug gilt die folgende Differentialgleichung (AWP):

$$a(t) = v'(t) = g - \frac{c}{m} v^2(t), \;\; c = \frac{c_w \, \rho \, A}{2}$$

Dabei sind die folgenden Werte bekannt:

(a) $h = 1000 \, m$

(b) $g = 9.81 \, m \, s^{-2}$ (Gravitationskonstante)

(c) $m = 100 \, kg$ (Masse)

(d) $c_w = 1.33$ (Widerstandsbeiwert für den geöffneten Schirm)

(e) $\rho = 1.2 \, kg/m^{-3}$ (Dichte der Luft)

(f) $A = 25 \, m^2$ (Stirnfläche des Schirms)

Berechne $v_\infty = v(\infty)$ mittels der Annahme $v'(\infty) = 0$. Führe dann v_∞ in der D'gl. ein. Damit lässt sich der Term $\dfrac{c}{m}$ substituieren. So erhält man eine separierbare D'gl., die lösbar ist. Beim Absprung soll $t = t_0 = 0 \, sec$ gesetzt werden. Berechne daraus

(a) $v(t)$ mit numerischen Koeffizienten und damit (6 Punkte)

(b) $s(t)$ mit numerischen Koeffizienten. (3 Punkte)

(c) Berechne danach eine numerische Näherung für die Zeit t_{total}, während der sich der Fallschirmspringer in der Luft befindet, bis er auf dem Boden auftrifft. (3 Punkte)

(7) **(6 Punkte)**

Partielle Differentialgleichung:

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung $\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ mit den Anfangsbedingungen in $x_1 = 0, \;\; x_2 = 10, \;\; t_0 = 0$:

$$T(x_1, t) = 40, \;\; T(x_2, t) = 0, \;\; T(x, t_0) = 40 - 4\,x.$$

Gesucht ist die Lösung $T(x,t)$.

(*Hinweis:* Man versuche mit Hilfe eines konstruktiven Ansatzes eine Lösung zu ermitteln, indem man mit einem möglichst einfachen Ansatz für die Zeitabhängigkeit testet, ob die Gleichung erfüllt ist.)

(8) Abgabetermin ausstehende Abgaben (Nach Massgabe der Bedeutung)

Für Studierende (Repetenten und reguläre Studierende), welche noch ausstehende Arbeiten abgeben wollen: Der letzte mögliche Abgabetermin ist am Ende der auf Teil 1 folgenden Zwischenpause anlässlich dieser Prüfung.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, 05. Februar 2010

Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp08 / Mp 2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

(1) **(6 Punkte)**

Datenkorrektur:

Gegeben sind der Mittelwert $\bar{x} = 120.8$ und die Standardabweichung $s = 6.24$ eines von einem Vertragsunternehmen untersuchten Datensatzes mit 500 Messungen. Heute wurde bekannt, dass einer unserer schwach ausgebildeten Mitarbeiter seine Messungen systematisch falsch abgelesen hat. Er hat 76 mal den Wert 110 notiert statt den Wert 130.

(a) Versuche den wirklichen Mittelwert zu berechnen. (2 Punkte)

(b) Versuche die richtige Standardabweichung zu berechnen oder anzuznähern, falls dies möglich ist. (4 Punkte)

(2) **(9 Punkte)**

Qualitätskontrolle:

Mit zwei Maschinen A und B werden Bolzen produziert. An 12 aufeinanderfolgenden Tagen ist an jeder Maschine eine Stichprobe erhoben worden. $\bar{d}_{k,\,A}$ und $\bar{d}_{k,\,B}$ sind die aus den Stichproben errechneten Mitelwerte der Durchmesser für den Tag k in μm. Nachstehend sind nur die Differenz $\bar{d}_{k,\,A} - \bar{d}_{k,\,B}$ notiert. Man teste nun die Nullhypothese, dass beide Maschinen Bolzen mit den selben mittleren Massen liefern, gegen die Alternative, dass die eine Maschine, hier A, einen systematisch höheren Mittelwert liefert als B.

(a) Sei dabei $\alpha = 0.01$. Wenn die gemessene Situation in der Realität für die Alternativhypothese H_1 eine Wahrscheinlichkeit $P < \alpha$ ergibt, so ist H_1 bemerkenswert, unwahrscheinlich oder „siginifikant" zum Niveau α. Frage: Ist H_1 signifikant zu α? (6 Punkte)

(b) Frage: Kann man damit die Alternativhypothese H_1 auf der Grundlage dieses Tests akzeptieren und muss man damit H_0 verwerfen? Erkläre den Sachverhalt auf der Grundlage des Resultats! (3 Punkte)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\bar{d}_{k,\,A} - \bar{d}_{k,\,B}$	12	9	2	0	1	3	-4	5	-5	1	2	6

(3) **(12 Punkte)**

Qualitätskontrolle:

Bei der Fliessbandfertigung von Motorengehäusen werden parallel zwei automatische Lehrenbohrwerke eingesetzt, wo jeweils in den Gehäusen Präsisionslöcher bebohrt werden. Die Toleranzen dieser Löcher werden in Mikrometern gemessen (μm). Die Lehrenbohrwerke sind so eingestellt, dass bei einer Abweichungen der Mittelwerte sowie der Standardabweichung der Differenz $|Sollmass - Istmass|$ pro volle Stunde um mehr als $30\,\mu m$ Alarm ausgelöst wird.
Da in letzter Zeit von der Abnehmerstelle trotzdem Reklamationen eingetroffen sind mit der Beanstandung, dass hier zwei verschiedene Qualitäten geliefert würden, wird an jedem Bohrwerk eine Stichprobe abgezogen und der Betrag der maximalen Abweichung der Lochdurchmesser vom vertraglich abgemachten Mittelwert in μm ermittelt. Nachstehend sind die beiden Datensätze aufgeführt:

$$Datensatz_1 = \{45, 7, 4, 49, 11, 7, 7, 5, 7, 41, 53, 1, 4, 41, 41, 22, 21, 2, 8, 2\} \text{ in } \mu m.$$

$$Datensatz_2 = \{27, 44, 4, 1, 16, 4, 12, 49, 2, 23, 68, 3, 13, 13, 50, 4, 42, 7, 27, 1\} \text{ in } \mu m.$$

(a) Ermittle die Mittelwerte der beiden Datensätze und beurteile diese bezüglich der Reklamationen. (3 Punkte)

(b) Ermittle die Standardabweichung der beiden Datensätze und beurteile diese bezüglich der Reklamationen. (3 Punkte)

(c) Zeichne von den beiden Datensätzen den Box-Whiskers-Plot im selben Diagramm und beurteile damit die Reklamationen. (6 Punkte)

(4) **(12 Punkte)**

Konfidenzintervalle:

Eine Firma fertigt seit Monaten Halbfabrikate für Haushaltsgeräte. Es handelt sich hierbei um Lagerplatten aus Kunststoff, in welche Löcher zur Aufnahme von Achsen für Reibräder eingelassen sind. In abgekühltem Zustand sollte der wichtigste Lochabstand $a_0 = 46.50\,mm$ und dazu die Toleranz $\pm\Delta a_0 = \pm 0.01\,mm$ betragen.
Aus der Erfahrung weiss man, dass der Mittelwert bei der Fabrikation $\bar{a} = 46.497\,mm$ beträgt. Die über lange Zeit ermittelte Standardabweichung ist $s = \Delta a,\ \ \pm\Delta a = \pm 0.044\,mm$. Ebenso ist durch die Erfahrung erhärtet worden, das die Werte für a einer Normalverteilung mit $\mu \approx \bar{a}$ und $\sigma \approx \Delta a$ genügen.

(a) Nun hat der Kunde mitgeteilt, dass im Falle $a \geq a_0 + 2\,\Delta a_0$ die eingebauten Reibräder in der Regel aneinander schleifen und dass sie sich dann sehr rasch abnutzen. Daher wird ein entsprechendes Stück Ausschuss, denn die Abnehmer des Kunden weigern sich, weiterhin solche Ware zu bezahlen. Die Stücke sollen demnach automatisch vermessen werden, um den derartigen Ausschuss schon vor dem Ausliefern aus der Sendung entfernen zu können. Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Stück zu entfernen ist. (4 Punkte)

(b) Berechne approximativ ein in der Fabrikation anzustrebendes neues $s = \Delta a_{neu}$ so, dass $a \geq 46.50 + 2 \cdot 0.01$ mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 0.01 eintrifft. (4 Punkte)

(c) Berechne als Alternative approximativ ein in der Fabrikation anzustrebendes neues $\bar{a}$ so, dass bei $\Delta a = 0.044\,mm$ jetzt $a \geq 46.50 + 2 \cdot 0.01$ mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 0.01 eintrifft. (4 Punkte)

(5) **(12 Punkte)**

Wahrscheinlichkeiten:

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Betrieb mit $n = 365$ Mitarbeitern mindestens einer am gemeinsam gefeierten Jahresabschlussfest Geburtstag hat? Und wie ist es bei nur $n = 20$ Mitarbeitern? (4 Punkte)

(b) Zum Wurf auf eine Darts-Scheibe (Geschicklichkeitsspiel mit diversen Spielregeln und Arten, bei dem eines der gleich grossen Felder mit den Nummern von 1 bis 20 mit einem Pfeil getroffen werden kann. Oft ist das Spiel in Clubs anzutreffen):
Pro Wurf ist die statistisch ermittelte Trefferwahrscheinlichkeit $P = 0.03$. Wie gross ist so die Wahrscheinlichkeit, mit 20 Würfen mindestens einen Treffer zu erzielen? (4 Punkte)

(c) Gegeben ist eine Maschine, die durchschnittlich alle 8 Wochen (40 Arbeitstage) einmal eingesetzt wird. Gestern ist sie eingesetzt worden. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie innerhalb der nächsten 4 Tagen eingesetzt werden muss? (Die Frage kommt eben bei Arbeitsbeginn vom Werkstattchef. Er muss die Maschine revidieren, möchte die Revision jedoch gerne ein paar Tage zurückstellen.) (4 Punkte)

— ENDE —

53.9 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html.

Allgemeine Bedingungen zur folgenden MP:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's usw. nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind in der Regel zwölf Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen. Andernfalls gelten die angegebenen Punktezahlen.
- ⊘ Mittleres Richtziel: Wenn an einer vollen Prüfung von zwei Stunden mehr als vier grössere Aufgaben mit zwölf oder mehr Punkten gegeben sind, sollten mindestens vier solche Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollen.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Donnerstag 03. 02. 2011

53.10 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp09 / Mp2

Viel Glück !

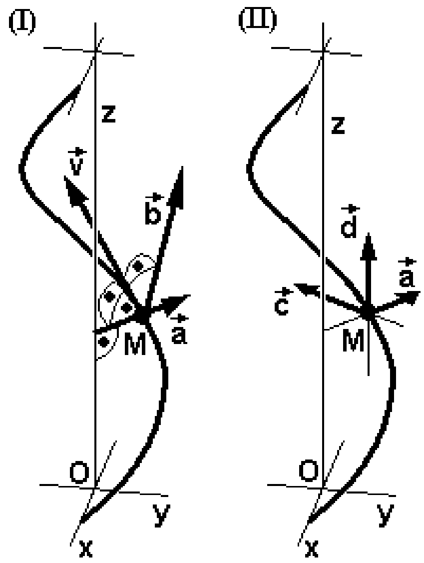
Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

(1) **(12 Punkte)**

Volumen von Schraubenlinienkörpern:

Gegeben ist eine Schraubenlinie

$$\vec{s} = \vec{s}(t) = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r_0 \cos(t) \\ r_0 \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\ 1].$$



Diese Schraubenlinie verläuft auf einem Zylinder mit der Radius r_0. Daher ist der in den Skizzen gezeigte Vektor $\vec{a}$ senkrecht auf der Zylindermantelfläche und somit auf der Schraubenlinie. $\vec{d}$ ist parallel zur z–Achse. Die normierten Vektoren $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ bilden ein begleitendes Dreibein paarweise rechtwinkliger Vektoren (ONS).

Weiter ist $\vec{s} = \vec{s}(t) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$ der Ortsvektor von $M(t)$. $\vec{v} = \vec{v}(t)$ ist der Tangentenvektor an die Schraubenlinie in $M(t)$.

Weiter sei $r = r(t) := r_0\,(1 - \dfrac{t}{2\,\pi})$.

Im Falle (I) wird durch $\vec{k_1}(t,\,\varphi) = r(t)(\vec{a(t)}\,\cos\varphi + \vec{b(t)}\,\sin\varphi)$ ein auf der Kurve senkrecht stehender Kreis definiert, der zusammen mit $\vec{s(t)}$ eine in einen Spitz auslaufende Fläche $\vec{f_1}(t,\,\varphi)$ im Raum ergibt: $\vec{f_1}(t,\,\varphi) = \vec{s}(t) + \vec{k_1}(t,\,\varphi)$.

Im Falle (II) wird durch $\vec{k_2}(t,\,\varphi) = r(t)(\vec{a(t)}\,\cos\varphi + \vec{c(t)}\,\sin\varphi)$ ein horizontaler Kreis deniniert, der zusammen mit $\vec{s(t)}$ einen in einen Spitz auslaufende Fläche $\vec{f_2}(t,\,\varphi)$ im Raum ergibt: $\vec{f_2}(t,\,\varphi) = \vec{s}(t) + t,\,\vec{k_2}(\varphi)$.

(a) Skizziere die beiden durch die Flächen definierten Körper. (3 Punkte)

(b) Berechne das durch f_1 definierte Volumen V_1. (3 Punkte)

(c) Berechne das durch f_2 definierte Volumen V_2. (3 Punkte)

(d) Berechne das Kegelvolumen V_3, welches durch denselben Grundkreis wie bei f_2 und der Kegelhöhe 2π (Ganghöhe) gegeben ist. Berechne daraus das Verhältnis $V_3 : V_2$. (3 Punkte)

(2) **(21 Punkte)**

Laplace–Transformationen und Rücktransformationen:

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \cos(2\,t) + \cosh(3\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(b) $f(t) = e^{t-8}\, e^{-2\,t+3} \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(c) $f(t) = e^{-t}\,(\cos(t) - 2) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(d) $f(t) = (-t)^3 + \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(e) $Y(s) = \dfrac{4\,s}{2\,s^2 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(f) $Y(s) = \dfrac{s}{s^2 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(g) $Y(s) = 1 + \dfrac{2}{s} + \dfrac{-2}{s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(3) **(9 Punkte)**

Differentialgleichung:

Gegeben ist die Differentialgleichung $\quad y'(t) = -y(t) + \delta(t) + a\,\sin(t),\ \ y(1) = 1.$

(a) Sei in obiger Gleichung $y(t,\,a) := y(t)$. Setze $a = 1$. Berechne $y(t,\,1) := y_1(t)$. (3 Punkte)

(b) Skizziere die eben gefundene Funktion über dem Bereich $D = [0, 2]$ und berechne $y(0.5)$ sowie $y(2)$. (3 Punkte)

(c) Bestimme die Funktion $z(a) := y(2, a)$ und skizziere diese Funktion in einem charakteristischen Bereich. (3 Punkte)

(4) **(6 Punkte)**

Differentialgleichung:

Löse die folgende Differentialgleichung mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$y''(t) - y'(t) - 2\,y(t) = \frac{1}{2}\,cosh(t),\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1.$$

(5) **(6 Punkte)**

Differentialgleichungssystem:

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{aligned} y'(t)+y(t)-z'(t)-z(t) &= 0 \\ y'(t)+y(t)+z'(t)+z(t) &= e^{-t} \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \in [-0.5,\, 3]$.

