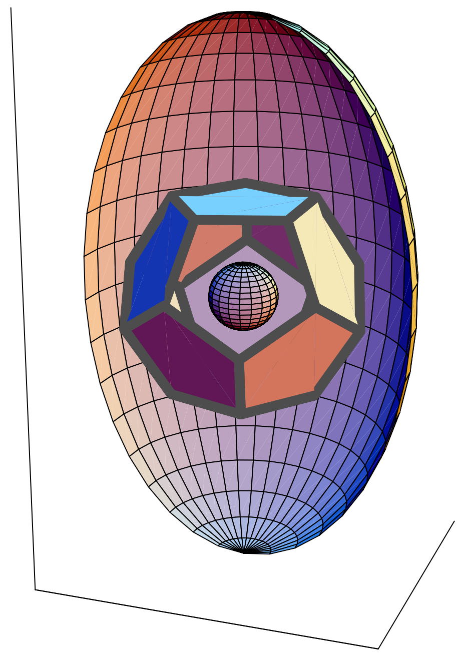
# ◇ Vordiplome ◇ Diplômes préalables ◇
# ◇ Modulprüfungen ◇ Exam. de modules ◇
## ◇ 1990 – 2012 ◇




von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH — AHB+TI/BFH



Ausgabe vom 9. Juli 2012, Version 1.6.0 / d/f


Mit klickbaren Links • *Avec des lines cliquables*

WIR1 /2007/2008/2009/2010/2011/2012/LaTex/BuchTestsMathVD.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

• *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

• *L'homme a trois occasions pour apprendre:*
*Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;*
*deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;*
*troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.*

*(Selon Confucius)*

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
*Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //*

# Inhaltsverzeichnis • Table des matières

# Kapitel • Chapitre 1

# Einführung — Introduction

## 1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den Jahren vor und nach dem Wechsel vom Diplomstudium zum Bachelor–Studium verwendet worden sind. Verschiedene Probleme sind aus dem Kollegium eingebracht worden. Andere stammen vom Autor.
• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les dernières années avant et après le changement des études du diplôme au bachelor. Il y a des problèmes qui ont été mis à disposition par des confrères. D'autre proviennent de l'auteur.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind mit *Mathematica* produziert worden. Aus Kapazitätsgründen ist jeweils, sofern noch vorhanden, nur der Quellencode abgespeichert, aus dem man mit Hilfe von *Mathematica* den Output sofort wieder produzieren kann. In den vielen Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter dem Link:
• *Les solutions aux problèmes ont été produites avec Mathematica. Pour raisons de capacité, seulement le code de source est mis à disposition, s'il n'avait pas été effacé. A l'aide de ce code on peut produire tout de suite le „output" à l'aide de Mathematica. Pendant les nombreuses années durant lesquelles l'auteur a utilisé cette méthode, une grande collection de solutions de devoirs est née, voir par exemple sous le lien:*

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Noch vorhandene Lösungen sind nach dem Schema der in Tabellenform abgespeicherten Übungen und Tests angeordnet, siehe unter dem Link:
• *Les solutions que existent encore sont mises à disposition d'après le schématisme utilisé dans le tableau des exercices et tests qu'on peut trouver sous le lien:*

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html

## 1.2 Gliederung, Bedingungen — Disposition, conditions

---

**(1)** Organisatorisches:

- ⊘ Beispiel eines Titels
- ⊘ Deckblatt
- ⊘ Bedingungen
- ⊘ Prüfungsausschreibungen

- *Quant à l'organisation:*
  - ⊘ • *Exemple d'un titre*
  - ⊘ • *Feuille de couverture*
  - ⊘ • *Conditions*
  - ⊘ • *Annonces (avis préalables)*

**(2)** Aufgabenserien
- *Séries de problèmes*

### 1.2.1 Titelblatt — Exemple page de titre

Siehe folgende Seite. • *Voir page suivante.* ⇝

# Vordiplomprüfung 2. Jahr
# 2006
Klasse B 04 / B2
# Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR1-2006/ 22 /Burgdorf/ V223
Fr 15.9.06/ 08:30–11:30

### 1.2.2 Beispiel Bedingungen

**Bedingungen:**

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe" bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- ⊘ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

### 1.2.3 Beispiel Bedingungen — Exemple conditions

Siehe folgende Seite. • *Voir page suivante.* ⇝

**Bedingungen — Conditions:**

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge. *Tous les problèmes sont à résoudre soi-même. Un comportement malhonnête a comme conséquence l'exclusion immédiate de l'examen.*

- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert. *Pour écrire il faut un moyen inéffaçable. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.*

- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert. *On demmande une présentation de déduction de la solution claire et propre. Des résultates sans déduction ne sont pas acceptés.*

- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen. *Quand des fractions décimales sont utilisées le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas différer de plus que* 0.1%.

- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen. *Les résultates sont à souligner deux fois.*

- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen. *Les parties pas valables sont à tracer nettement.*

- ⊘ Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert! *Pour chaque problème il faut utiliser une nouvelle feuille. Le verso doit rester libre. Peut-être il ne sera pas corrigé!*

- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
  **Moyen permis:** *Cours (résumé), livres de formules, calculatrice, papier et écritoire.*

- ⊘ **Punkte:** 12 erreichbare Punkte pro Aufgabe.
  **Nombre de points:** *12 points par problème sont possibles.*

- ⊘ Ziel: 6 Aufgaben auswählen und lösen. *But: Choisir et résoudre 6 problèmes.*

### 1.2.4 Exemple conditions

**Conditions:**

- ⊘ Tous les problèmes sont à résoudre soi-même. Un comportement qui n'est pas honnête a comme conséquence l'exclusion immédiate de l'examen.

- ⊘ Pour écrire il faut un moyen ineffaçable. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.

- ⊘ On demande une représentation de la déduction de la solution claire et propre avec l'indication des idées et des résultats intermédiaires. Les résultats sans la déduction ne sont pas acceptés.

- ⊘ Quand des fractions décimales sont utilisées le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas différer de plus de 0.1%.

- ⊘ Les unités physiques peuvent être omises généralement, sauf avis contraire.

- ⊘ Les résultats sont à souligner doublement.

- ⊘ Les parties non valables sont à tracer de manière propre et nette.