(6) **(6 Punkte)**

Differentialgleichung:

$y'(t) = y(t)\cdot e^{-t} + e^{-2\,t},\ \ y(0) = 0.$

(a) Berechne $y(t) = y_{exakt}(t)$, falls möglich. (3 Punkte)

(b) Berechne $y(1.75) := y_{Euler}(1.75)$ numerisch nach Euler. Schrittweite $\Delta x = 0.5$.
Berechne damit die Abweichung $|y_{Euler}(1.75) - y_{exakt}(1.75)|$ (3 Punkte)

(7) **(6 Punkte)**

Differentialgleichung allgemein:

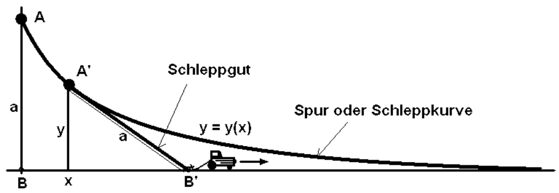
$y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = 1 + a\cdot t,\ \ y(0) = 0.$

(a) Berechne die allgemeine Lösung $y(t,\, a)$, falls möglich mit Hilfe des charakteristischen Polynoms. (5 Punkte)

(b) Von vievielen Parametern oder Variablen hängt die Lösung ab?. (1 Punkte)

(8) **(6 Punkte)**

Praktisches Beispiel:



Gegeben ist eine Schleppkurve (Bild). Ein Massenpunkt A ist hier an einem Seil der Länge a befestigt. A liegt anfangs auf der y–Achse. Das freie Seilende B befindet sich im Koordinatenursprung. Durch die Bewegung des Fahrzeugs wird das Seilende B der positiven x-Achse entlang geführt. Dabei beschreibt der hinterher gezogene Punkt A die Schleppkurve. Vorausgesetzt ist Gleitreibung.

(a) Modelliere die geometrische Situation durch eine Differentialgleichung:

$$y\,'(x) = \ldots = ?$$

(3 Punkte)

(b) Überprüfe, welche der folgenden Ausdrücke Lösungen der Differentialgleichung sind:

$$(a) \qquad y(x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} \qquad (b) \qquad y(t) = \frac{a}{\cosh(t)}$$

$$(c)\ x(y) = a\,\ln(a + \sqrt{a^2 - y^2}) - a\,\ln(y) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

(3 Punkte)

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, Donnerstag 03. 02. 2011

53.11 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp09 / Mp2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

(1) **(9 Punkte)**

Entscheidungsproblem:

Von einem neuen Flugzeugtyp ist eben bekannt geworden, dass bei 5 % der Maschinen bei einem Flug über Calamita (ein „Eisenberg“, dessen Erz ein Metallgehalt von über 70 Volumenprozente aufweist), die Funkverbindungen ausfallen und die Sender im Flugzeug ca. eine halbe Stunde lang Notsignale aussenden. Die Chance, dass es sich bei einem Flugzeug, welches Notsignale aussendet, um ein terroristischer Angriff handeln könnte und dass das Sendesystem manipuliert werden konnte, wird von der Herstellerfirma der Software mit 0.1 % angegeben. Nun fliegt ein solches Flugzeug, das Notsignale aussendet, aus Richtung Calamita etwas zu hoch gegen die nächst gelegene Flughafenzone, hinter der sich ein Spital mit ca. 100 Menschen befindet. Im Flugzeug sitzen vermutlich 10 Menschen. Man hat 3 Minuten zur Entscheidung für einen Abschuss. In dieser Zeit kann das Spital nicht evakuiert werden.

(a) Berechne hier die Wahrscheinlichkeit eines terroristischen Angriffs in der beschreibenen Situation. (6 Punkte)

(b) Begründe einen etwaigen Abschussentscheid oder den Gegenentscheid. (3 Punkte)

(2) **(9 Punkte)**

Personal- und Montageprobleme:

(a) In den nächsten Ferien könnte es eng werden in der Fabrikation. Von den 128 Mitarbeitern mieten 89 einen Parkplatz und besitzen daher ein Auto. Die andern erscheinen mit dem Velo zur Arbeit. Unser Betrieb hat es sich an Weihnachten zur Ehre gemacht, jedem Familienvater, der schulpflichtige Kinder hat, einen Velohelm zu schenken. So sind 62 Helme verschenkt worden. Fahrgemeinschaften bei den Autofahrern gibt es wegen der fliessenden Arbeitszeit keine. Die Autofahrer haben sich verpflichtet, nach Arbeitsschluss jeweils noch Waren für den Direktverkauf in ihrer Umgebung auszutragen, welche bei hohen Temperaturen rege bestellt werden. Genaue Angaben über die privaten Belange der Mitarbeiter gibt es sonst keine. Berechne falls möglich die Chance, dass ein Mitarbeiter während den Sommerschulferien nicht in den Urlaub reist unter der Bedingung, dass er Autofahrer ist und daher nach der Arbeitszeit noch Ware ausliefern kann. (3 Punkte)

(b) Ein Mechaniker entfernt an einer Maschine 7 Schraubenmuttern, alles Muttern mit $M10$–Gewinden, wie der denkt. Als er dann die Muttern nach dem Mitagessen genau betrachtet stellt er fest, dass 3 davon selbstsichernde Muttern mit eingelassenem Kunststoffsicherungsring sind. Eine hat sogar eine Nut eingefräst, wodurch sie nach dem Einbau in das Gehäuse von oben durch eine Rohröffnung mit dem Schraubenzieher gelocker und wieder angezogen werden kann. Die Montage des Gehäuses benötigt drei Stunden. Was ist die Chance, die Muttern zufällig richtig wieder zu montieren? (3 Punkte)

(c) Auf wieviele Arten kann bei einer Belegschaft von 14 Personen an 5 Mitarbeiter ein Bonus ausbezahlt werde, wenn es erlaubt ist, dass ein Mitarbeiter maximal 2 Boni kassieren kann und daher weniger als 5 Mitarbeiter etwas bekommen? (3 Punkte)

(3) **(9 Punkte)**

Qualitätsprognose:

(a) Wie gross ist die Chance, dass aus einer Lieferung von 28 Hochleistungspumpen 6 Pumpen, welche in einem unbewohnten, wettergeplagten Hochtal in Punkern verschlossen eingebaut werden, eine Dauerbetriebsdauer von mehr als 1 Jahr haben werden, wenn man durch Versuche herausgefunden hat, dass von 10 Pumpen nur 3 Stück diese Qualität aufgewiesen haben. (6 Punkte)

(b) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung der zugehörigen Verteilung. (3 Punkte)

(4) **(9 Punkte)**

Regression:

Gegeben sind die Fakultäten $k!$ der Zahlen von $k = 1$ bis $k = 12$ und damit die Punkte $(x(k), y(k)) = (k, k!)$. Es ist sofot klar, dass diese Punkte nicht auf einer Geraden liegen können.

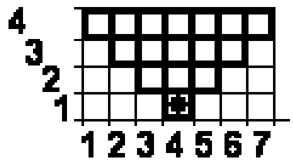
(a) Versuche daher herauszufinden, ob eher die Punkte $(x(k), y(k)) = (k, \ln(k!))$ auf einer Geraden liegen. Berechne dazu die zugehörige Funktion der Regressionsgeraden $y_1(x) = a_1\, x + b_1$. (3 Punkte)

(b) Versuche daher herauszufinden, ob vielleicht vielmehr die Punkte $(x(k), y(k)) = (k, \ln(k!))$ auf einer Parabel liegen. Berechne die zugehörige Funktion der Regressionsparabel $y_2(x) = a_2\, x^2 + b_2\, x + c_2$. (3 Punkte)

(c) Berechne die zugehörigen Fehlerquadratsummen $s_1 = \sum\limits_{k=1}^{12} ((\ln(k!) - y_1(k))^2$ und auch $s_2 = \sum\limits_{k=1}^{12} ((\ln(k!) - y_2(k))^2$ und beurteile, ob man mit der quadratischen Regression den Wert von s_1 halbieren kann. (3 Punkte)

(5) **(6 Punkte)**

Qualitätskontrolle:



In einem quadratischen Raster der Grösse 7×4 werden zufällig die Pixel schwarz oder weiss gefärbt. Was ist die Chance, dass das Pixel mit dem Markierpunkt unten (siehe Skizze, Startpixel **SP**) schwarz ist und sich dabei mindestens eine schwarze Linie vom Punkt **SP** nach oben (im fett dargestellten Bereich) ausbildet, in der immer schwarze Pixel entweder an der horizontalen Kante oder an einer Ecke „oben rechts — unten links" oder „oben links — unten rechts" zusammenstossen?

(6) **(12 Punkte)**

Datensätze:

Gegeben sind zwei Datensätze M_1 und M_2:

$$M_1 = \{44.0, 50.5, 51.4, 48.9, 52.3, 55.4, 54.5, 57.3, 58.4, 63.3, 65.9, 66.6\}$$

$$M_1 = \{44., 47.5, 47.1, 52.2, 49.9, 50.6, 52.5, 58.3, 58.6, 59.1, 61.8, 64.3\}$$

Dabei handelt es sich um die Temperaturmessungen an zwei gleichen belasteten Wellen am selben Tage etwa alle 15 Minuten nach der selben Startzeit.

(a) Berechne von den beiden Datensätzen jeweils Mittelwert, Median und Standardabweichung. (3 Punkte)

(b) Stelle die Datensätze in einem Box–Whiskers–Plot einander gegenüber. (3 Punkte)

(c) Bestimme zu den Datensätzen jeweils die Regressionsgerade numerisch und zeichne die Daten mit der Gerade je in ein Diagramm ein. (1. Datenelement bei 15 Minuten, Zeit in Minuten.) (3 Punkte)

(d) Beurteile die Bonität oder Güte der Daten unter der Annahme, dass sich eine Welle im Betrieb mit der Zeit vermutlich konstant erwärmen muss. (3 Punkte)

— ENDE —

53.12 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html.

Kapitel 54

Phase 17 (II/1)

54.1 Stoffprogramm Phase 17 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

⊘ Nach dem bisher praktizierten System

⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

54.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 1

---

(1) Geg.:
Bernoulliexperiment, Bernoulliverteilung, $p = 0.3$

(a) Interpretation (Beispiel)?
(b) Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$, Diagramm (Plot)?
(c) Verteilungsfunktion $F(x)$, Diagramm (Plot)?
(d) Mittelwert, Varianz, Standardabweichung, Quantile?

(2) Geg.:
Binomialverteilung, $p = 0.3, \;\; n = 34$

(a) Interpretation (Beispiel)?
(b) Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$, Diagramm (Plot)?
(c) Verteilungsfunktion $F(x)$, Diagramm (Plot)?
(d) Mittelwert, Varianz, Standardabweichung, Quantile?

(3) Kartenspiel, 32 Karten, 4 Könige, 10 mal ziehen mit zurücklegen.
$P(\text{mind. 6 Könige}) = ?$

(4) Geg.: 120 ganzzahlige Messergebnisse.
$P(\text{mind. 50 Ergebnisse sind ungerade}) = ?$, $P(\text{max. 60 Ergebnisse sind ungerade}) = ?$,
$P(\text{max. 50 Ergebnisse sind ungerade}) = ?$

(5) Geg.: 10 Arbeiter. Jeder braucht das Gerät Nana 5 Minuten pro Stunde. Genügen 3 Geräte, oder entstehen zu grosse Wertezeiten?

(6) Fehlerrechnung

Geg.: Dreieck ABC. Gemessen werden $a = 104.36 \pm 0.02\,m, \;\; b = 96.28 \pm 0.02\,m$,
$\gamma = 52^o\, 12\,' \pm 10\,'$.
Berechne $c \pm \Delta c\, m$!

54.3 Link zu den Lösungen Phase 17

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta201.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta201.nb

Kapitel 55

Phase 18 (II/2)

55.1 Stoffprogramm Phase 18 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

⊘ Nach dem bisher praktizierten System

⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

55.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 2

---

(1) Geg.:
Würfel, n mal würfeln, X = Anzahl von Resultat 6. $\leadsto$ Binomialverteilung, $p = 1/6$.
Diagramm von $f(x)$, $F(x)$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20$?

(2) Geg.:
Poissonverteilung: Serienfertigung von Widerständen zu 20 Ω, garantierte Toleranz: $\pm 1\ \Omega$. Wahrscheinlichkeit p, bei der Produktion die Toleranz zu überschreiten $= 0.002$. Was ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Packung von n Stück kein fehlerhaftes Stück zu finden bei $n = 100$ und $n = 1000$?

(3) Poissonverteilung:

(a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Dorfe mit 2000 Einwohnern genau zwei am ersten Mai Geburtstag haben?

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Dorfe mit 2000 Einwohnern mindestens zwei am ersten Mai Geburtstag haben?

(4) Teilchenzählung nach Rutherford und Geiger:
X = Anzahl Teilchen.
A = Anzahl beobachtete Zeitintervalle zu $10'$ mit x gezählten Teilchen.

x	A	p
0	57	?
1	203	?
2	383	?
3	525	?
4	532	?
5	408	?
6	273	?
7	139	?
8	45	?
9	27	?
10	10	?
11	4	?
12	2	?
13	0	?
	Σ ?	?

Vergleiche die Werte mit den Werten einer Poissonverteilung (Diagramm)!

(5) Hypergeometrische Verteilung: Aus einer Urne mit 11 roten und 4 schwarzen Kugeln werden 4 Kugeln ohne zurücklegen gezogen. $P(x \text{ Kugeln rot}) = ?$, $x = 1, 2, 3, 4$.

%

(6) Vergleiche die hypergeometrische Verteilung mit $N = 1000,\ \ M = 20,\ \ n = 100$ mit der Binomialverteilung mit $p = M/n,\ \ M = 20,\ \ n = 100$.

(7) Gegeben: Lieferung von Teilen, Packungen zu 100 Stück. Nach Vertrag ist max. 10% Ausschuss zulässig. Prüfverfahren: Der obere Teil der Packung (10 Stück) wird begutachtet. Falls kein defektes Stück darunter ist, erfolgt die Annahme. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Packung zurückgewiesen wird, obwohl weniger als 10% defekt ist?

(8) **Fehlerrechnung:**

In einem Rohr mit dem Durchmesser $2.00\,cm \pm 0.02\,cm$ herrscht ein messbarer Druck von $11.2\,N/cm^2$ ($\pm 0.1\,N/cm^2$). Der Druck wird mittels eines Steigrohrs gemessen. In das Rohr fliessen $5.00\,cm^3/sec$ (ideale) Flüssigkeit mit einer Dichte von $0.83\,kg/dm^3\ \pm 0.01\,kg/dm^3$. Nun verengt sich das Rohr auf $1.20\,cm \pm 0.02\,cm$. Im neuen Bereich kann der Druck nicht mehr mittels eines Steigrohrs gemessen werden, denn die Platzverhältnisse lassen dies nicht zu. Da die Flüssigkeit sehr wenig komprimierbar ist, wird angenommen, dass die Dichte im engen Bereich $0.83\,kg/dm^3 \pm 0.03\,kg/dm^3$ beträgt. Weil die Unsicherheit zunimmt (wie im weiten Bereich, jedoch mit einer grösseren Ungenauigkeit). Durch die Verengung kann auf die Geschwindigkeit im engeren Bereich geschlossen werden: Wenn man annimmt, dass pro Zeit dasselbe Volumen und dieselbe Masse überall durchfliessen müssen. Nach der Strömungsgleichung von Bernoulli ist $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{\text{Druck}\,p}{\text{Dichte}\,\rho} = constant.$
Berechne den Druck im engen Bereich mitsamt dem Fehler.