- ⊘ Pour chaque problème, il faut utiliser une nouvelle feuille. Les versos des feuilles doivent rester vides. Peut-être elles ne seront pas corrigées!

- ⊘ **Moyens permis:** Dossiers de cours version abrégéé (résumé), livres de formules, calculatrices, papier et écritoire.

- ⊘ **Points:** Par devoir, 12 points sont possibles, sauf avis contraire.

- ⊘ But: Si pour l'examen plus de 6 problèmes sont donnés, il faut en choisir 6 et les résoudre.

### 1.2.5 Beispiel Deckblatt — — Exemple feuille de couverture

Siehe folgende Seite. • *Voir page suivante.* ⇝

Klassse ◇ Classe.......

# Vordiplomprüfung 20.......

# ◇ Examen de diplôme préalable ◇ 20.......

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel

◇ Haute école spécialisée bernoise, école d'ingénieurs Bienne ◇

## In diesen Umschlag gehören:

**(1)** Die Blätter mit den Prüfungsaufgaben und den Bedingungen

**(2)** Die Blätter mit den Lösungen und Berechnungen

**(3)** Die verwendeten Notizblätter (hinten beilegen)

## Dans cette enveloppe il faut mettre:

**(1)** Les feuilles avec le texte de l'examen et les conditions

**(2)** Les solutions et les calculs

**(3)** Ajouter en dernier les feuilles de brouillon

Datum: ◇ Date: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Name, Unterschrift: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
◇ Nom, signature: ◇

### 1.2.6 Beispiel Deckblatt — — Exemple feuille de couverture

Siehe folgende Seite. • *Voir page suivante.* ⇝

Klassse ◇ *Classe.......*

# ◇ Modulprüfung ◇ 20.......

# ◇ *Examen de module* ◇ *20.......*

Berner Fachhochschule, Hochschule Architektur, Bau und Holz
*Haute école spécialisée bernoise, haute école d'architecture, de génie civil et du bois*

Berner Fachhochschule, für Technik und Informatik
*Haute école spécialisée bernoise, Haute école technique et informatique*

## In diesen Umschlag gehören:

**(1)** Die Blätter mit den Prüfungsaufgaben und den Bedingungen

**(2)** Die Blätter mit den Lösungen und Berechnungen

**(3)** Die verwendeten Notizblätter (hinten beilegen)

## *Dans cette enveloppe il faut mettre:*

**(1)** *Les feuilles avec le texte de l'examen et les conditions*

**(2)** *Les solutions et les calculs*

**(3)** *Ajouter en dernier les feuilles de brouillon*

Datum: ◇ *Date:* ...............................

Name, Unterschrift: ...............................
◇ *Nom, signature:*

### 1.2.7 Beispiel Prüfungsausschreibung — — Exemple avis préalable

Siehe folgende Seite. • *Voir page suivante.* ⇝

# Modulprüfung II Mathematik
# Sommer 2006
Klasse B 05 / B1
# Prüfungsausschreibung

Zeit: 120 Minuten

Dienstag, 28.6.2006 ab 09:20, bitte 5 Minuten vorher anwesend sein.

Wir1

%

**Bedingungen:**

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Die Anzahl möglicher Punkte pro Aufgabe werden bei der Aufgabenstellung angegeben.

**Prüfungsstoff:**

Der während dem Semester behandelte Stoff (Vektoralgebra und Vektoranalysis, Matrizen- und Determinantenrechnung, lineare Abbildungen, Biegelinie und verwandte Gebiete nach Journal auf:

$http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work\_B1a\_05.htm$

### 1.2.8 Beispiel Prüfungsausschreibung — — Exemple avis préalable

Siehe folgende Seite. • *Voir page suivante.* ⇝

# Vordiplom II in Mathematik
# Sommer 2006
### Klasse B 04 / B2
# Prüfungsausschreibung

Zeit: 180 Minuten ohne organissierte Pause

Freitag, 15.09.2006 ab 08:30, V223, bitte 5 Minuten vorher anwesend sein.

(Die Aufgaben werden alle zusammen einmal ausgegeben — ohne Einsammlung wegen Pause.
Einzelne Austritte werden ad hoc geregelt und kontrolliert.)

Wir1

Bedingungen, Prüfungsstoff % $\rightsquigarrow$

**Bedingungen:**

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Die Anzahl möglicher Punkte pro Aufgabe werden bei der Aufgabenstellung angegeben.

**Prüfungsstoff:**
Nach *http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/AndereIntern/EWyl/index.html*

Schwerpunkt ist der während dem letzten Jahr behandelte Stoff, gestützt auf die notwendigen Voraussetzungen in Analysis (Differential– und Integralrechnung) und Vektoralgebra.
Stoff: Vektoralgebra und Vektoranalysis, Differentialrechnung mit mehreren Variablen, lineare Abbildungen, Approximationstheorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, komplexe Zahlen.
Nachbesprochener Stoff vom letzten Jahr: Matrizen- und Determinantenrechnung, Biegelinie und verwandte Gebiete nach Journal auf:
*http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_05.htm*

### 1.2.9 Beispiel Prüfungsausschreibung B06 Sommer 2007

---

**Modulprüfung** ***in Mathematik, Klasse B06***

| | |
|---|---|
| **Tag / Datum** | Freitag, 31.8.2007 in der Zeit 13:30 – 16:00 |
| **Ort** | BFH, Burgdorf, Zimmer V223 |
| **Aufsicht** | Rolf Wirz |
| **Verfügbare Zeit** | 120 Minuten (bitte 5 Minuten früher anwesend sein) |
| **Aufgabe** | Schriftliches Lösen von Mathematikaufgaben nach der traditionellen Art der Beispiele auf http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html<br>Geprüft wird der behandelte Stoff (mit Übungen) inklusive der ins Selbststudium ausgelagerte Stoff nach dem Journal auf Seite http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B1a_06.htm |
| **Erlaubte Hilfsmittel** | Kursunterlagen (+ Kurzfassung/ Notizen), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier, Schreibzeug. |
| **Abgegebene Unterlagen** | Prüfungsaufgaben in der Art der bisherigen Beispiele. |
| **Bewertungskriterien** | Die bei jeder Aufgabe erreichbaren Punkte werden mit den Aufgaben bekanntgegeben. Die Punkte werden nach dem Grad der math. Richtigkeit, Korrektheit und Vollständigkeit einer Lösung gewährt. Die Gesamtzahl der erreichten Punkte bestimmt die Prüfungsnote nach einer geknickten Skala, welche in Übereinstimmung mit der ECTS-Philosophie unter Beachtung der Kenngrössen der Klassenleistung nach der Prüfung definitiv festgelegt wird. |