Bemerkung: Z.B. statt $2.00\,cm \pm 0.02\,cm$ schreibt man gewöhnlich auch $2\,cm \pm 0.02\,cm$, meint damit aber $2.00\,cm \pm 0.02\,cm$.

55.3 Link zu den Lösungen Phase 18

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta202.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta202.nb

Kapitel 56

Phase 19 (II/3)

56.1 Stoffprogramm Phase 19 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

- ⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

56.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 3

(1) Geg.:
Normalverteilungen. Erstelle die Plots von $f(x)$ und von $F(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\,\pi}} \cdot e^{(-\frac{1}{2}\cdot(\frac{\nu-\mu}{\sigma})^2)}$$

(a) $\mu = 0,\ \ \sigma = 1$
(b) $\mu = 0,\ \ \sigma = 2$
(c) $\mu = 0,\ \ \sigma = \frac{1}{2}$
(d) $\mu = 3,\ \ \sigma = 1$
(e) $\mu = 3,\ \ \sigma = 2$
(f) $\mu = 3,\ \ \sigma = \frac{1}{2}$

(2) X sei die Dicke eines Werkstückes mit dem Sollwert $\mu = 30\,mm$. Man weiss aus Erfahrung, dass X annähernd normalverteilt ist und dass $\sigma \approx 0.02\,mm$ ist. Als Toleranz wird $\pm 0.03\,mm$ verlangt. Wieviel % Ausschuss ist zu erwarten?

(3) Wir wissen aus Erfahrung, dass wir unsere Erfindung an einer Fachmesse in ca. 7 % der Erstkontakte mit Kunden einmal pro Kunde verkaufen können. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 400 Erstkontakten mindestens 10 Exemplare verkauft werden können.

(a) Mit Hilfe der Binomialverteilung.
(b) Mit Hilfe der Normalverteilung (Moivre–Laplace).

(4) Ausgleichskurve, Regressionskurve:

Gegeben sind die Punkte:

(0, 0.497), (1, 0.580), (2, 0.839), (3, 0.933), (4, 1.044), (5, 1.141), (6, 1.151), (7, 1.313), (8, 1.404), (9, 1.409), (10, 1.422), (11, 1.451), (12, 1.529).

Die erste Koordinate ist jeweils exakt, da es sich um Anzahlen handelt.

(a) Suche die beste Gerade durch diese Punkte.
(b) Suche die beste Parabel durch diese Punkte.
(c) Suche die beste Sinuslinie durch diese Punkte.

56.3 Link zu den Lösungen Phase 19

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta203.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta203.nb

Kapitel 57

Phase 20 (II/4)

57.1 Stoffprogramm Phase 20 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

- *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

- Nach dem bisher praktizierten System
- Kleinprojekt: Siehe Übungen

57.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 4

---

(1) Vergleiche die Bernoulliverteilung mit der Normalverteilung für $n = 10, 100, 1000$, $p = 0.5$. Erstelle die Plots von $f(x)$ und $\varphi(x)$.

(2) Prüfe den Grenzwertsatz von De Moivre–Laplace am Beispiel des Würfelexperiments. Schreibe ein Programm, in dem ein Zufallsgenerator n mal würfelt. Vergleiche damit die relative Häufigkeit mit der Wahrscheinlichkeit für grosse n

(3) Mache einen Plot der logarithmischen Normalverteilung für:

(a) $a = 10$, $\mu = 0$, $\sigma = 0.5$
(b) $a = e$, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

(4) Mache einen Plot der Exponentialverteilung für:

(a) $\alpha = 1$
(b) $\alpha = 2$

(5) Mache einen Plot der Weibullverteilung für:

(a) $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 0$
(b) $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$
(c) $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$
(d) $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$
(e) $a = 1$, $b = 4$, $c = 0$
(f) $a = 2$, $b = 4$, $c = 0$
(g) $a = 2$, $b = 4$, $c = 1$

(6) Mache einen Plot der Gammaverteilung für:

(a) $b = 0.5$, $p = 1$
(b) $b = 1$, $p = 1$
(c) $b = 1$, $p = 0.5$
(d) $b = 1$, $p = 2$
(e) $b = 1$, $p = 4$

%

(7) Ausgleichsgerade: Gegeben sind die Punkte:

(0, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (5, 3).

(a) Berechne die Ausgleichsgerade durch diese Punkte und skizziere die Gerade möglichst exakt in einem Diagramm.

(b) Berechne den Korrelationskoeffizienten. Vgl. dazu auch http://de.wikipedia.org/wiki/Korrelationskoeffizient

(c) Nun wird bemerkt, dass bei allen Punkten die Koordinaten vertauscht worden sind. x wäre demnach richtig y und umgekehrt. Berechne für die neue Situation ebenfalls die Ausgleichsgerade und skizziere diese ebenfalls in das Diagramm.

(d) Stehen die beiden Geraden exakt senkrecht aufeinander?

(8) Korrelationskoeffizient: Gegeben sind die Punkte:

$M_1 = \{(0.0, 0.0), (0.1, 1.0), (1.0, 0.0), (0.9, 1.1)\}$ und
$M_2 = \{(0.0, 0.0), (1.0, 0.1), (2.0, -0.1), (3.0, 0.0)\}$.

(a) Berechne für M_1 den Korrelationskoeffizienten.

(b) Berechne für M_2 den Korrelationskoeffizienten.

(c) Was ist zu diesen Resultaten zu bemerken?

57.3 Link zu den Lösungen Phase 20

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta204.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta204.nb

Kapitel 58

Phase 21 (II/5)

58.1 Stoffprogramm Phase 21 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

- *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

- Nach dem bisher praktizierten System
- Kleinprojekt: Siehe Übungen

58.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 5

---

(1) Selbststudium im Script: Fehlerrechnung, Regression, Korrelation.

(2) $w = f(x, y, z) = e^{x^2-y^2} + tan(x - y^3) + \frac{1}{ln(z)}, \;\; x = 4 \pm 0.02, \;\; y = 6 \pm 0.03, \;\; z = 2 \pm 0.01$
$\rightsquigarrow \; f(x, y, z) \pm \Delta w = \,?$ *(Hinweis:* $4 = 4.00$ *u.s.w.)*

(3) Punktmenge $M = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 5), (5, 6), (6, 5), (7, 5), (8, 4), (9, 4)\}$.

(a) Regressionsgerade?

(b) Korrelationskoeffizient?

(c) Bild?

58.3 Link zu den Lösungen Phase 21

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta205.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta205.nb

Kapitel 59

Phase 22 (II/6)

59.1 Stoffprogramm Phase 22 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

- *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

- Nach dem bisher praktizierten System
- Kleinprojekt: Siehe Übungen

59.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 6

---

(1) Selbststudium im Script: Fehlerrechnung, Regression, Korrelation.

(2) Bei der Qualitätskontrolle eines Loses von Wellen werden die Dicke d und gleichzeitig am selben Stück jeweils auch die Länge l kontrolliert. (Dicke und Länge werden jeweils in einem separaten Arbeitsgang gefertigt. Sie können daher als unabhängig angesehen werden.) Wir können die Werte von X und Y frei wie folgt festlegen:

Kriterium:	X	Y
d innerhalb der Toleranz	$x_1 = 0$	$-$
d ausserhalb Toleranz	$x_2 = 1$	$-$
l innerhalb der Toleranz	$-$	$y_1 = 0$
l ausserhalb Toleranz	$-$	$y_2 = 1$

Aus Erfahrung wissen wir:

Kriterium:	Menge:
Ausschuss	2%
d falsch	1%
l falsch	0.7%
d und l falsch	0.3%

X / Y	0	1	
0	$p_{1\,1} = ?$	$p_{2\,1} = ?$	$p_{\cdot 1} = ?$
1	$p_{1\,2} = ?$	$p_{2\,2} = ?$	$p_{\cdot 2} = ?$
	$p_{1\cdot} = ?$	$p_{2\cdot} = ?$	$p_{tot} = ?$

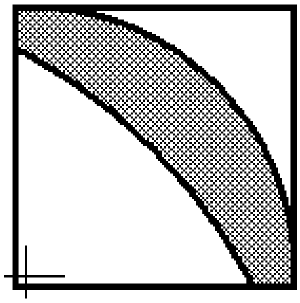
Übersicht über die Randsummen:

$$\begin{aligned}
p_{\cdot 1} &= P(Y=0) = p_{1\,1} + p_{2\,1} = ?\\
p_{\cdot 2} &= P(Y=1) = p_{1\,2} + p_{2\,2} = ?\\
p_{1\cdot} &= P(X=0) = p_{1\,1} + p_{1\,2} = ?\\
p_{2\cdot} &= P(X=1) = p_{2\,1} + p_{2\,2} = ?
\end{aligned}$$

$\leadsto$ Sind in diesem Beispiel die Variablen unabhängig?

%

(3) Beispiel einer Monta–Carlo–Simulation:



Im nebenstehenden Bild ist ein achsenparalleles Quadrat gezeigt mit der Seitenlänge 24. Der linke untere Eckpunkt des Quadrats hat die Koordinaten (0, 0). Weiter sind zwei Kreisabschnitte K_1 und K_2 zu sehen. K_1 stammt von einem Kreis mit Radius $r = 23$ und dem Mittelpunkt $M_1(1, 1)$. K_2 hat den Radius 52 und den Mittelpunkt $(-26, -26)$. Wie gross ist der gezeigte eingeschlossene Flächeninhalt? Ermittle diesen Inhalt

(a) approximativ durch eine Monte-Carlo-Simulation und

(b) durch numerische Integration!

59.3 Link zu den Lösungen Phase 22

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta206.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta206.nb

Kapitel 60

Phase 23 (II/7)

60.1 Stoffprogramm Phase 23 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

- ⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

60.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 7

(1) Es wird gewürfelt mit zwei idealen Würfeln.

(a) Ermittle die Wahrscheinlichkeitsfunktionen p_X, p_Y, p_{XY}.

(b) $Z_1 = X + Y,\ \ Z_2 = X \cdot Y$ Ermittle Mittelwerte und Varianzen für Z_1 und Z_2.

(c) Berechne die Kovarianz und die Korrelation für X und Y.

(d) Berechne die Kovarianz und die Korrelation für Z_1 und Z_2.

(2) Zwei Personen wählen drei Modelle nach folgender Wahrscheinlichkeitstabelle:

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = .$
$X = 1$	$p_{11} = \frac{1}{4}$	$p_{12} = \frac{1}{12}$	$p_{13} = \frac{1}{12}$	$p_{1.} = \frac{1}{2}$
$X = 2$	$p_{21} = \frac{1}{4}$	$p_{22} = \frac{1}{12}$	$p_{23} = \frac{2}{12}$	$p_{2.} = \frac{1}{3}$
$X = 3$	$p_{31} = \frac{1}{4}$	$p_{32} = \frac{1}{12}$	$p_{33} = \frac{1}{12}$	$p_{3.} = \frac{1}{6}$
$X = .$	$p_{.1} = \frac{1}{3}$	$p_{.2} = \frac{1}{4}$	$p_{.3} = \frac{5}{12}$	$p_{..} = 1$

(a) Ermittle die Wahrscheinlichkeitsfunktionen p_X, p_Y, p_{XY}.

(b) $Z_1 = X + Y,\ \ Z_2 = X \cdot Y$
Ermittle Mittelwerte und Varianzen für Z_1 und Z_2.

(c) Berechne die Kovarianz und die Korrelation für X und Y.

(3) Gegeben sind die vier Punkte:

(a) $\{(1,\ 1),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (1,\ -1)\}$

(b) $\{(-1,\ 0),\ (0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0)\}$

(c) $\{(-1,\ 1),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1),\ (2,\ 1)\}$

(d) $\{(0,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2.5),\ (3,\ 3)\}$

(e) $\{(0,\ 1),\ (1,\ 1),\ (2,\ 1.3),\ (3,\ 1)\}$

Berechne jeweils die Ausgleichsgerade und den Korrelationskoeffizient. Was ist an diesen Beispielen bemerkenswert?

60.3 Link zu den Lösungen Phase 23

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta207.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta207.nb

Kapitel 61

Phase 24 (II/8)

61.1 Stoffprogramm Phase 24 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

⊘ Nach dem bisher praktizierten System

⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

61.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 8

(1) Normalverteilung in x, y:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y\,\sqrt{1-\varrho_{XY}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\,(1-\varrho_{XY}^2)}\cdot((\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})^2)-(2\frac{\varrho_{XY}\,(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y})+(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y})^2)}$$

Speziell: $\mu_X = \mu_Y = 0, \;\; \sigma_X = \sigma_Y = 1$

$$f_2(x,y) = \frac{1}{2\,\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

(a) Plot 3D für:
$f_1, \;\; f_2$ mit $\mu_X = 3, \;\; \mu_Y = 2, \;\; \sigma_X = 3, \;\; \sigma_Y = \frac{2}{3}, \;\; \varrho_{XY} = \frac{1}{2}$

(b) Berechne: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x,y)\,dx\,dy, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x,y)\,dx\,dy.$

(c) $\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{0} f_2(x,y)\,dx\,dy = ?, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0} f_2(x,y)\,dx\,dy = ?,$
$\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x,y)\,dx\,dy = ?, \quad \int\limits_{-\infty}^{3}\int\limits_{-\infty}^{2} f_1(x,y)\,dx\,dy = ?$

(2) (a) $\bar{X} = X_1 + X_2, \;\; \mu_{X_1} = \mu_{X_2}, \;\; \sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} \rightsquigarrow \;\; \mu_{\bar{X}} = ?, \;\; \sigma_{\bar{X}} = ?$

(b)

$$f_2(x) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma_X} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})^2}, \;\; F_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_2(u)\,du$$

Berechne $F_2(\infty)$ für $\mu_X = 4, \;\; \sigma_X = 5.$
Berechne $F_2(\mu)$ für $\mu_X = 4, \;\; \sigma_X = 5.$

(c)

$$f_3(x) = \frac{1}{2\,\pi\,c_1\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{(c_1\,x+c_2)-(c_1\,\mu+c_2)}{c_1\,\sigma})^2}, \;\; F_3(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_3(u) \cdot \frac{d\,(c_1\cdot u + c_2)}{d\,u}\,du$$

Berechne $F_3(\infty)$ für $\mu_X = 4, \;\; \sigma_X = 5.$

(3) Wahrscheinlichkeitsdichte von χ^2:

$$K_n := \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\dfrac{n}{2})}, \qquad f(x,n) \;\; = \;\; \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ K_n \cdot x^{\frac{n-2}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \end{cases}$$

(a) Berechne $K_n, \;\; n = 1, \ldots, 10$

(b) Plot $f(x,n), \;\; n = 5, \;\; n = 10.$

(c) $F(x,n) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u,n)\,du \rightsquigarrow \; F(2,5) = \,?$

(4) Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion der Student–Verteilung:

$$f(z,n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z^2}{n})^{(n+1)/2}}, \quad F(z,n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{1}{(1+\frac{u^2}{n})^{(n+1)/2}}\,du$$

(a) Plot $f(x,n),\ \ n = 10$.

(b) Plot $F(x,n),\ \ n = 10$.

(5) Gegeben ist der Datensatz $\{x_k \mid k = 1,\ldots,n\} = \{4.6,\, 4.5,\, 4.3,\, 4.7,\, 4.5,\, 4.6,\, 4.7,\, 4.5,\, 4.8\}$.

(a) Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung.

(b) Bei Daten der gegebenen Form ist man übereingekommen, dass die Standardabweichung als Standardfehler genommen werden soll. Beziffere mit der Grösse $\bar{x} \pm \Delta x$ einen Schätzer für $\mu_X \pm \sigma_X$.

(c) Gegeben ist die Funktion $Y = f(X) = \dfrac{\sin(X - X^2)}{1 - X^2} - \dfrac{1}{X}$. Berechne mit den Werten $\bar{x} \pm \Delta x$ einen Schätzer für $\mu_Y \pm \sigma_Y$.

61.3 Link zu den Lösungen Phase 24

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta208.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta208.nb

Kapitel 62

Phase 25 (II/9)

62.1 Stoffprogramm Phase 25 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

62.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 9

SQC, SPC:

(1) Bei einer Fertigung eines Artikels soll der exakte Wert μ_0 der Länge l innerhalb gewisser Toleranzen eingehalten werden. Aus Erfahrung wissen wir, dass l etwa einer Normalverteilung mit $\mu = \mu_0$ genügt. σ kennen wir ebenfalls aus Erfahrung. Wir entnehmen der Produktion in regelmässigen Abständen Stichproben vom Umfang n. Bestimme die kritischen Grenzen von μ bei gegebenem Signifikanzniveau α.

(a) $n = 10,\ \ \alpha = 0.001,\ \ \mu_0 = 200,\ \ \sigma = 4$

(b) $n = 100,\ \ \alpha = 0.001,\ \ \mu_0 = 200,\ \ \sigma = 4$

(c) $n = 1000,\ \ \alpha = 0.001,\ \ \mu_0 = 200,\ \ \sigma = 4$

(d) $n = 100,\ \ \alpha = 0.001,\ \ \mu_0 = 200,\ \ \sigma = 0.1$

(2) Entwerfe eine Kontrollkarte (Script ca. Seite 143) für:

$$n = 100,\ \ \alpha = 0.001,\ \ \beta = 0.01,\ \ \mu_0 = 200,\ \ \sigma = 4$$

(3) Selbststudium:

Studiere die Theorie der Annahmekontrolle (SQC2, Script ca. Seite 143–155).

(4) Argumentationsgrundlagen für eine Direktionssitzung:

Eine Firma hat sich intern in Untereinheiten organisiert, welche sich jetzt bezüglich buchhalterischer Gewinne konkurrenzieren. Dadurch möchte man die Leistung steigern. Eine dieser Einheiten vermietet tageweise dieselbetriebene Baumaschinen. Alle Maschinen sind mit einem Betriebsstundenzähler und einem Protokollschreiber ausgestattet. Die Protokolle müssen täglich per Kurier einer Sammelstelle zugeführt werden.
Pro Jahr werden ca. 8000 Tageseinsätze mit solchen Maschinen durchgeführt. Für die nun anstehenden Jahresabrechnung soll innerhalb der Vermietereinheit kontrolliert werden, ob man von den internen Mietern nicht über's Ohr gehauen werde und die Mieter die Maschinen systematisch zu lange in Betrieb haben, was zu Mehrkosten infolge früher notwendigem Ersatz führt. Das könnte die betroffene Untereinheit intern in Schieflage bringen.
Man entschliesst sich daher zu folgendem Vorgehen: Es wird eine Stichprobe von ca. 90 Einsätzen zufällig aus den Zählerprotokollen herausgegriffen. Mehr wäre wegen der hohen Lohnkosten zu teuer. Dann soll rechnerisch abgeschätzt werden, ob man im Mittel mit den Tageseinsätzen über einem von den internen Vorschriften her limitierten 8–Stunden–Tag liegt. Mit einer etwaigen zu hohen Zahl soll dann an der Jahresabschlusssitzung der Direktion für die Rechte der eigenen Untereinheit gefochten werden.

Sortierte Tabelle der erhobenen Werte:

Anzahl Maschinen	Tagesstunden
1	7.6
2	7.7
6	7.8
6	7.9
10	8.0
13	8.1
14	8.2
13	8.3
10	8.4
7	8.5
5	8.6
1	8.7
2	8.8

(a) Aus dem Skript ist ersichtlich, dass man bei einer Grundgesamtheit von n Werten mittels einer Stichprobe von $k \geq \sqrt{n}$ mit grosser Wahrscheinlichkeit auf die Grundgesamtheit schliessen kann. Begründe, ob das bei dieser Angelegenheit hier der Fall ist

(b) Berechne den Mittelwert der Stichprobe.

(c) Berechne den Messfehler des Mittelwerts der Stichprobe.

(d) Berechne einen einfachen Schätzer für den Mittelwert der Grundgesamtheit.

(e) Berechne einen einfachen Schätzer für die Streuung (Standardabweichung) des Mittelwerts der Grundgesamtheit.

(f) Kontrolliere mittels einer graphischen Abschätzung, ob die Stichprobenwerte ungefähr normalverteilt sind.

(g) Berechne auf der Grundlage der Normalverteilung annähernd ein 95 %–Vertrauensintervall für den Mittelwerts der Grundgesamtheit.

(h) Berechne auf der Grundlage der Normalverteilung annähernd ein 99.75 %–Vertrauensintervall für den Mittelwert der Grundgesamtheit.

62.3 Link zu den Lösungen Phase 25

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta209.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta209.nb

Kapitel 63

Phase 26 (II/10)

63.1 Stoffprogramm Phase 26 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

- ⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

63.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 10

SQC2:

(1) Qualitative Annahmestichprobe, ziehen ohne zurücklegen, hypergeometrische Verteilung:

(a) i. Wähle: $N = 1'000,\ \ n = 10,\ \ M = 5.$
ii. Tabelliere die Werte für $m = 0$ bis $m = 10$.
iii. Vergleiche die Tabelle mit der entsprechenden Tabelle für die Poissonverteilung. Berechne die Quotienten der Werte für hypergeometrische Verteilung und Poissonverteilung.

(b) i. Wähle: $N = 10'000,\ \ n = 100,\ \ M = 20.$
ii. Tabelliere die Werte für $m = 0$ bis $m = 20$.
iii. Vergleiche die Tabelle mit der entsprechenden Tabelle für die Poissonverteilung. Berechne die Quotienten der Werte für hypergeometrische Verteilung und Poissonverteilung.

(2) (a) i. Zeichne den Graphen der Annahmewahrscheinlichkeitsfunktion bei einer hypergeometrischen Verteilung für $N = 120,\ \ n = 3,\ \ c = 0, 1, 2, 3.$
ii. Zeichne den Graphen der Annahmewahrscheinlichkeitsfunktion bei einer Poissonverteilung für $n = 3,\ \ c = 0, 1, 2, 3.$

(b) i. Zeichne den Graphen der Annahmewahrscheinlichkeitsfunktion bei einer hypergeometrischen Verteilung für $N = 120,\ \ n = 10,\ \ c = 0, \ldots, 10$. Animiere die Graphiken in Mathematica. (Wähle die Graphiken mit der Maus aus. Gehe dann in Cell, Animate selected graphics".)
ii. Zeichne den Graphen der Annahmewahrscheinlichkeitsfunktion bei einer Poissonverteilung für $n = 10,\ \ c = 0, \ldots, 10$. Animiere die Graphiken in Mathematica. (Wähle die Graphiken mit der Maus aus. Gehe dann in Cell, Animate selected graphics".)

(3) Gegeben ist eine Stichprobe einer konzeptionellen Grundgesamtheit von Messwerten mit unbekannter Verteilung. Mittels der Stichprobe hat man den Erwartungswert $\mu \approx 0.0$ und die Standardabweichung $\sigma \approx 1.0$ geschätzt. Nun stellt sich die Frage, was sich über die Wahrscheinlichkeit eines in der Urliste gefundenen Ausreissers $x_{872} = 100.0$ aussagen kann. Untersuche diese Frage. (*Hinweis:* Tschebyschow.)

(**Zur Lösung dieser Aufgabe:** Hier wird diesmal kein Hinweis gegeben. Die Sache ist so einfach, dass die Darstellung resp. die Anleitung im Anhang zum Skript oder in der Literatur für die Lösung genügen sollte. In der Praxis muss man sich auch mit den eigenen Ergebnissen begnügen. Kein Fremder sagt einem normalerweise ohne Bezahlung, welche Lösung richtig und statthaft ist. . .)

WIR

63.3 Link zu den Lösungen Phase 26

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta210.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta210.nb

Kapitel 64

Phase 27 (II/11)

64.1 Stoffprogramm Phase 27 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

⊘ Nach dem bisher praktizierten System

⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

64.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 11

SQC2:

(1) Studiere folgenden Stichprobenprüfplan (ohne zurücklegen):

Grundgesamtheit	N	$10'000$
Stichprobenumfang	n	50
Regel: $m \leq c$	c_1	2
Regel: $m \leq c$	c_1	5
Regel: $m \leq c$	c_1	7

Es gilt: $p = \dfrac{M}{N} \;\Rightarrow\; M = N \cdot p.$

Sei $\quad Y \rightsquigarrow p \qquad \Rightarrow P(X = m \leq c) = L_{N,n,c}(Y) = L_{N,n,c}(\dfrac{M}{N}) = L^*_{N,n,c}(M)$

(a) Zeichne die Diagramme von $L^*_{N,n,c}(M)$ für c_1, c_2, c_3.

(b) Sei $\qquad p_\beta = 0.2$

i. Berechne dazu jeweils β.
ii. Berechne dazu M.
iii. Wie gross ist beim gegebenen Prüfplan bei $c_1 = 2$ die Wahrscheinlichkeit, die Sendung mit $M = 2000$ anzunehmen?
iv. Wie gross ist beim gegebenen Prüfplan bei $c_1 = 2$ die Wahrscheinlichkeit, die Sendung mit $M = 2000$ abzulehnen?
v. Wie gross ist beim gegebenen Prüfplan bei $c_1 = 2$ die Wahrscheinlichkeit, die Sendung mit noch mehr Ausschuss, speziell mit $M = 3000$, anzunehmen? (Fehler 2. Art!)

(c) Sei $\qquad p_\alpha = 0.1$

i. Berechne dazu jeweils α.
ii. Berechne dazu M.
iii. Wie gross ist beim gegebenen Prüfplan bei $c_3 = 7$ die Wahrscheinlichkeit, die Sendung mit $M = 2000$ anzunehmen?
iv. Wie gross ist beim gegebenen Prüfplan bei $c_3 = 7$ die Wahrscheinlichkeit, die Sendung mit $M = 2000$ abzulehnen?
v. Wie gross ist beim gegebenen Prüfplan bei $c_3 = 7$ die Wahrscheinlichkeit, die Sendung mit noch weniger Ausschuss, speziell mit $M = 500$, abzulehnen? (Fehler 1. Art!)

%

(2) Skript http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursWahrschStatistAnhangd.pdf
Dort findet sich ein Kapitel mit einem Beispiel einer Bootstrap-Anwendung. Am Ende des Kapitels ist der Graph der gewonnenen Verteilungsfunktion dargestellt. Ermittle aus diesem Graphen ein 90%–Vertrauensintervall.

(**Zur Lösung dieser Aufgabe:** Hier wird nur ein knapper Hinweis gegeben. Weitere Anleitungen zur Lösung sind dem Anhang zum Skript oder der Literatur zu entnehmen. Das soll hier genügen. In der Praxis muss man sich auch mit den eigenen Ergebnissen zufrieden geben. Kein Fremder sagt einem normalerweise ohne Bezahlung, welche Lösung richtig und statthaft ist. . .)

64.3 Link zu den Lösungen Phase 27

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta211.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta211.nb

Kapitel 65

Phase 28 (II/12)

65.1 Stoffprogramm Phase 28 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

- ⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

65.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 12

Konvidenzintervall

(1) (a) Gegeben ist eine Lieferung von $4'800$ Distanzplatten mit dem Sollmass $d = 22.5\,mm$. Aufgrund früherer Lieferungen gehen wir davon aus, dass die wahren Werte von d ungefähr einer Normalverteilung folgen und dass die Varianz (in mm^2) etwa $\sigma^2 = 0.015^2$ beträgt. Wir entnehmen der Lieferung eine Stichprobe von 25 Stück und erhalten einen Mittelwert $\bar{x} = 22.46\,mm$. Berechne das Vertrauensintervall I zu $\alpha = 0.01$ für $\bar{x}$. Liegt $\mu = d$ in $I = [\bar{x} - h, \bar{x} + h]$?

(b) Wähle $\sigma = 0.15$. Wie ist es jetzt?

(c) Berechne σ für $\bar{x} + h(\sigma) = d = \mu$.

65.3 Link zu den Lösungen Phase 28

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta212.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta212.nb

Kapitel 66

Phase 29 (II/13)

66.1 Stoffprogramm Phase 29 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

- ⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

66.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 13

---

(1) Zweiseitige Alternative, t–Test:

$X \in N(\mu, \sigma^2)$, $H_0 = (\mu = \mu_0) \rightsquigarrow H_1 = (\mu \neq \mu_0)$, $\zeta(\mu) = \bar{x} = \bar{x}_n$

Sei $\bar{x} = 406.78$, $\mu_0 = 400$, $s = 2.0$, $n = 100$, $\alpha = 0.01$

H_0 verwerfen?

(2) Einseitige Alternative, t–Test:

$X \in N(\mu, \sigma^2)$, $H_0 = (\mu \geq \mu_0) \rightsquigarrow H_1 = (\mu < \mu_0)$, $\zeta(\mu) = \bar{x} = \bar{x}_n$

Sei $\bar{x} = 406.78$, $\mu_0 = 400$, $s = 2.0$, $n = 100$, $\alpha = 0.01$

H_0 verwerfen?

66.3 Link zu den Lösungen Phase 29

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta213.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta213.nb

Kapitel 67

Phase 30 (II/14)

67.1 Stoffprogramm Phase 30 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

⊘ Nach dem bisher praktizierten System

⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

67.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 14

---

(1) Projektarbeit nach mündlicher Anweisung.

Projektideen:

(a) Noten: Sammle die Noten über die ganze Schulzeit, ermittle Mittelwerte pro Jahr, Streuung, Gesamtmittelwert μ_0 etc.. Vergleiche mit dem Mittelwert μ der eigenen Leistung der momentanen Schule. Teste z.B. $H_0: \ \mu = \mu_0$. Die Sache lässt sich auch auf Klassen und Fächer ausdehnen. Problem: Wie genau hat man Normalverteilungen? Weitere Fragen?

(b) Autonummern: Ermittle den aktuellen Mittelwert μ_0 der Autonummern von Kantonen (Anfrage an die Strassenverkehrsämter, maximale Nummer bekannt.) Datensammlung: Ermittle auf grösseren Parkplätzen die Mittelwerte μ der vorhandenen Nummern nach Kantonen. Teste z.B. $H_0: \ \mu = \mu_0$. Wie steht es mit den Normalverteilungen? (!!!) Was lässt sich aus den Resultaten schliessen?

(c) Vermessung von Werkstücken. Schliesse z.B. auf die Konvidenzintervalle von Mittelwerten.

(d) Teste z.B. die Funktion Random in Mathematica. Generiere eine Liste von Zufallszahlen zwischen 0 und 1. Berechne μ. Da alle Zufallszahlen gleich wahrscheinlich sein müssen, muss $\mu_0 = 0.5$ gelten. Teste z.B. $H_0: \ \mu = \mu_0$. u.s.w..

(e) Verwende bekannte Daten von den Aufstehzeiten. Ermittle die Aufstehzeiten einer geeigneten Gruppe von Katholiken. Teste z.B. die Hypothese, dass Katholiken länger schlafen. Wie steht es mit dem Problem der Normalverteilungen? Wie steht es mit dem Problem der Zufallsdaten?