8.6.2007, Wir1

### 1.2.10 Beispiel Prüfungsausschreibung E1+M1 Sommer 2007

---

**Modulschlussprüfungen Herbst 2007**

Prüfungsausschreibung Analysis 2

**Regeln**

Beachten Sie bitte die folgenden für alle Prüfungen gültigen Regeln:
1. Wenn Sie wegen Krankheit, Unfall oder anderen zwingenden Gründen am Besuch einer Prüfung verhindert sind, ist das Sekretariat der HTI Burgdorf (034 426 41 41), das Fachbereichssekretariat (034 426 43 38) oder der Studienleiter (Büro: 034 426 42 81, privat: 034 422 87 59) unverzüglich zu benachrichtigen.
2. Wenn Sie während der Prüfung feststellen, dass gesundheitliche Gründe Ihre Leistungsfähigkeit wesentlich beeinträchtigen, müssen Sie sofort, spätestens am Ende der Prüfung, die Prüfungsaufsicht orientieren. Nachträgliche Meldungen können nicht mehr berücksichtigt werden.
3. Wenn gesundheitliche Gründe Sie am Besuch einer Prüfung gehindert haben oder Ihre Leistungsfähigkeit während der Prüfung wesentlich beeinträchtigt haben, ist dies mit einem Arztzeugnis zu belegen. Sie können dann – vorbehältlich rechtzeitiger Meldung gemäss Punkt 1 und 2 - die Prüfung an einem von der Prüfungsleitung festgelegten Termin nachholen.
4. Unentschuldigtes Fernbleiben einer Prüfung oder Fernbleiben ohne zwingenden Grund hat die Note F zur Folge gemäss Artikel 22 des Rahmenreglements für Kompetenznachweise an der Berner Fachhochschule (KNR).
5. Mobile Telefone und PDA's dürfen nicht in die Prüfungszimmer mitgebracht werden. Nichtbeachten dieser Weisung gilt als Unredlichkeit und hat wie alle anderen Unredlichkeiten die Note F zur Folge gemäss Artikel 23 des KNR.

Modul: Analysis 2

**Klassen:** E1p, M1p
**Datum:** Montag 27. August 2007
**Zeit:** 15.00 - 18.00 Uhr
**Ort:** E 23
**Erlaubte Hilfsmittel:** Ein Taschenrechner, eine Formelsammlung, Skript, eigene Notizen
**Prüfungsgebiet:** Zum Modul gehörige Stoffgebiete: Funktionen mit mehreren Variablen: Differential- und Integralrechnung mit Anwendungen,
gewöhnliche Differentialgleichungen.
**Durchführung:** Schriftliche Prüfung mit 8 Aufgaben
**Bewertung:** 7 Aufgaben zu maximal 15 Punkten
**Besprechungstermin:** Nach Absprache
Burgdorf, .04. September 2007 Der prüfende Dozent:

R. Wirz

# Kapitel • Chapitre 2

# Prüfungsserien — Séries d'examens

## 2.1 Hinweise — Indications

Die nachfolgenden Serien sind chronologisch geordnet. Die älteren Serien wurden nach einem Datenverlust wieder elektronisch aufbereitet und entsprechen daher nicht unbedingt der Originalversion. Im Titel einer Serie kann der Sachkundige einen Hinweis auf die Stdienrichtung und das Studiensemester finden.

• *Les séries suivantes sont présentées de façon chronologique. Les séries plus vieilles ont été traitées électroniquement après une perte de données. En conséquence, ils ne correspondent pas à la version originale. Dans le titre d'une série on peut trouver une indication concernant la matière spéciale et le semestre d'étude.*

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

## 2.2 Vordiplomprüfung Mathematik 1990

**Klasse I4T**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** (a) **(6 Punkte)**

Sei $y = y(t)$. Lösen Sie mit Hilfe der Mehtode der *Laplace–Transformationen* das Anfangswertproblem (*):

$$\begin{aligned} 2\,y'' + 12\,y' - 16\,y &= 4\,\sin(4\,t) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

(b) **(5 Punkte)**

Berechnen Sie die *allgemeine* Lösung von (**)

$$2\,y'' - 12\,y + 16\,y = 4\,\sin(4\,t)$$

(*Hinweis:* Möglicher Ansatz: $y_{part} = A\,sin(\ldots) + B\,\cos(\ldots)$)

(c) **(2 Punkte)**

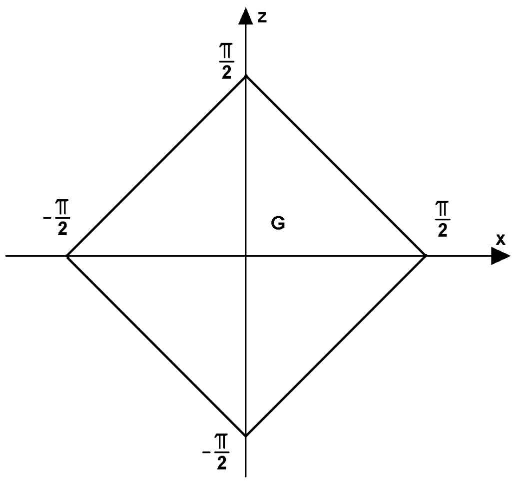
Vergleichen Sie die spezielle Lösung von (*) mit der allgemeinen Lösung von (**): Was ist über das Verhalten der Lösungen für grosse Werte von $t$ zu sagen?

(d) **(2 Punkte)**

Berechnen Sie die *spezielle* Lösung von (**) für die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** Sei $f(x, y, z) = \sin(x + y)\,\cos(y) + z^2 + 3$.
$I$ sei das Intervall $I = [-2, 2]$.
$G$ sei das in der Figur angegebene Gebiet.