(f) ...

67.3 Link zu den Lösungen Phase 30

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta214.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta214.nb

Kapitel 68

Phase 31 (II/15)

68.1 Stoffprogramm Phase 31 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

- ⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

- ⊘ Nach dem bisher praktizierten System
- ⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

68.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 15

(1) Projektarbeit nach mündlicher Anweisung.

Ein Beispiel: Daten zu einer Verkehrszählung im Raume einer schweizerischen Grossstadt findet man unter dem nachfolgenden Link (.xls-File). Im .nb-File sieht man eine Anregung zu einer Auswertung. Was hingegen dann schliesslich ausgewertet werden soll, welche Fragen als interessant gelten sollen und wie die Sache darzustellen ist, muss hier, wie in der Praxis, eigenständig erarbeitet und entschieden werden. Ein Lösungsmuster gibt es somit nicht.

http://www.rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/restricted/TgGanlinie_zusfsg.xls

http://www.rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/restricted/TgGanlinie_zusfsg.nb

Achtung: Hier ist ein Passwort notwendig!

68.3 Link zu den Lösungen Phase 31

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta215.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta215.nb

Kapitel 69

Phase 32 (II/16)

69.1 Stoffprogramm Phase 32 ◇ M ◇

Statistik, 2 Semester

⊘ *Möglichkeit eines Programms siehe z.B. unter dem Link:*

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_M2p_Math_08.htm#Projekt

Arbeiten

⊘ Nach dem bisher praktizierten System

⊘ Kleinprojekt: Siehe Übungen

69.2 Übungen in Statistik ◇ M2 u.a. ◇ II / 16

---

(1) Projektarbeit nach mündlicher Anweisung — Bootstrap —- Monte Carlo..

69.3 Link zu den Lösungen Phase 32

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta216.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblWork/Math_EuM_Bach/LM2Sta216.nb

Kapitel 70

Tests Statistik Semester 2

70.1 Test ◇ M2–07/08–03 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♣ Falls eine Frage als Fallenfrage (unsinnige Frage) erkannt wird, lautet die Antwort „Frage nicht beantwortbar“.

Bootstrap–Techniken:

(1) Nenne zwei Methoden, mit welchen man exakte, nicht verteilungsfreie Vertrauensintervalle für unbekannte Parameter von Messgrössen bestimmen kann.

(2) Schildere kurz die notwendigsten, wesentlichen Eigenschaften eines Zufallsgenerators.

(3) Bei der Produktion von Plastic–Kugeln für ein Kinderspielzeug wird zwecks Qualitätssicherung eine Vorselektion gemacht. Im Selektionsprozess fallen die Kugeln zuerst durch die Maschen eines Lochsiebes mit den Lochdurchmessern von $9.001 \pm 0.001\,mm$. Anschliessend werden Kugeln ausgesondert, welche durch ein Sieb mit Lochdurchmessern von $8.799 \pm 0.001\,mm$ fallen. Damit ist ein Intervall I für die Kugeldurchmesser d_k gegeben. Die Kugeln werden schliesslich in 10-er Packungen ausgeliefert. Zur Kontrolle des Versandtgewichts und des Materialverbrauchs soll nun ein 90%–Vertrauensintervall für die Grösse $\bar{d}$ aus einem Intervall I bestimmt werden.
Schildere mit Hilfe des 5–Punkte–Schemas das Vorgehen bei der Bestimmung des Vertrauensintervalls (stichwortartig).

(4) Erkläge die Voraussetzungen, die Behauptungen und die Konsequnsequenzen für die Anwendung des Percentil–Lemmas.

(5) Bootstrap–Percentil–Vertrauensintervalle:

(a) Erkläre die Bootstrap–Methode (Plug–In–Methode) bei einem gegebenen Datensatz $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ für einen Parameter X. Was wird mit dieser Methode erreicht, hergestellt oder berechnet?

(b) Wie ist der Zusammenhang zwischen Plug–In–Methode und Bootstrap–Percentil–Vertrauensintervall?

(c) Was ist zum Stichprobenumfang bei der Anwendung der Plug–In–Methode zu bemerken betreffend Güte?

(d) Was ist zu den Stichprobenwerten bei der Anwendung der Plug–In–Methode zu bemerken betreffend Güte?

(6) Erkläre die Begriffe „Sensitivität“, „Spezifität“und „Rate“. (Erläutere die Begriffe durch Beispiele.)

(7) Erkläre den Begriff „Korrelation“. (Erläutere den Begriff durch Beispiele.)

(8) Zwei vergleichbare Datensätze sollen betreffend ihrer Streuung untersucht werden.

(a) Wie kann man sich rasch graphisch ein Bild von der Lage machen, ohne mit Verteilungsfunktionen operieren zu müssen?

(b) Schildere das Vorgehen zum Vergleich der Streuungen mit Hilfe eines „Quotienten“ und eines 95%–Percentil–Vertrauensintervalls.

(9) Was lässt sich zur Genauigkeit von Bootstrap–Percentil–Vertrauensintervallen sagen?

(10) Was lässt sich zum Aufwand bei Bootstrap–Percentil–Vertrauensintervallen bezüglich Anzahl Kopien sagen?

(11) (a) Was ist der Standardfehler einer Schätz–Statistik $\hat{\Theta}$?

(b) Was ist der Standardfehler des arithmetischen Mittelwerts einer Schätz–Statistik $\hat{\Theta}$?

(c) Nenne und erkläre eine Möglichkeit, um den Standardfehler einer relativen Häufigkeit $\neq 0$ bei Stichprobenumfang n direkt rechnerisch abzuschätzen?

(12) Wie lässt sich der Standardfehler einer Statistik empirisch mittels Bootstrapping schätzen? (Beschreibe das Verfahren!)

(13) Für eine Zufallsgrösse X liegen 410 Messwerte vor, welche ungefähr durch folgendes Modell beschrieben werden können: $x_k = 24.56 + 0.01 \cdot k + 0.02 \cdot k^2, \;\; k \in \{1, 2, 3, \ldots, 410\}$.

(a) Was ist das Besondere an dieser Art Verteilung?

(b) Jemand möchte X mit Hilfe einer Gaussverteilung modellieren. Gibt es dafür oder dagegen ein schlagendes Argument?

(c) Jemand möchte $\bar{X}$ mit Hilfe einer Gaussverteilung modellieren. Gilt das Argument aus der Antwort zur letzten Frage auch hier, wenn man die Erfahrung berücksichtigt?

(14) Gegeben ist eine Normalverteilung mit $\mu = 16.89$ und $\sigma = 0.93$. Berechne numerisch ein 99.5 %–Vertrauensintervall (Taschenrechner).

(15) Welcher mathematische Satz rechtfertigt unter günstigen Umständen gegebenenfalls die Approximation einer Verteilungen durch eine Normalverteilung?

(16) Der Erwartungswert μ_X und der Standardfehler $\widehat{SE}[\bar{X}]$ einer Messgrösse $\bar{X}$ sollen durch $\hat{\mu}_X \pm \widehat{SE}[\hat{\mu}_X] \approx 605.4 \pm 45.8$ geschätz werden. Weiter besteht zwischen X und einer von X abhängigen Messgrösse Y der Zusammenhang $Y = f(X) = X + \sin(X^2)$.

(a) Wie lautet die Formel für die 1. Approximation von Y und was ist ihr numerischer Wert?

(b) Wie lautet die Formel für die 2. Approximation von Y und was ist ihr numerischer Wert?

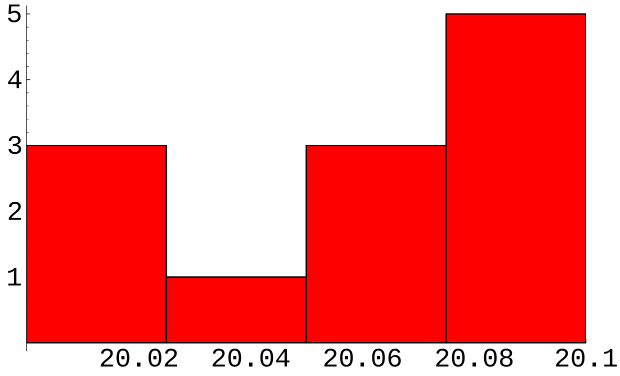
(c) Wie ist allgemein der Zusammenhang zwischen der Varianz einer Messgrösse X und ihrer transformierten Grösse Y?

(d) Berechne die Approximation der Varianz von Y bei der oben angegebenen Transformation numerisch.

(17) Gegeben ist die Datenmenge $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ zur Messung eines Parameters X:

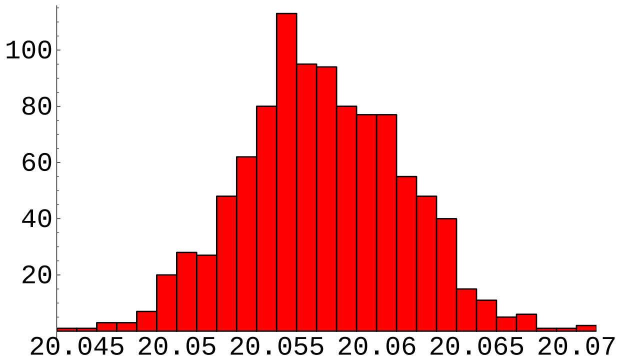
$$20.061, 20.090, 20.015, 20.031, 20.091, 20.051, 20.021, 20.081, 20.055, 20.019, 20.09, 20.080$$

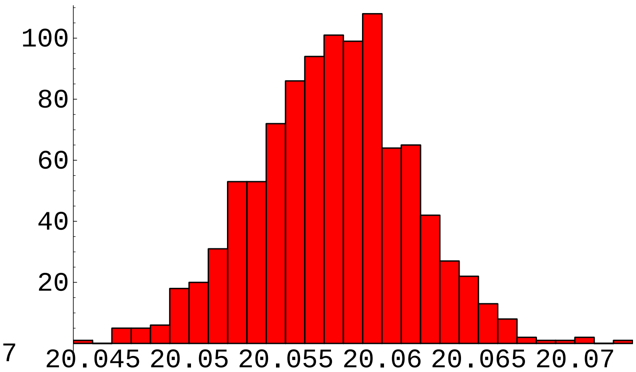
Das Histogramm dazu sieht wie folgt aus:



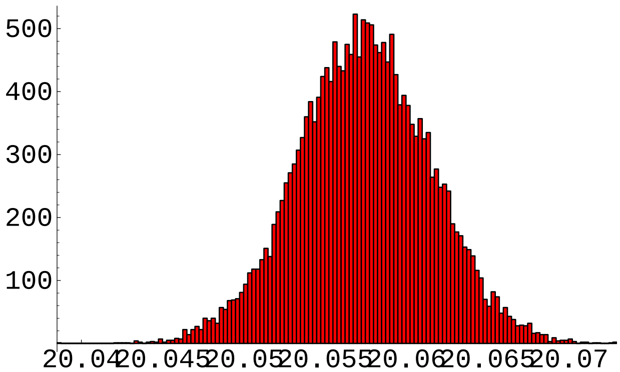
(a) Berechne den Mittelwert.

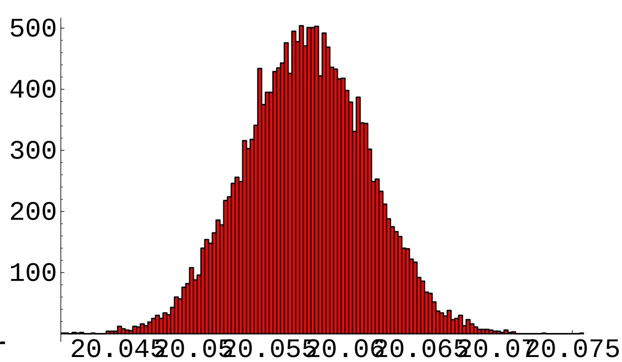
(b) Mit Hilfe eines Programms ziehen wir $n = 1000$ Bootstrap–Kopien und berechnen für jede Kopie den Mittelwert. Die gewonnenen Mittelwerte werden in eine Tabelle $TabMean$ geschrieben. Das Histogramm dazu sieht man in der Abbildung links. Erzeugen wir nochmals die Tabelle $TabMean$ mit $n = 1000$ Bootstrap–Kopien, so erhalten wir das Histogramm rechts:



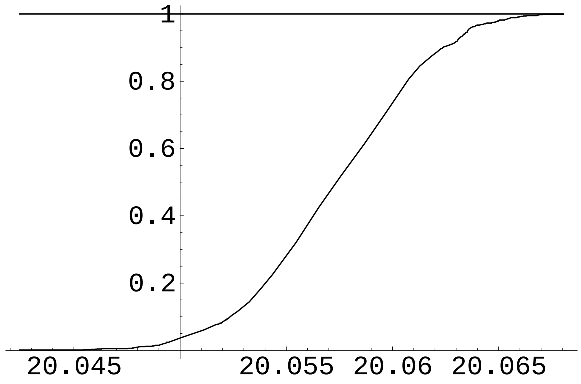


Nochmaliges Erzeugen der Tabelle $TabMean$ mit $n = 20'000$ Bootstrap–Kopien ergibt das Histogramm links. Und dann nochmals die Tabelle $TabMean$ mit $n = 20'000$ Bootstrap–Kopien erzeugen führt zum Histogramm rechts:





Um mit $n = 1000$ Kopien eine Verteilungsfunktion zu gewinnen, arbeitet der Computer zehn Minuten. Langes Warten also! Es ergibt sich das folgende Bild:



Kann man diesen nun gewonnenen Graphen als genügend genau bezeichnen, um daraus empirisch gewonnene Vertrauensintervalle für den Mittelwert ableiten zu dürfen? (Antwort begründen!)

(c) Wir nehmen hier aus pragmatischen Gründen an, dass die oben dargestellte empirisch gewonnene Verteilungsfunktion für den Mittelwert genügend genau ist. Leite daraus ein 60 %–Vertrauensintervall her, so gut es mit der Ablesegenauigkeit geht.

(d) Leite aus der eben verwendeten Graphik ein 95 %–Vertrauensintervall her, so gut es mit der Ablesegenauigkeit geht.

Viel Glück!

70.2 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_03_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_03_Loes.nb

70.3 Test ◇ M2–08/09–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Gegeben: Dreieck ABC. Gemessen werden $a = 78.42 \pm 0.01\, m$, $b = 85.84 \pm 0.01\, m$, $\gamma = 0.6285 \pm 0.0015\, (rad)$.

(a) Berechne $c \pm \Delta c$! (In m!)

(b) Berechne $\alpha \pm \Delta\alpha$! (In rad!)

(2) Gegeben sind die Punkte:

$M = \{(0.000, 0.497), (1.000, 0.580), (2.000, 0.839), (3.000, 0.933), (4.000, 1.044),$
$(5.000, 1.141), (6.000, 1.151), (7.000, 1.313), (8.000, 1.404), (9.000, 1.409), (10.000, 1.422)\}$.

(a) Suche die beste Gerade durch diese Punkte. (Koeffizienten angeben!)

(b) Suche den Korrelationskoeffizienten.

(c) Suche die beste Parabel durch diese Punkte. (Koeffizienten angeben!)

(d) Bild?

(3) (a) Wann spricht man von einer Monte–Carlo–Simulation und wann von Bootstrapping?

(b) Zufällig werden in einem Feld von $1 \times 1\, m^2$, in dem eine Karte einer Gemeinde im Flachland im Massstab von 1:1'000 gezeichnet ist, mit dem Computer 100'000 Punkte ausgewählt. 88'427 der Punkte fallen in die Gemeinde, der Rest ausserhalb auf die gezeigte Karte. Um welches Verfahren handelt es sich hier? Und wie gross ist etwa die Fläche der Gemeinde?

(4) Gegeben ist der Datensatz $\{x_k \mid k = 1, \ldots, n\} = \{5.6, 4.5, 5.3, 4.7, 4.5, 5.6, 4.7, 5.5, 4.8\}$.

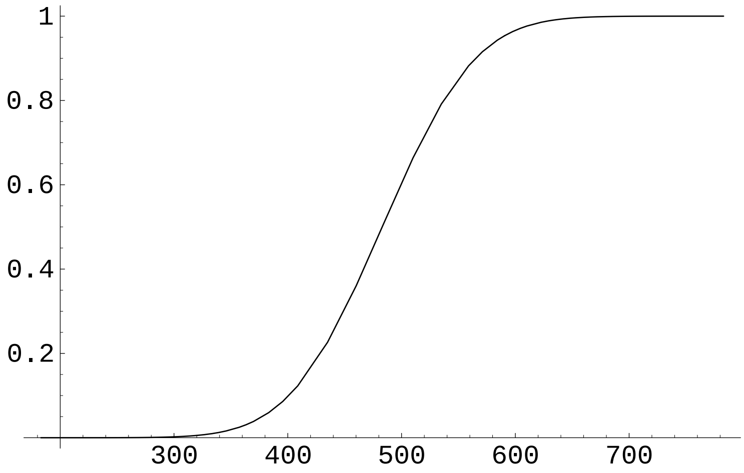
(a) Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung.

(b) Bei Daten der gegebenen Form ist man übereingekommen, dass die Standardabweichung als Standardfehler genommen werden soll. Beziffere mit der Grösse $\bar{x} \pm \Delta x$ einen Schätzer für $\mu_X \pm \sigma_X$.

(c) Gegeben ist die Funktion $Y = f(X) = \dfrac{\cos(X - X^2)}{1 - X^2} + \dfrac{1}{X}$. Berechne mit den Werten $\bar{x} \pm \Delta x$ einen Schätzer für $\mu_Y \pm \sigma_Y$ und beurteile das Resultat.

(5) Gegeben ist eine Stichprobe einer konzeptionellen Grundgesamtheit von Messwerten mit unbekannter Verteilung. Mittels der Stichprobe hat man den Erwartungswert $\mu \approx 12.54$ und die Standardabweichung $\sigma \approx 1.96$ geschätzt. Nun stellt sich die Frage, was sich über die Wahrscheinlichkeit eines in der Urliste gefundenen Ausreissers $x_{621} = 20.4$ aussagen kann. Untersuche diese Frage und versuche, den Ausreisser plausibel zu erklären.

(6) Ein Produktionsbetrieb stellt Elektrohalbfabrikate mit Automaten her. In einer speziellen Produktionslinie, welche normalerweise rund um die Uhr alle Tage Prozessoren produzieren, hat man den Tagesverbrauch an Edel– und Halbedelmetallen protokolliert. Dieses Material ist sehr teuer. Mittels Bootstrapping wurde aus den Daten ein Histogramm für den Mittelwert des Tagesverbrauch übers Jahr errechnet und damit eine Verteilungsfunktion gewonnen. Diese ist unten angegeben.



(a) Versuche, mit Hilfe des Diagramms ein 60 %– sowie ein 80 %–Vertrauensintervall für den Mittelwert einer hypothetischen Grundgesamtheit einer jahrelangen Produktion zu schätzen.

(b) Hat die geschätzte Verteilungsfunktion eine vernünftige Form? (Begründung!)

(7) Gegeben ist die folgende Datenmenge:

$S = \{189, 196, 156, 173, 155, 179, 195, 186, 181, 168, 193, 158, 172, 174, 157, 209, 165, 203, 143, 153, 203, 183, 153, 186, 154, 192, 214, 157, 217, 156, 158, 182, 179, 206, 178, 173, 151, 177, 169, 177\}$

(a) Berechne den emprischen Mittelwert $\bar{x}$ und die Streuung StD.

(b) Teile die Werte in 9 bis 12 Klassen der Breite 8 ein, beginnend mit 141, falls das vernünftig erscheint. Zeichne das Histogramm für die relativen Häufigkeiten.

(c) Zeichne in das Histogramm die Funktion der Normalverteilung mit $\bar{x}$ und StD ein. Beurteile anhand der Graphik, ob es plausibel erscheint, die Werte als normalverteilt anzunehmen.

Viel Glück!

70.4 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Mit Hilfe des nachstehenden URL's lässt sich so das PDF-File mit den Lösungen direkt aus dem PDF-File aufrufen:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Math_0809_02_Loes.pdf

Quellencode für Fachkundige:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Math_0809_02_Loes.nb

70.5 Test Statistik ◇ M2–09/10–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Eine Parallelschaltung besteht aus drei parallel geschalteten Serien. In der ersten Serie befinden sich die Widerstände R_1 und 2 mal R_2. In der zweiten Serie befinden sich R_1, R_2 und R_3. Die zweite Serie dann ist doppelt vorhanden. Eingebaut worden sind $R_1 = 1\,\Omega \pm 0.05\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega \pm 0.08\Omega$ und $R_3 = 6\,\Omega \pm 0.12\Omega$.

(a) Berechne $R_{total} \pm \Delta\, R_{total}$

(b) Was ist erstaunlich am Resultat, wenn man die Lage der Gesamttoleranz bezüglich der Einzeltoleranzen betrachtet?

(2) Gegeben sind die Messdatenpaare:

$M = \{\{1., 5.05\}, \{2., 6.36\}, \{3., 5.1\}, \{4., 6.56\}, \{5., 5.03\}, \{6., 6.27\}, \{7., 5.11\}, \{8., 6.39\}, \{9., 4.89\}, \{10., 6.36\}, \{11., 5.01\}, \{12., 6.3\}, \{13., 4.82\}, \{14., 6.24\}, \{15., 4.7\}, \{16., 6.2\}, \{17., 4.84\}, \{18., 6.05\}, \{19., 4.61\}, \{20., 5.97\}, \{21., 4.76\}, \{22., 6.08\}\}$

An aufeinander folgenden Tagen ist an einer Maschine der Druck des Pneumatiksystems an einem Kontrollinstrument abgelesen worden. Die erste Zahl in einem Paar in M bedeutet den Messzeitpunkt („fortlaufende Nummer des jeweiligen Tages“), die zweite Zahl bedeutet den Druck. Der Druck ist alternierend jeweils einmal am Ende der Nachtschicht und einmal zu Beginn der Nachmitagsschicht vom Schichtführer abgelesen worden.

(a) Suche die beste Gerade durch diese Punkte. (Koeffizienten angeben!)

(b) Beim genaueren Betrachten der Zahlen fällt eine gewisse periodische Schwankung der Werte auf. Ist da wohl etwas faul? — Erfasse die Druckwerte in einem Histogramm (Beginnend mit dem ersten Balken, linke untere Ecke bei 5.0, Balkenbreite 0.2,)

(c) Entscheide, ob man die Messpaare anhand der Druckwerte in zwei Gruppen einteilen und dann die beiden Gruppen einzeln behandeln soll. Suche, falls dies sinnvoll ist, pro Gruppe die beste Gerade. (Form $y = a\,x + b$).

(d) Erstelle ein Diagramm mit den Messpunkten und allen errechneten Geraden. Ist eine Tendenz erkennbar, welche Fragen aufwirft?

(e) Suche den Korrelationskoeffizienten pro Gerade. Was fällt auf?

(f) Ein Kontrollgang zum Messgerät zeigt, dass dort eine Strichskala vorhanden ist. Angeschrieben ist nur der Normaldruck an Skalenanfang und der Enddruck am Skalenende. Wie könnte man also das Problem erklären und allenfalls die Daten retten?

(3) (a) Was bedeutet „Randomisieren“ und wie könnte man dabei vorgehen?

(b) Was ist ein winsorisiertes Mittel?

(c) Was ist das Signifikanzniveau?

(d) Erkläre die Ausdrücke *objektiv, reliabel, valide, signifikant.*

(4) Gegeben ist eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit von 200 Elementen:
$S_{G,\,200} = \{x_k \mid k = 1, \ldots, n\} :=$

$$\{7.58, 7.01, 6.18, 7.13, 6.4, 7.07, 7.55, 7.31, 7.54, 6.82, 6.16, 7.68, 6.39, 6.61, 7.55\}.$$

(a) Berechne den Median, den Mittelwert und die Standardabweichung.

(b) Gesucht ist ein Punktschätzer für den Mittelwert der Grundgesamtheit. Zur Auswahl steht der Median und der Mittelwert. Zur Kontrolle berechnet man noch die Lage der Spanne: $\{Min(M),\, Max(M)\}$. Gibt es hier ein sofort einsehbares stichhaltiges Argument, welches für den Median als Schätzer spricht?

(c) Man hat sich nun entschieden, die Standardabweichung als Standardfehler zu verwenden. Berechne mit $\bar{x} \pm \Delta x$ einen Schätzer für $\mu_X \pm \sigma_X$.

(d) Gegeben ist die Funktion $Y = f(X) = \dfrac{2 + \sin(X^2)}{2 + X^2}$. Berechne mit den Werten $\bar{x} \pm \Delta x$ einen Schätzer für $\mu_Y \pm \sigma_Y$ und beurteile das Resultat.

(5) Von einer konzeptionellen Grundgesamtheit kennt man die folgende Stichprobe:

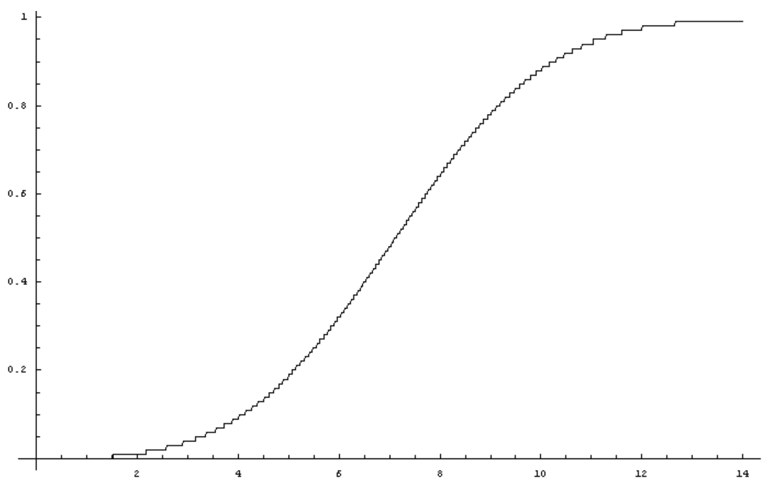
$$S = \{6.45, 6.34, 6.14, 7.43, 6.4, 6.44, 7.47, 6.65, 7., 5.61, 17.57, 7.46, 6.17, 6.86, 6.32, 6.56, 6.47, 6.39, 6.16, 6.32, 6.2, 7.57\}$$

Wie man schnell feststellt, befindet sich in S der Wert 17.57, der nicht so recht hineinpasst. Untersuche, ob man mit Hilfe der Stichprobe eine Aussage konstruieren kann, welche etwas über die Chance aussagt, mit welcher ein solcher Wert existieren kann. Schliesslich ist es nicht so schwierig, den Mittelwert und die Standardabweichung der Grundgesamtheit zu schätzen. Dabei soll man die notwendigen Parameter der Stichprobe auf zwei verschiedene Arten bestimmen:

(a) Mit dem „Ausreisser“.

(b) Ohne den „Ausreisser“.

(6) Wir versuchen, mit ähnlichen Daten wie in der letzten Aufgabe zur Schätzung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion zu kommen. Dazu verwenden wir die Bootstrap–Methode. Damit konnten wir den nachstehenden Graphen erzeugen. Wir haben dazu auch noch den Mittelwert 7.09 und die Standardabweichung 2.40 aus der zur Verfügung stehenden Stichprobe errechnet.



(a) Ermittle, wie gross die Wahrscheinlichkeit, dass die Daten in einem Inervall zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ liegen, bei diesem Modell ist.

(b) Ermittle ebenso, wie gross die Wahrscheinlichkeit bei diesem Modell ist, dass die Daten in einem Inervall zwischen $\mu - 2\,\sigma$ und $\mu + 2\,\sigma$ liegen.

(7) Gegeben ist die folgende Datenmenge:

$$S = \{6.45, 6.34, 6.14, 7.43, 6.4, 6.44, 7.47, 6.65, 7., 5.61, 7.57, 7.46, 6.17, 6.86, 6.32, 6.56, 6.47, 6.39, 6.16, 6.32, 6.2, 7.57\}$$

(a) Berechne den emprischen Mittelwert $\bar{x}$ und die Streuung StD.

(b) Teile die Werte in Klassen mit den Grenzen

$$5.75,\ 6,\ 6.25,\ 6.5,\ 6.75,\ 7,\ 7.25,\ 7.5,\ 7.75,\ 8,\ 8.25$$

ein, falls das vernünftig erscheint. Zeichne das Histogramm für die relativen Häufigkeiten.

(c) Zeichne in das Histogramm die Funktion der Normalverteilung mit $\bar{x}$ und StD ein. Beurteile anhand der Graphik, ob es plausibel erscheint, die Werte als normalverteilt anzunehmen.

Viel Glück!

70.6 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

70.7 Test Statistik ◇ M2–10/11–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1)

$$z = f(x,\, y) = k_1\,(x-y)\,e^{k_2\,(x-y)\,(x+y)},$$

$$P_1 = P_1(1.00,\, 1.00),\;\; P_2 = P_2(2.00,\, 1.00),\;\; P_3 = P_3(1.00,\, 2.00),\;\; \Delta x = \Delta y = 0.20.$$

Die Konstanten k_1 und k_2 sind Normierungskonstanten, welche dazu dienen, die verwendeten Masseinheiten anzupassen. Da x und y schon in der richtigen Masseinheit vorliegen, können wir hier für unsere Betrachtung $k_1 = k_2 = 1$ setzen und die Masseinheiten weglassen.

(a) Berechne nach dem lin. Fehlerfortpflanzungsgesetz Δz für die Stellen $P_1,\;\; P_2,\;\; P_3$.

(b) Berechne die absoluten realen Fehler aus $Max(f(x \pm \Delta x,\, y \pm \Delta y))$ für die Stellen $P_1,\;\; P_2,\;\; P_3$.
Hinweis: Wegen $\pm\Delta x$, $\pm\Delta y$ ist hier erst aus 4 Werten das Maximum zu berechnen.

(c) Wie ist die zum Teil grosse Abweichung der Resultate der eben gerechneten Teilaufgaben zu erklären?

(2) Es soll eine Sendung mit 4′000 Schrauben vorbereitet werden. Ca. 0.2 % davon sind nach der laufenden Qualitätskontrolle unbrauchbar (Ausschuss). Die Sendung wird vom Kunden geprüft werden, indem er n mal eine Schraube zieht und wieder zurücklegt, wonach die Kiste jeweils nach dem Zurücklegen zu schütteln ist. Der Kunde schlägt infolge seiner Möglichkeiten vor, $n = 10$ vertraglich festzusetzen. Der Lieferant will sich davon nun ein Bild machen.