(a) **(5 Punkte)**

Berechnen Sie $\int\int_G f(x, y, z)\, dG$ für $y = 2\,n\,\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) **(5 Punkte)**

Untersuchen Sie, ob $f(x, y, z)$ in $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in G,\ x \in I\}$ ein oder mehrere lokale Extrema besitzt. Bestimmen Sie allenfalls diese Extrema.

— ENDE —

ECOLE D'INGENIEURS BIENNE (EIB)

## 2.3 Examen de diplôme préalable en mathématiques 1990

**Classe I4T**

*Bonne chance !*

**Aufgabe 1** (a) **(6 points)**

Soit $y = y(t)$. Résolvez par la méthode des *transformations de Laplace* le problème aux valeurs initials (*):

$$\begin{aligned} 2\,y'' + 12\,y' - 16\,y &= 4\,\sin(4\,t) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

(b) **(5 points)**

Calculez la solution *générale* de (**)

$$2\,y'' - 12\,y + 16\,y = 4\,\sin(4\,t)$$

(*Indication:* Disposition possible: $y_{part} = A\,sin(\ldots) + B\,\cos(\ldots)$)

(c) **(2 points)**

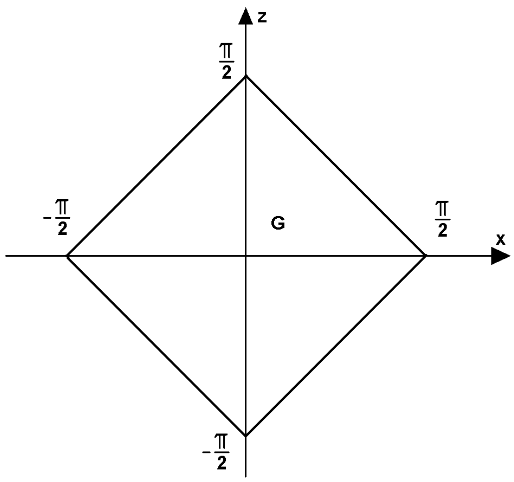
Comparez la solution particulière de (*) à la solution générale de (**): Que peut–on dire à propos du comportement des solutions pour les $t$ à grandes valeurs?

(d) **(2 points)**

Calculez la solution *particulière* de (**) pour les conditions limites:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** Soit $f(x, y, z) = \sin(x + y)\cos(y) + z^2 + 3$.
$I$ soit l'intervalle $I = [-2, 2]$.
$G$ soit le domaine indiqué par la figure.




(a) **(5 points)**

Calculez $\iint_G f(x, y, z)\, dG$ pour $y = 2\,n\,\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

(b) **(5 points)**

Cerchez si $f(x, y, z)$ dans $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in G,\ \ x \in I\}$ possède un ou plusieurs extrêmes locaux. Calculez, si c'est le cas, ces extrêmes.

— FIN —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

## 2.4 Vordiplom Nachprüfung 1990

**Klasse I4T**

*Viel Glück !*

# Teil 1: Einfache Algebra

**Aufgabe 1** **(2 Punkte)**

Vereinfache Sie den nachfolgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$\neg(\neg(A \vee \neg B) \vee \neg B) \vee (A \vee \neg(B \wedge A))$$

*Andere Schreibweise, wie in der Schaltalgebra üblich:*

$$((A + B')' + B')' + (A + (B \cdot A)')$$

**Aufgabe 2** **(4 Punkte)**

Gegeben: $w = f(z) = -\dfrac{z}{\bar{z}},\ \ z \in \mathbb{C}$

(a) Beschreiben Sie die geometrische Lage von $w$ bezüglich $z$.

(b) $z$ beschreibt eine Kurve $z(t) = 4\,e^{i\,t},\ \ t \in [0, \pi]$.
Welche Kurve beschreibt dann $w$? Zeichnen Sie die beiden Kurven!

**Aufgabe 3** **(6 Punkte)**

Gegebenist die Ebene $\phi:\ x + 2\,y + 3\,z = 3$ sowie die Punkte $P(2/4/6)$ und $Q(1/1/0)$. Auf der Geraden $\overline{PQ}$ fällt ein Lichtstrahl von der Lichtquelle $P$ auf die Ebene $\Phi$ und wird reflektiert. Geben Sie die Geradengleichung des reflektierten Strahls.

**Aufgabe 4** **(6 Punkte)**

Gegeben sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Geben Sie sämtliche Lösungen von $C\,(A\,\vec{x} + \vec{b}) - \vec{s} = C^{-1}\,\vec{t}$

# Teil 2: Einfache Analysis

**Aufgabe 1** **(5 Punkte)**

Skizzieren Sie den Graphen der reellen Funktion

$$f:\; x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 - 2\,x + 1}{4} \cdot (x-1) \cdot ln(\frac{1-x}{2}).$$

Bestimmen Sie so weit wie möglich eventuelle Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

**Aufgabe 2** **(4 Punkte)**

$$\int\limits_7^k \frac{3\,x^2 + 15\,x - 12 - 30\,x}{x^2 - 6\,x - 7}\, dx = \,? \qquad k \in \mathbb{R},\;\; k > 7$$

**Aufgabe 3** **(4 Punkte)**

$$\int\limits_0^\infty |-\frac{2}{4}\,\sin(\frac{x}{2})|\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \,?$$

*Hinweis: Integrieren Sie nach einer geeigneten Substitution zuerst über ein einfaches Teilintervall. Suchen Sie ein Gesetz zu finden ($\leadsto$ geometrische Reihe).*

**Aufgabe 4** **(4 Punkte)**

Sei $s > 0$. Der Graph einer Funktion 3. Grades schneidet die $x$–Achse in $-s$ und berührt sie in 0. Zwischen $-s$ und 0 befindet sich ein Maximum. Für $x = 0$ hat die Funktion ein Minimum mit $f(0) = 0$. Zudem ist $f(s) = 2\,s$. Den Inhalt der Fläche zwischen der $x$–Achse und dem Graphen nennen wir $A_1$. $A_2$ dagegen sein der Inhalt der Fläche oberhalb des Graphen bis zur Parallele zur $x$–Achse durch $(s\,/\,2\,s)$.

(a) $f(x) = \,?$

(b) Was ist das Verhältnis der Inhalte von $A_1$ und $A_2$?

# Teil 3: Mathematik

**Aufgabe 1** **(6 Punkte)**

Sei $y = y(t)$. Lösen Sie mit Hilfe der Mehtode der *Laplace–Transformationen* das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} 2\,y''' + 6\,y'' + 6\,y' + 2\,y &= 2\,t^2\,e^{-t} \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** **(6 Punkte)**

Berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'' - 6\,y' + 8\,y = 2\,\cos(2\,t).$$

*Hinweis:* Möglicher Ansatz: $y_{part} = A\,sin(\ldots) + B\,\cos(\ldots))$

**Aufgabe 3** **(6 Punkte)**

Ein Reagenzglas wird wie folgt beschrieben: Ein Rotationszylinder um die $z$–Achse hat den Radius $r = 10$ und reicht von $z = 0$ bis $z = 20$. Der Zylinder sitzt auf einer Halbkugel mit $r = 10$, die natürlich ihren Mittelpunkt im Origo hat und von $z = 0$ bis $z = -10$ reicht. Die sich im Reagenzglas befindliche Flüssigkeit wird so in Rotation versetzt, dass ihre Oberfläche durch Rotation einer Parabel entsteht, die ihren Scheitelpunkt im Ursprung hat und zudem oben den Glasrand berührt. Wieviel Flüssigkeit ist im Glas?
*Die verwendeten Formeln sind herzuleiten mit Ausnahme der für das Zylinder– und das Kugelvolumen.*

**Aufgabe 4** **(3 Punkte)**

Berechnen Sie $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung.
*Genauigkeit: 3 Stellen!*

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

## 2.5 Vordiplomprüfung Mathematik 1991

**Klasse E4D**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(18 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$y''' + 3\,y'' + 3\,y' + y \quad = \quad f(t)$$

(a) **(2 Punkte)**

Sei $f(t) = e^{-t}$. Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Wendetangente?

(b) **(4 Punkte)**

Skizzieren Sie diese Kurven über dem Definitionsbereich $D = [-1, 6]$.

(c) **(3 Punkte)**

Bestimmen Sie für diese Kurven in $D$ die vorhandenen Extremwertstellen mit ihren Werten sowie die restlichen Wendepunkte, sofern vorhanden.

(d) **(3 Punkte)**

Bestimmen Sie für diese Kurven die Kurvenlängen zwischen $t = -1$ und $t = 6$. Das numerische Resultat genügt.

(e) **(6 Punkte)**

Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $f(t) = \delta(t)$ und den Anfangsbedingungen $y(0) = -1,\;\; y'(0) = y''(0) = 0$.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Zeichnen Sie in der $xy$–Ebene das Rechteck $R$, das durch $A(-1/1)$, $B(1/1)$ und die $x$–Achse markiert ist. Bestimmen Sie die beiden Parabeln 2. Ordnung $f(x)$ und $g(x)$, die durch $A$ sowie $B$ gehen, zwischen $x = -1$ und $x = 1$ in $R$ verlaufen und den Flächeninhalt von $R$ in 3 grosse Teile $F_1$, $F_2$, $F_3$ teilen.

(a) **(4 Punkte)**
Was sind die algebraischen Ausdrücke für $f$ und $g$?

(b) **(4 Punkte)**
Wir lassen die Figur um die $x$-Achse rotieren. Was sind die Verhältnisse der Volumina, die von $F_1$, $F_2$ und $F_3$ erzeugt werden?

(c) **(4 Punkte)**
Was sind die algebraischen Ausdrücke für $f$ und $g$, wenn die Rotationsachse die Gerade $\overline{AB}$ ist.

**Aufgabe 3** **(15 Punkte)**

Gegeben ist die Schar archimedischer Schrauben

$$\vec{x}(r,t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(r) \\ r \cdot \sin(r) \\ t \end{pmatrix}.$$

Es ist $t \in [0, 2\pi]$

(a) **(3 Punkte)**
Berechnen Sie das begleitende Dreibein für $t = 0$.

(b) **(3 Punkte)**
Berechnen Sie für $t = 0$ Krümmung und Krümmungsradius.

(c) **(3 Punkte)**
Versuchen Sie, mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen und den letzten beiden Resultaten herauszufinden, welcher Punkt der Mittelpunkt des Krümmungskreises ist.

(d) **(3 Punkte)**
Berechnen Sie die Torsion für $t = 0$.

(e) **(3 Punkte)**
Berechnen Sie $\vec{v} = \vec{x}(r,t)_t{}'$. Setzen Sie $r = r(x,y,z) = \ldots$ und $t = t(x,y,z) = \ldots$. (Diese Funktionen müssen Sie herausfinden.) So erhalten Sie dann $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$. Berechnen Sie jetzt $rot\,(\vec{v})$.

**Aufgabe 4** *Kurzaufgabe* **(4 Punkte)**

Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\forall_{x \in (0,1)} : \; e^{-kx} > (1-x)^k$$

*Hinweis: Ein bequemer Ausgangspunkt ist der Fall $k = 1$.*

**Aufgabe 5** *Kurzaufgabe* **(4 Punkte)**

Suchen Sie die Kurve $f(x)$ über $[0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die Kurvenlänge ist $\infty$.

(b) Die Oberfläche des Rotationskörpers (um die $x$–Achse) ist $\infty$.

(c) Das Volumen des besagten Rotationskörpers ist $\pi$.

Die Eigenschaften sind natürlich zu beleben!

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Es soll eine Schaltung entworfen werden, die eine 2–stellige Dualzahl mit den Ziffern $A$ und $B$ mit einer zweistelligen Dualzahl mit den Ziffern $C$ und $D$ multipliziert. Für die Stellen des Resultats sind kleine Buchstaben zu verwenden.

(a) **(4 Punkte)**
Stellen Sie die möglichen Verknüpfungen in einer Tabelle dar (Leitwerttabelle).

(b) **(4 Punkte)**
Lesen Sie aus der Tabelle auf sinnvolle Weise algebraische Ausdrücke für das Resultat ab, in denen nur Symbole für Serie–, Parallelschaltung und „Negation einzelner Schalter" vorkommen.