(a) Wie gross ist die Chance, dass der Kunde 0 unbrauchbare Schrauben findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(b) Wie gross ist die Chance, dass der Kunde genau 1 unbrauchbare Schraube findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(c) Wie gross ist die Chance, dass der Kunde genau 2 unbrauchbare Schrauben findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(d) Wie gross ist die Chance, dass der Kunde genau 3 unbrauchbare Schrauben findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(e) Wie gross ist die Chance $P_{max,6}$, dass der Kunde maximal 6 unbrauchbare Schrauben findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(f) Wie gross ist die Chance $P_{min,7}$, dass der Kunde minimal 7 unbrauchbare Schrauben findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(3) Es soll nochmals eine Sendung mit $4'000$ Schrauben vorbereitet werden. Ca. $0.2\,\%$ davon sind nach der laufenden Qualitätskontrolle wieder unbrauchbar. Diesmal wird die Sendung vom Kunden geprüft, indem er n mal eine Schraube zieht und nicht wieder zurücklegt. Der Kunde schlägt wieder infolge seiner Möglichkeiten vor, $n = 10$ vertraglich festzusetzen. Der Lieferant will sich davon ebenfalls ein Bild machen.

(a) Wie gross ist die Chance, dass der Kunde 0 unbrauchbare Schrauben findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(b) Wie gross ist die Chance, dass der Kunde genau 1 unbrauchbare Schraube findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(c) Wie gross ist die Chance, dass der Kunde genau 2 unbrauchbare Schrauben findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(d) Wie gross ist die Chance, dass der Kunde genau 3 unbrauchbare Schrauben findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(e) Wie gross ist die Chance $Q_{max,6}$, dass der Kunde maximal 6 unbrauchbare Schrauben findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(f) Wie gross ist die Chance $Q_{min,7}$, dass der Kunde minimal 7 unbrauchbare Schrauben findet, wenn 10 Schrauben nach dem abgemachten Verfahren gezogen und geprüft werden?

(g) Um wieviele Prozent von $P_{max,6}$ aus der vorausgegangenen Aufgabe weicht $Q_{max,6}$ von $P_{max,6}$ ab?

(h) Um wieviele Prozent von $P_{min,7}$ aus der vorausgegangenen Aufgabe weicht $Q_{min,7}$ von $P_{min,7}$ ab? — Was ist dazu zu bemerken?

(i) Welches Verfahren (mit oder ohne zurücklegen) wird der Lieferant dem Kunden vorschlagen? Und hat er dafür eine dem Kunden glaubhafte Begründung?

(4) Gegeben sind die Temperaturmessdaten in einem Materialprüflabor jeweils um 09:00 Uhr am Morgen von aufeinander folgenden Tagen:

$M = \{20.10, 20.50, 21.08, 21.72, 21.14, 20.60, 20.31, 21.54, 21.47, 20.70, 19.57, 20.33,$
$20.15, 19.31, 20.53, 20.59, 21.80, 20.29, 21.13, 19.90, 20.81, 20.60, 20.16, 19.47, 20.00\}.$

Für die Einzelmessungen gilt wegen dem Ableseverfahren die Messtoleranz $\Delta y = \pm 0.02$.

Die Temperatur im Labor sollte aus praktischen Gründen möglichst konstant bleiben. Eine Auflage der Behörde ist es, über die herrschenden Verhältnisse Buch zu führen. Folgende Grössen sind der Behörde abzuliefern und daher jetzt zu berechnen:

(a) Den Mittelwert und den Standardfehler (Standardabweichung) des gegebenen Datensatzes über die Messperiode.

(b) Den standardisierten linearen (absoluten) Fehler des Mittelwerts $\bar{y}$.

(c) Den standardisierten linearen (absoluten) Fehler der y–Standardabweichung.

(d) Die Parameter der y–Werte der Ausgleichsgerade, wenn die x–Werte durch die mit 1 beginnenden fortlaufenden Nummern der Messwerte gegeben werden.

(e) Wie lässt sich die Steigung der Ausgleichsgeraden beurteilen?

(5) Gegeben sind die folgenden 25 Messpunkte mit $x = 1$ bis $x = 25$:

$$U = \{\{1, 97.6\}, \{2, 76.6\}, \{3, 46.5\}, \{4, 40.1\}, \{5, 30.1\}, \{6, 20.0\}, \{7, 17.3\}, \{8, 8.6\}, \{9, 4.1\}, \{10, 1.5\}, \{11, 0.1\}, \{12, 0.1\}, \{13, 1.9\}, \{14, 4.5\}, \{15, 8.\}, \{16, 15.5\}, \{17, 26.5\}, \{18, 32.7\}, \{19, 46.8\}, \{20, 50.6\}, \{21, 78.8\}, \{22, 90.7\}, \{23, 100.2\}, \{24, 105.9\}, \{25, 159.9\}\}.$$

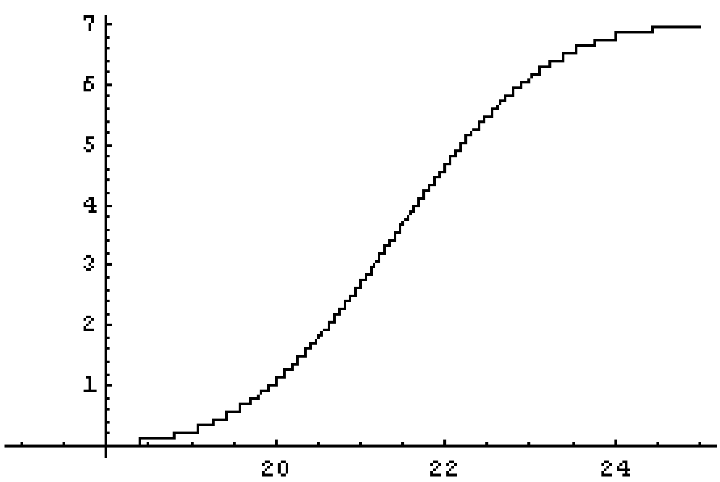
(a) Berechne dazu die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden.

(b) Berechne die x–Varianz, die y–Varianz und die Covarianz.

(c) Berechne den Korrelationskoeffizienten. Was fällt auf?

(d) Versuche, an der Stelle einer Geraden eine Ausgleichsparabel ($Grad = 2$) zu finden.

(6) Mittels der Bootstrap–Methode hat man nach langer Computerlaufzeit die nachfolgende Summen-Funktion (Verteilungsfunktion) für die Wahrscheinlichkeit der Lage des Mittelwerts einer Stichprobe gefunden:



Dieses Diagramm ist jedoch noch nicht normiert worden. Es kann dadurch normiert werden, indem man die Skala auf der y-Achse entsprechend anpasst.

(a) Schildere mit Hilfe einer Skizze in Worten, wie man bei der Normierung vorzugehen hat.

(b) Normiere die Skala und lese dann den wahrscheinlichsten Mittelwert ab.

(c) Lese die Grenzen eines 95 %–Vertrauensintervalls ab. Damit ist hier ein Intervall gemeint, unterhalb dem und oberhalb dem der Mittelwert nur je mit 2.5 % Wahrscheinlichkeit liegt.

(7) In der Beilage findet sich ein Artikel mit wissenschaftlichem Inhalt. Damit wird ein Verfahren beschreiben, das oft in der statistischen Praxis Anwendung findet. Finde anhand des Textes heraus, wie die folgenden beiden Fragen zu beantworten sind (kurze Beschreibung in Stichworten). — Falls von mehreren Stufen des Verfahrens resp. von diversen Stichproben resp. Faktorenstufen usw. die Rede ist, so soll nur die einfachere Version beschreiben werden. (Siehe dazu auch `http://de.wikipedia.org/wiki/T-Test`.)

(a) Was genau kann man mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens über die vorliegenden Daten herausfinden?

(b) Welche Voraussetzungen für den Datensatz oder die Datensätze müssen erfüllt sein, damit das Verfahren angewandt werden darf?

Viel Glück!

70.8 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

70.9 Weitere Tests

Siehe nächstes Kapitel.

Kapitel 71

Tests und Modulprüfungen Studienjahr 2011/12

71.1 Test ◇ M2–11/12–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Abgabe der vorgängig behandelten Probleme:

(a) Output mit Namen, Datum und Klasse beschriftet.

(b) Elektronisch per Mail mit Namen und Klasse im Filename erkennbar. (Achtung: Wenn möglich nur Source Code übermitteln, sofern ein Programm benutzt worden ist, auf das im Schulnetzwerk ein uneingeschränkter Zugriff existiert.)

(2) Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = f(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0'$.

(a) Berechne die Laplace–Transformierte Gleichung sowie die Transformierte $Y(s)$ von $y(t):\ Y(s) = \ldots ? \ldots$.
(Die Transformierte von $y(t)$ heisst $Y(s)$, diejenige von $f(t)$ heisst $F(s)$. Benutze dabei die Abkürzung $k := \sqrt{a^2 - 4\,b}$ und vereinfacht das Resultat, so dass dieses kurz ist und schnell lesbar wird.)

(b) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 1,\ b = 1,\ f(t) \equiv 0,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0.$

(c) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 1,\ b = 1,\ f(t) \equiv 0,\ y_0 = 0,\ y_0' = 1.$

(d) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = -1,\ b = 1,\ f(t) \equiv \sin(t),\ y_0 = 0,\ y_0' = 1.$

(e) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = -2,\ b = 1,\ f(t) \equiv \sin(t),\ y_0 = 0,\ y_0' = 1.$

(f) Ermittle die Rücktransformierte der Lösung für:
$a = 0,\ b = -1,\ f(t) = \delta(t),\ y_0 = 0,\ y_0' = 0.$

(3) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'''(t) - 3\,y''(t) + 3\,y'(t) - y(t) = f(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\ y''(0) = y_0''$.

(a) Berechne mit Hilfe der Laplace–Transformationen die Lösung für:
$f(t) = \delta(t),\ y_0 = y_0' = y_0'' = 0.$

(b) Ermittle ebenso Lösung für:
$f(t) = e^{-t},\ y_0 = y_0' = y_0'' = 0.$

(c) Ermittle ebenso Lösung für:
$f(t) = e^{-t},\ y_0 = 1,\ y_0' = y_0'' = 0.$

(4) Gegeben ist eine Kugel mit Mittelpunkt $M = O$ in einem kartesischen Koordinatensystem mit einem Radius $r = 5$. Durch diese Kugel wird ein Loch gebohrt mit einem Bohrer vom Durchmesser $d = 2$. Der senkrechte Abstand der Bohrerachse zu M beträgt 1.5. Berechne das Restvolumen der Kugel nach der Ausbohrung. (3 Stellen hinter dem Dezimalpunkt.)

(5) Eine Firma, welche seit 10 Jahren Gusspfannen für eine Warenhauskette herstellt, lässt beim Marktforschungsunternehmen Alpha eine Studie über die Verkaufsentwicklung und den Langzeiteinsatz der Geräte bei zufällig ermittelten Käufern an zwei Warenhausstandorten erarbeiten. Alpha liefert nach einiger Zeit zwei Datensätze mit der Angabe, dass jeder Satz zu einem Warenhausstandort gehöre. Der Chef der auftragserteilenden Firma zeigt sich darauf gegenüber einem Angestellten sichtlich erbost über Alpha. Der Angestellte wird beauftragt, die Datensätze zu studieren und danach dem Direktionskollegium zu präsentieren. Er hat seine Arbeit in folgende Teilaufgaben gegliedert, welche hier nachvollzogen werden sollen:

$$M_1 = \{8,6,0,7,1,1,2,4,3,5,2,8,4,3,0,8,2,6,8,9,9,8,0,2,6,8,2,6,0,4,6,1,8,7,0,3,2,9,\\ 5,4,4,9,4,7,9,0,2,8,5,0\}$$

$$M_2 = \{1,5,7,3,9,9,3,9,6,1,7,9,1,4,8,8,2,0,5,9,7,2,3,8,3,3,4,6,2,6,4,8,3,2,3,9,7,9,\\ 8,5,3,5,6,2,9,5,1,4,1,3\}$$

(a) Erstelle für M_1 und M_2 je eine Strichliste.

(b) Erstelle für M_1 und M_2 je ein Histogramm mit 10 Klassen.

(c) Berechne für M_1 und M_2 je den Stichprobenumfang, den Mittelwert und die Standardabweichung.

(d) Vergleiche die Datenmenge M_1 mit der Datenmenge M_2 mittels BoxWhiskers–Plots (Gegenüberstellung der Plots).

(e) Beschreibe, was die Datensätze überaus verdächtig machen könnte. Lege dar, wieso die Daten allenfalls zurückgewiesen werden.

(6) (a) Auf wieviele mögliche Arten kann man 10 Gerichte auf die 10 Ferientage verteilen?

(b) Auf wieviele mögliche Arten kann man 49 Arbeitsgänge auf die 7 Mitarbeiter möglichst so verteilen, dass nie einer einen Arbeitsgang mehr als die anderen erledigen muss?

WIR1

Viel Glück!

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Donnerstag 02. 02. 2012

71.2 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp10 / Mp2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

(1) **(12 Punkte)**

Volumenberechnung:

Ein Quader wird achsenparallel in ein Koordinatensystem gestellt, wobei sich eine Ecke im Ursprung befindet. Die andern begrenzenden x–, y– und z–Koordinaten sind $x_1 = 30$, $y_1 = 10$, $z_1 = 20$. Nun wird längs der Geraden $y = 2\,x - 20$ in der $x - y$–Grundebene eine Nut in den Körper gefräst, welche in der $x - z$–Grundebene die Begrenzungskurve $z = (x - 10)^2$ aufweist.

(a) Erstelle zur Orientierung vom Körper im Koordinatensystem mit der Nut eine 3–D–Skizze und beschrifte die Koordinaten sowie die definierende Kurve.

(b) Berechne die Länge der Begrenzungskurve in der $x - z$–Grundebene.

(c) Berechne das ausgefräste Volumen sowie das Volumen des Restkörpers.

(d) Berechne den Radius einer zur Nut volumengleichen Bohrung im Körper, welche parallel zur Nut verläuft.

(2) **(21 Punkte)**

Laplace–Transformationen und Rücktransformationen:

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \sin(3\,t) + \sinh(2\,t) - t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(b) $f(t) = 2 - t + \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(c) $f(t) = (2 - e^{-t})\,(\sin(t)) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(d) $f(t) = e^{1+2\,t}\,e^{1-t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(e) $Y(s) = \dfrac{s}{4\,s^2 - 2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(f) $Y(s) = \dfrac{1}{s^4 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(g) $Y(s) = 2 + \dfrac{1}{2\,s} + \dfrac{1}{(s-1)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(3) **(9 Punkte)**

Differentialgleichung:

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(t) + y'(t) = c + \cos(t) - t, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

(a) Berechne die Lösung $y(t, c)$ für $c = 0$, also $y(t, 0)$. (3 Punkte)

(b) Berechne bei der gefundenen Lösung c so dass $y(10, c) = 1$ gilt. (3 Punkte)

(c) Sei $y(10, c)$ der Wert der Lösung an der Stelle $t = 10$ bei variablem c. Skizziere diese Funktion in einem charakteristischen Bereich. (3 Punkte)

(4) **(6 Punkte)**

Differentialgleichung:

Löse die folgende Differentialgleichung mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$y'''(t) - 2\,y'(t) - \;y(t) = \;sinh(t), \;\; y(0) = -1, \;\; y'(0) = y''(0) = 0.$$

(5) **(6 Punkte)**

Differentialgleichungssystem:

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) - z(t) &= \sin(t) \\ y(t) + z'(t) + z(t) &= e^{-t} \\ y(0) = 1, \;\; z(0) &= 1 \end{aligned}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \in [-0.5, 3]$.