(c) **(4 Punkte)**
Vereinfachen Sie diese Ausdrücke so weit als möglich unter Beibehaltung der Symbole von oben.

**Aufgabe 7** **(13 Punkte)**

Gegeben sind zwei Geraden $g_1$ und $g_2$ wie folgt:

$$g_1 = \Phi \cap \Psi, \;\; g_2 : \; \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{a}$$

Dazu kenne wir den Punkt $P_0$.

(a) **(3 Punkte)**
Ist die kleinst mögliche Kugel, die beide Geraden berührt, eindeutig bestimmt?

(b) **(5 Punkte)**
Berechnen Sie den Mittelpunkt $M$ und den Radius dieser Kugel, soweit Eindeutigkeit vorhanden ist.

(c) **(5 Punkte)**
Ist der Abstand der Geraden $h = \overline{MP_0}$ und $g_1$ grösser als der Abstand von $h$ und $g_2$? Berechnen Sie diese Abstände!

**Angaben:** $P_0(-3/-1/-9)$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lrcl} \Phi : & 1\,x + 2\,y - 2\,z + 8 & = & 0 \\ \Psi : & 2\,x - 2\,y + 3\,z - 6 & = & 0 \end{array}$$

**Aufgabe 8 (12 Punkte)**

$\vec{f}(x,y) = f_1(x,y)\,\vec{e}_1 + f_2(x,y)\,\vec{e}_2$ stellt ein ebenes Vektorfeld dar. Der Definitionsbereich sei das Gebiet $D$ mit dem Rand $\partial D$.

Der Greensche Satz beagt, dass gilt:

$$\int\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dA = \oint_C \langle \vec{f}, d\vec{r}\rangle$$

$C$ ist der orientierte Weg, der das Gebiet so umrandet, dass das Innere von $D$ zur Linken liegt: $C = \pm\partial D$

Verifiziere Sie den Greenschen Satz für die folgende konkrete Situation:

$\vec{f}(x,y) = (x\,y - x^2)\,\vec{e}_1 + (x^2 - y^2)\,\vec{e}_2,\;\; \partial D = C_1 \cup C_2,$
$C_1 = \{(x,y) \mid y = x^{0.5} \;\wedge\; x \in [0,1]\},\;\; C_2 = \{(x,y) \mid y = x^3 \;\wedge\; x \in [1,0]\}$

*Hinweis:*
*Machen Sie sich erst eine Skizze und parametrisieren Sie $C_1$ und $C_2$ auf geeignete Art.*

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

## 2.6 Vordiplomprüfung Algebra 1991

**Klassen I4T/W**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1 (12 Punkte)**

Es soll eine Schaltung entworfen werden, die zu einer 3-stelligen Dualzahl mit den Ziffern A, B und C eine zweistellige Dualzahl mit den Ziffern D und E addiert. Für die Stellen des Resultats sind kleine Buchstaben zu verwenden.

(a) **(4 Punkte)**

Stelle Sie die möglichen Verknüpfungen in einer Tabelle dar (Leitwerttabelle).

(b) **(4 Punkte)**

Lesen Sie aus der Tabelle auf sinnvolle Weise algebraische Ausdrücke für das Resultat ab, in denen nur Symbole für Serie-, Parallelschaltung und „Negation einzelner Schalter“ vorkommen.

(c) **(4 Punkte)**

Vereinfachen Sie diese Ausdrücke so weit wie möglich unter Beibehaltung der eben genannten Symbole.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Berechnen Sie $\vec{x}$ aus folgender Gleichung, falls möglich:

$$(A\,\vec{x} + B\,\vec{x})^T A + \vec{b}^T C = (A^{-1}\,\vec{k})^T \qquad \textit{(Hinweis: } (M\,\vec{v})^T = \vec{v}^T M^T \textit{ )}$$

Alle Lösungsschritte und Berechnungsmethoden müssen auf dem Blatt ersichtlich und nachvollziehbar sein. Bei Verwendung des Rechners ist zu erklären, welche Operationen dem Rechner überlassen werden.

**Angaben:** $C = A^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$

$\vec{a}^T = (i, 1, -1),\ \vec{b}^T = (0, i, 0),\ \vec{k}^T = (0, 0, 1)$

**Aufgabe 3** **(10 Punkte)**

Gegeben sind die Geraden $g$ und $h$ wie folgt:

$g = \Phi \cap \Psi \qquad h : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{a}$ Dazu kennt man den Punkt $P$.

(a) **(3 Punkte)**

Ist die kleinst mögliche Kugel, die beide Geraden berührt, eindeutig bestimmt?

(b) **(3 Punkte)**

Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius dieser Kugel, soweit Eindeutigkeit vorhanden ist.

(c) **(3 Punkte)**

Liegt der Punkt $P$ auf der Kugeloberfläche?

**Angaben:**

$$\begin{array}{rcl} \Phi: \ +2\,x + y - 2\,z + 8 & = & 0 \\ \Psi: \ -x + 2\,y + 3\,z - 6 & = & 0 \end{array}$$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ P(-1/-3/-5).$$

**Aufgabe 4** **(10 Punkte)**

Gegeben ist $m \in \mathbb{N}$ beliebig. $m$ sei im 10–er System dargestellt. Wählen Sie zwei beliebige, aber verschiedene Ziffern von $m$ und vertauschen Sie diese. Dann entsteht eine neue Zahl $n$. Sei nun $d = m^2 - n^2$ und $s$ und $k$ die von hinten gezählten Platznummern der gewählten Ziffern in $m$, wobei $k > s$ ist. *Lassen Sie die Nummerierung mit* 0 *beginnen!* $z$ sei die gesamte Anzahl Ziffern von $m$ resp. $n$. Damit die Sache einen Sinn hat, muss natürlich $z > 1$ sein.

(a) **(2 Punkte)**

Berechnen Sie den *ggT'pgdc* aller Zahlen $m$ im Falle $z = 2$.
*(Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung* $m = 10\,a + b$*.)*

(b) **(3 Punkte)**

Berechnen Sie den *ggT'pgdc* $t(z,k,s)$ aller Zahlen $d$ für $m \in M$ bei beliebigem $z$ und $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 9\}$. $t$ enthält die „ewigen Teiler", die überall vorkommen und hängt offenbar von $z$, $k$ und $s$ ab.
*(Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung $m = 10^k\, a + 10^s\, b + R$, wobei in $R$ die restlichen Ziffern figurieren.)*

(c) **(2 Punkte)**

Untersuchen Sie, welche Zahlen $d$ mit $m \in M$ durch $9 \cdot 11$ teilbar sind.

(d) **(3 Punkte)**

Sei

$$f(k,s,z,d) = \begin{cases} 1 & \text{falls 99 Teiler von } d \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beschreiben Sie diese Funktion!

— ENDE —

ECOLE D'INGENIEURS BIENNE (EIB)

## 2.7 Diplôme préalable en algèbre 1991

**Classen I4T/W**

*Bonne chance !*

**Aufgabe 1** **(12 points)**

Il faut créer un montage, qui additionne a un nombre dual à 3 places (avec les lettres A, B et C) à un nombre dual à deux places (avec les lettres D et E). Employez pour le résultat des lettres minuscules.

(a) **(4 points)**

Représentez les liaisons possibles dans un tableau. (Tableau des valeurs logiques.)

(b) **(4 points)**

Lisez pour le résultat dans le tableau de façon raisonnable des expressions algébriques dans lesquelles il n'y ait que des symboles pour des montages en séries, parallèles et pour la négation des interrupteurs isolés.

(c) **(4 points)**

Simplifiez ces expressions le plus possible en maintenant les symboles mentionnés en haut.

**Aufgabe 2** **(10 points)**

Calculez $\vec{x}$ de l'équation ci–dessus, si possible:

$$(A\,\vec{x} + B\,\vec{x})^T\,A + \vec{b}^T\,C = (A^{-1}\,\vec{k})^T \qquad \textit{(Indication: } (M\,\vec{v})^T = \vec{v}^T\,M^T\ \textit{)}$$

Toutes les étapes de la solution et les méthodes doivent figurer sur la feuille et il doit être possible de les reconstruire sans l'aide de moyens spéciaux. Si vous utilisez la calculatrice, les opérations qui sont executées par la calculatrice doivent être expliquées.

**Indications:** $C = A^2,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$

$\vec{a}^T = (i, 1, -1),\ \ \vec{b}^T = (0, i, 0),\ \ \vec{k}^T = (0, 0, 1)$

**Aufgabe 3** **(10 points)**

Voici données des droites $g$ et $h$:

$g = \Phi \cap \Psi \qquad h : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{a} \qquad$ On connaît aussi le point $P$.

(a) **(3 points)**

La plus petite sphère possible qui touche les deux droites, est–elle clairement définie?

(b) **(3 points)**

Calculez le centre et le rayon de cette sphère autant que cela existe clairement.

(c) **(3 points**

Est–ce que le point $P$ est sur la surface de la sphère?

**Indications:**

$$\begin{aligned} \Phi:\ +2\,x + y - 2\,z + 8 &= 0 \\ \Psi:\ -x + 2\,y + 3\,z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \ \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \ P(-1/-3/-5).$$

**Aufgabe 4** **(10 points)**

Donné $m \in \mathbb{N}$ quelconque. $m$ soit représenté dans le système décimal. Choisissez deux chiffres quelconque mais différents de $m$ et échangez–les. Il en résulte un nouveau chiffre $n$. Soit $d = m^2 - n^2$ et soient $s$ et $k$ les numéros des places comptés en commençant par le dernier des chiffres de $m$; il faut $k > s$. *Commencez le numérotage par* $0$*!* $z$ soit le nombre total des chiffres de $m$ resp. $n$. Pour que la chose ait un sens, il faut indispensable que $z > 1$.

(a) **(2 points)**

Calculez le plus grand diviseur commun (*ggT'pgdc*) de tous les nombres $m$ pour $z = 2$. *(Indication: Utilisez la représentation* $m = 10\,a + b$*.)*

(b) **(3 points)**

Calculez le *ggT'pgdc* $t(z, k, s)$ de tous les nombres $d$ pour $m \in M$ si $z$ est un nombre quelconque et $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 9\}$. $t$ contient les diviseurs qui apparaissent partout et dépend donc de $z$, $k$ et $s$.
*(Indication: Utilisez la représentation $m = 10^k\, a + 10^s\, b + R$, le reste des chiffres de $m$ figurent dans $R$.)*

(c) **(2 points)**

Examinez quels chiffres $d$ avec $m \in M$ se laisse diviser par $9 \cdot 11$.

(d) **(3 points)**

Soit

$$f(k, s, z, d) = \begin{cases} 1 & \text{si 99 est diviseur de } d \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Décrivez cette fonction!

— FIN —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

## 2.8 Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1992

**Klasse E1D**

*Viel Glück !*

**A. Kürzere Aufgaben**

**Aufgabe 1** (a) **(6 Punkte)**

Berechnen Sie den folgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$\frac{d}{d\,x}((\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n\cdot x)}{10^n})-\frac{\ln(x)}{9})=\,?$$

(b) **(6 Punkte)**

Beweisen Sie korrekt *mit vollständiger Induktion*:

$$(\sum_{k=0}^{n}k)^2=\sum_{k=0}^{n}k^3$$

*Hinweis: Schreiben Sie „die Summen aus“ und beachten Sie den Trick, den man benutzt, um die Zahlen von* 1 *bis* 100 *zu addieren.*

**Aufgabe 2** (a) **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Tetraeders mit den folgenden Eckpunkten:

$$A(-1/2/0),\;\; B(2/1/-3),\;\; C(1/0/1),\;\; D(3/-2/3)$$

(b) **(6 Punkte)**

Seien $z=a+i\,b$ sowie $z'=a'+i\,b'$ Zahlen $\in\mathbb{C}$.

i. **(4 Punkte)**

Beweisen Sie durch Rechnung die folgende Gleichung:

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2\,(|z|^2+|z'|^2)$$

ii. **(2 Punkte)**

Erklären Sie die geometrische Bedeutung dieser Gleichung mittels einer Skizze.

## A. Längere Aufgaben

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Es besteht das Problem, mit Hilfe von Schaltungen zwei zweistellige Dualzahlen zu multiplizieren.