(6) **(6 Punkte)**

Differentialgleichung:

$$y'(t) = -y(t) \cdot t - t, \;\; y(0) = 1.$$

(a) Berechne $y(t) = y_{exakt}(t)$, falls möglich. (3 Punkte)

(b) Berechne $y(1.0) := y_{Euler}(1.0)$ numerisch nach Euler. Schrittweite $\Delta x = 0.25$. Berechne damit die Abweichung $|y_{Euler}(1.0) - y_{exakt}(1.0)|$ (3 Punkte)

(7) **(6 Punkte)**

Differentialgleichung allgemein:

$$y''(t) - 2\,y'(t) + \frac{1}{2}\,y(t) = t - b, \;\; y(0) = 0, \;\; y'\,(0) = 0.$$

(a) Sei $y(t,\, b)$ die allgemeine Lösung. Skizziere die Lösung $y(t,\, 0)$ für $b = 0, \;\; t \in [0, 3]$.

(b) Berechne $y(t,\, b) = y(1.00,\, 1.00)$.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Donnerstag 02. 02. 2012

Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp10 / Mp 2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

(1) **(6 Punkte)**

Schadenprognose

Bei der Fabrikation von Präzisionsachsen sind erfahrungsgemäss 0.5 % Ausschuss. Die Chance, dass man eine geprüfte Achse als Ausschuss erkennt, ist wegen der Probleme mit den vorhandenen Prüfgeräte nur 95 %. Nun hat man den Auftrag für eine Lieferung von Geräten erhalten, zu denen $a = 1000$ Achsen eingebaut werden sollen.

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass trotz des Prüfverfahrens eine qualitativ ungenügende Achse eingegaut wird. (6 Punkte)

(b) Wie gross müsste oder dürfte a sein, damit man mit einer eingebauten qualitativ ungenügenden Achse rechnen müsste? (Begründung!) (3 Punkte)

(2) **(6 Punkte)**

Druckfestigkeit von Stahlguss, Vertrauensintervall, Textverständnis

Zwecks Ermittlung der Druckfestigkeit einer Sorte B von Gusseisen mit Lamellengraphit wurden $n = 45$ Messungen durchgeführt. Damit hat man ein arithmetisches Mittel von $\bar{x} \pm s = 722 \pm 61\, N/mm^2$ bestimmt. $\bar{x}$ wird im gegebenen Fall als ein geeigneter Punktschätzer für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit erachtet. Als Streuung darf man die Standardabweichung der Messreihe $s = 61\, N/mm^2$ verwenden, denn dies gehört zum Erfahrungswissen der Firma, welche die Versuche durchgeführt hat. Weiter darf vor den Hintergrund von langen normalisierten Messreihen angenommen werden, dass es sich bei der Druckfestigkeit im Bereich der vorhandenen Werte mit grosser Wahrscheinlichkeit (gestützt durch relative Häufigkeiten) um eine normalverteilte Zufallsgrösse $\bar{X}$ (mit der Normalverteilung $N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}))$ handelt. D.h. μ wird durch $\bar{X}$ und σ durch s geschätzt. $\frac{\sigma^2}{n}$ ist die Streuung vieler Werte $\bar{X}$ (also nicht diejenige für X selbst im vorliegenden Fall. Berechne daraus für den Wert c für 95 % Vertrauensintervall $[\mu - c,\, \mu + c]$ für μ.

(3) **(12 Punkte)**

Ziffernfolgen in der Dezimalbruchentwicklung von π

Gegeben sind die Werte

$M_1 = \{3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, 8, 4, 6, 2, 6, 4, 3, 3, 8, 3, 2, 7, 9, 5, 0, 2, 8, 8, 4, 1, 9, 7, 1, 6, 9, 3, 9, 9, 3, 7, 5\}$ und
$M_2 = \{1, 0, 5, 8, 2, 0, 9, 7, 4, 9, 4, 4, 5, 9, 2, 3, 0, 7, 8, 1, 6, 4, 0, 6, 2, 8, 6, 2, 0, 8, 9, 9, 8, 6, 2, 8, 0, 3, 4, 8, 2, 5, 3, 4, 2, 1, 1, 7, 0\}$.

(a) Ermittle in beiden Fällen den Mittelwert und die Streuung.

(b) Wir gehen von der Annahme aus, dass die Ziffern Werte einer Zufallsvariablen X sind und dass jede Ziffer gleich wahrscheinlich ist. Ermittle unter dieser Annahme den Erwartungswert von X, also $E(X)$ sowie den Erwartungswert von $E((X - E(X))^2)$.

(c) Vergleiche die berechneten theoretischen Werte mit den tatsächlichen Werte und kommentiere das Resultat.

(d) Denke die Werte von M_1 und von M_2 ja als y–Werte in einem $x - y$–Diagramm. Der Abstand auf der x–Achse wird jeweils 1 gewählt, in beiden Fällen beginnend mit $x_1 = 1$. Berechne daraus die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden $g_1(x) = a_1\, x + b_1$ und $g_2(x) = a_2\, x + b_2$.

(e) Kommentiere das Resultat.

(4) **(18 Punkte)**

Kombinatorisches und Wahrscheinlichkeit

(a) In einer Werkstatt befinden sich 10 Werkbänke und 10 Mechaniker. Wie kann man die Paare „(Mechaniker, Werkbank)“ in einem Diagramm darstellen und wieviele Paarbildungen sind möglich?

(b) Auf wieviele Arten kann man die Mechaniker in der vorangehenden Teilaufgabe auf die Werkbänke verteilen?

(c) Jeder Mechaniker in der vorangehenden Teilaufgabe bekommt seinen Lohn in einer Lohntüte zusammen mit einer Abrechnung. Die Sekretärin übergibt dem Postboten die Tüten mit dem Auftrag, diese vor Arbeitsbeginn den Mechanikern auf jeweils ihren Werkbank zu legen. Sie hat aber vergessen, die Adressen aufzukleben. Nichts Böses ahnend führt der Postbote seine Arbeit aus. Was ist die Chance dass jeder Mechaniker seinen richtigen Lohn ausgehändigt bekommen hat?

(d) Von den 10 Mechanikern bekommen 3 eine Gehaltserhöhung. Auf wieviele Arten kann das geschehen?

(e) Von den 10 Mechanikern bekommen 3 eine Gehaltserhöhung nach der folgenden Abstufung: einer bekommt 50 % mehr, ein zweiter 30 % und ein dritter nur 10 %. Auf wieviele Arten kann das geschehen?

(f) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mechaniker Hanspeter Hansenhans–Peter, einer von den 10, eine Gehaltserhöhung bekommt?

(5) **(6 Punkte)**

Vergleich von Datensätzen

Gegeben sind zwei Datensätze D_1 und D_2, welche mathematisch nach dem folgenden Gesetz berechenbar sind:

$$D_1 = \{x_k \mid k = 0, \ldots, 10, \;\; x_k = \left(\frac{k}{10}\right)^2\}$$

$$D_2 = \{y_k \mid k = 0, \ldots, 10, \;\; y_k = \left(\frac{k}{10}\right)^3\}$$

(a) Erstelle für die beiden Datensätze je den Box-Whiskers-Plot

(b) Kommentiere die Resultate wie folgt: Beurteile, wie sich die Verschiedenheit der Datensätze graphisch ausdrückt und ob man anhand der Graphik erschliessen kann ob es sich um zwei verschiedene Datensätze handelt.

(6) **(6 Punkte)**

Vorzeichentest

Nach der Einstellung von 35 neuen Mitarbeitern wird die Qualität ihrer Arbeit mittels an die Kunden verschickter Frabebogen ermittelt. Die Arbeit der neuen Mitarbeiter bestand darin, mit je zweien dieser Kunden Verhandlungen zu führen, und dies je in farblich anders ausgestatteten Räumen. Dazu wurden bei jedem Mitarbeiter nacheinander zwei farblich verschiedene Verhandlungsumgebungen eingerichtet.
Für die Umgebung U_1 war kennzeichnend, dass die Verhandlungen je in Räumen stattfanden, in denen Wände, Böden und Möbel, also alles nur rote Farbe aufwies. Für die zweite Umgebung U_2 war es kennzeichnend dass gar kein rot, dafür aber nur graue und beige Farbtöne vorhanden waren. Als Resultat stellte sich heraus, dass die Kunden bei 24 der neuen Mitarbeiter in den roten Räumen weniger zufrieden waren als in den grauen und beigen Rämen. Bei den Kunden von 3 Mitarbeitern war das Resultat bei beiden Farben gleich. Bei den restlichen Mitarbeitern war das Reslultat bei rot besser.
Teste nun die Hypothese H_0: „Die Raumfarbe spielt für den Erfolg keine Rolle“ gegen die Alternativhypothese H_1: „Die Raumfarbe spielt für den Erfolg eine wesentliche Rolle“. Berechne dazu die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Annahme von H_0 im betrachteten Fall dennoch eine einseitige Abweichung der Resultate aus den beiden verschiedenfarbigen Umgebungen auftreten kann. Gelingt es hier, die Hypothese H_0 aufrecht zu erhalten, wenn man der Alternative höchstens eine Wahrscheinlichkeit von 5 % zubilligt?

— ENDE —

71.3 Test ◇ M2–11/12–02–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

(1) Gegeben ist eine Funktion f:

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t^2 - t & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (\frac{\pi}{2})^2 - \frac{\pi}{2} = const. & t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\,\pi}{2}) \\ f(t + n\,2\,\pi) & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(a) Skizziere den Graphen der Funktion.

(b) Berechne die reellen Koeffizienten a_0 sowie $a_1, \ldots a_4$ und $b_1, \ldots b_4$ der Fourierreihe f_4 von f numerisch und präsentiere die Resultate in einer **Tabelle**.

(c) Berechne damit numerisch die absoluten Differenzen zwischen Näherungen und Funktionswerten $|\tilde{f}_4(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2})|$ sowie $|\tilde{f}_4(\frac{3\,\pi}{2}) - f(\frac{3\,\pi}{2})|$.

(d) Skizziere den Graphen der berechnete Näherung möglichst exakt. Was ist zur erreichten Genauigkeit auf einen Blick zu sagen?

(e) Könnte man aus der Beziehung $f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2 - \frac{\pi}{2}$ und der Fourierreihe einen Näherungswert von π berechnen? (Erwartet wird eine mathematische Erklärung).

(2) (a) Suche die Fourierreihe für die Funktion

$$f_1(t) \;=\; \begin{cases} |t| + t & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{sonst periodisch} & T = \pi \end{cases}$$

(b) Bestimme mit Hilfe der jetzt bekannten Fourierreihe die Fourierreihe der zweiten Funkton

$$f_2(t) \;=\; \begin{cases} 3 - |t| + t & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{sonst periodisch} & T = \pi \end{cases}$$

(3) Gegeben sind die Messwerte $\{(0,\,2),\,(1,\,2),\,(2,\,3),\,(3,\,3),\,(4,\,2),\,(5,\,2),\,(6,\,3),\,(7,\,3),\,\ldots\}$. Wie man sieht, zeigt sich nach den ersten 4 Messwerten eine Periodizität: $y_k = y_{k+4}$.

(a) Bestimme mittels DFT eine Fourierreihe für diese Messserie und stelle die erhaltene Funktion sowie die Messwerte in einer Skizze dar.

(b) Ist es hier möglich, eine FFT zu machen?

(c) Beschreibe in wenigen Sätzen, wie man allegemin die Messungen gewinnen müsste, um mit FFT arbeiten zu können.

(4) Sei $H(x)$ die Einheitssprungfunktion mit der Sprungstelle $x = 0$ und $H(x-k)$ diejenige mit der Sprungstelle $x = k$. Weiter sind folgende Funktionen gegeben:

$$f_1(x) = (H(x+3) - H(x-3)), \qquad f_2(x) = (9 - x^2)\,(H(x+3) - H(x-3)),$$

$$F_3(\Omega) = \frac{(\cos(\Omega) - \sin(\Omega))}{\Omega}$$

(a) Skizziere die Funktion $f_1(x)$.

(b) Skizziere die Funktion $f_2(x)$.

(c) Berechne die Fouriertransformierte von $f_1(x)$

(d) Berechne die Fouriertransformierte von $f_2(x)$

(e) Berechne die inverse Fouriertransformierte von $F_3(\Omega)$

(5) Versuche von folgenden Funktionen die Fouriertransformierte herauszufinden:

(a) $f(x) = \cos(4\,x) + i\,\sin(4\,x)$.

(b) $f(x) = \sin(4\,x) + i\,\cos(4\,x)$.

(c) $\hat{f}(\omega) = \cos(4\,\omega) + i\,\sin(4\,\omega)$.

(6) Sei die $2\,\pi$–periodische Funktion $f_6(t)$ gegeben durch $f_6(t) = (|t-\pi| + \sin(\frac{t}{2}))$ über dem $FI = [-\pi,\,\pi)$.

(a) Bestimme die Fourierreihe $\tilde{f}_{6,4}(t)$ von $f_6(t)$ bis und mit $n = 4$ (Koeffizienten numerisch).

(b) Bestimme den Graphen der Fourierreihe $\tilde{f}_{6,4}(t)$ von $f_6(t)$ (bis und mit $n = 4$).

(7) Sei $f(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{-(2\,x)^2}$

(a) Zeige die Berechnung der Fouriertransformierten $\hat{f}(\Omega)$ von $f(x)$, falls diese existiert.

(b) Skizziere $f(x)$ und $\hat{f}(\Omega)$, falls diese möglich ist.

(c) Was ist bemerkenswert am Resultat?

Viel Glück!

WIR1

71.4 Einige Prüfungsfragen zur mündlichen Prüfung zum Statistikteil der Mathematik ◇ M2–11/12–02–02 ◇

Prüfungstechnik:

Sie Kandidaten können Zettel mit Fragen aus einer „Urne“ ziehen und im Klassenzimmer 10 Minuten vorbereiten. Dann müssen sie zu den gezogenen Fragen am Tisch referieren und zu Anschlussfragen Auskunft geben (Prüfungsgespräch).
Zeit: 20 bis 30 Minuten für vier Fragen (A, B, C, D).
Benotung: Durch Einschätzung pro Frage: Gewertet wird der festgestellte Anteil „richtig“ zu Anteil „nicht gewusst“. Dieser Anteil wird dem Kandidaten nach der Prüfung gleich kommuniziert. Er kann Stellung nehmen, falls etwas am Verhältnis falsch zu sein scheint. Das Verhältnis wird in eine Note übersetzt nach dem einfachen Muster „alles richtig gewusst gleich ausgezeichnet“ — „nur etwa die Hälfte richtig gewusst gleich genügend“. Dieses Muster ist kulturell verankert und daher gemeinhin akzeptiert. Die vier Fälle A, B, C, D führen so zu vier Noten.
Der Durchschnitt daraus ergibt die Gesamtnote.

Prüfungsfragen: Fragen aus den Grundlagen, siehe folgende Seite.

(1) (a) Was ist Wahrscheinlichkeitsrechnung?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(b) Was ist Laplace-Wahrscheinlichkeit im Unterschied zu . . . ?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(c) Was sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(2) (a) Was sind Testverteilungen?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(b) Was sind die Grundlagen der deskriptiven Statistik?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(c) Was sind die Grundlagen der mathematischen Statistik?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(3) (a) Was sind Schätzmethoden für Parameter von Verteilungen?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(b) Was ist zu sagen zu Erwartungstreue — Konsistenz — Wirksamkeit?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(c) Was sind Konfidenzintervalle?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(4) (a) Was ist zu sagen zu Prüfverfahren zu Hypothesen?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(b) Was ist zu sagen zum Thema Korrelation?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

(c) Was ist zu sagen zum Thema Fehler– und Ausgleichsrechnung?
   i. Wozu?
   ii. Theorie?
   iii. Beispiele?

Viel Glück!

WIR1

71.5 Link zu den Lösungen

---

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Ende