(a) **(4 Punkte)**
Erstellen Sie die Multiplikationstabelle für die Zahlen (entsprechend der Wahrheitstabelle).

(b) **(4 Punkte)**
Lösen Sie das Darstellungsproblem, indem Sie Boolsche Ausdrücke herleiten, in denen nur „·“, „+“ und „−“ vorkommen.

(c) **(4 Punkte)**
Lösen Sie das Minimalisierungsproblem, falls noch notwendig. Wenn Mehrdeutigkeit vorliegt, sind alle Alternativen aufzuführen. (Bedingungen wie üblich.)

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Sei $f(x) = e^x \cdot ln(x)$.

(a) **(6 Punkte)**
Entwickeln Sie $f(x)$ in eine Potenzreihe um $x = 1$. (Resultat bis zu $O[x^5]$.)

(b) **(3 Punkte)**
Liegt $(0, 2)$ im Konvergenzintervall? (Begründung!)

(c) **(3 Punkte)**
Lässt sich damit eine Näherungsformel für $\int_1^x f(\xi)\, d\xi$ herleiten?
(Leiten Sie allenfalls die Formel her!)

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Kurven $x^2 + y^2 = 2$ und $y = 2 - x^2$ in der Halbebene mit $y \geq 0$.
(Dabei sei $I = \{x \mid y(x) \geq 0\}$.)
Bestimmen Sie den gemeinsamen Inhalt (Durchschnitt) der Flächen zwischen der $x$–Achse und den Kurven.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Das experimentelle Studium eines physikalischen Vorgangs führt auf folgenden Zusammenhang:

$$f(x) = a\,\frac{(x-6)\,(x-b)}{(x-4)}$$

Weiter ist bekannt, dass $g(x) = x - 5$ eine Asymptote sein muss.

Bestimmen Sie $a, \ b$ und diskutieren Sie $f(x)$. (Symmetrie, $y$–Achsenabschnitt, Nullstellen, Minima und Maxima, Wendekunkte, Pole, Graph.)

**Aufgabe 7 (12 Punkte)**

Der Punkt $P_1(3/6/2)$ liegt auf der Kugel $K_1$. Zentrum von $K_1$ ist der Origo. Konzentrisch um $K_1$ ist eine zweite Kugel $K_2$ vorhanden mit doppeltem Radius. $K_2$ ist innen verspiegelt. Von $P_1$ aus wird tangential zu $K_1$ ein Laserstrahl mit $x = const.$ ausgesendet, der in $P_2$ auf $K_2$ trifft und dann nach $P_3$ auf $K_1$ geworfen wird (falls ein Schnittpunkt vorhanden ist). $P_2$ soll so sein, dass die $y$–Koordinate minimal ist.
Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Spiegelebene in $P_2$ sowie dei Koordinaten der Punkte $P_2$ und $P_3$.
*Hinweis: Für einen Spiegel gilt das Reflexionsgesetz, d.h. Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.*

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL)

## Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1992

**Klasse E2D**

*Viel Glück !*

**A. Kürzere Aufgaben**

**Aufgabe 1** (a) **(6 Punkte)**

Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge $a$ rotiert um die Höhe über der Basis. Bei welchem Basiswinkel ist das Volumen des entstehenden Kegels maximal?

(b) **(6 Punkte)**

Beweisen Sie die folgende Identität:

$$1 + \cos(\frac{2\,\pi}{n}) + \cos(\frac{4\,\pi}{n}) + \ldots + \cos(\frac{2\,(n-1)\,\pi}{n}) = 0$$

*Hinweis: Gehen Sie mit der Darstellung* $z = e^{i\,\eta}$ *mit* $\eta = \dfrac{2\,\pi}{2}$ *in die Summenformel für die endliche geometrische Reihe.*

**A. Längere Aufgaben**

**Aufgabe 2** **(6 Punkte)**

Lösen Sie allgemein die Differentialgleichung: $x\,y' + 3\,y = x^2$.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Es ist bekannt, dass ein gegebenes physikalisches System im Idealfall durch die folgende Differentialgleichung beschrieben wird:

$$(I) \qquad y'' + y = \delta(t)$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$.

Das System ist für $t > 0$ frei von äusseren Einwirkungen.
Im Labor aber stellt man fest, dass keineswegs der Idealfall vorliegt. Um die vorhandene Dämpfung zu beschreiben, führt man noch das Glied $k \cdot y'$ ein mit $0 \leq k \leq 0.1$. Das führt zur Differentialgleichung:

$$(II) \qquad y'' + k \cdot y' + y = \delta(t)$$

(a) Lösen Sie die beiden Differentialgleichungen.

(b) Beurteilen Sie, ob $k$ im angegebenen Bereich zu sinnvollen Resultaten führt.

(c) Vergleichen Sie die Lösungen für $t = 2\,\pi$, wobei $y$ für $k = 0.1$ zu rechnen ist.

(d) Was ist bei $k < 0$ zu bemerken?

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Diskutieren Sie die Fälle, in denen die folgende Gleichung keine eindeutige Lösung hat und geben Sie in diesen Fällen die Lösungsmenge an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ t & -4 & 2 \\ -1 & t & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Flächen $\Phi_1 :\; x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ und $\Phi_2 :\; x^2 + y^2 - z - 3 = 0$. (Dabei sei $I = \{x \mid y(x) \geq 0\}$.)
Die Schnittkurve(n) dieser Fläche(n) schneitet (schneiden) die erstprojizierende Gerade durch $P_1(2/-1/0)$ im (in den) Schnittpunkt(en) $P$ ($P_k$).

(a) Bestimmen Sie die Schnittkurve(n) von $\Phi_1$ und $\Phi_2$.

(b) Bestimmen Sie den Winkel $\gamma$ (*Rad*) zwischen $\Phi_1$ und $\Phi_2$ in $P$ ($P_k$).

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Das experimentelle Studium eines physikalischen Vorgangs führt auf folgenden Zusammenhang zwischen $x$ und $y$:

$$f(x) = a\,\frac{(x-6)\,(x-b)}{(x-4)} + \frac{1}{(a\,x^2 + b)}$$

Weiter ist bekannt, dass durch $g(x) = x - 5$ eine Asymptote gegeben ist.

Bestimmen Sie $a$, $b$ und diskutieren Sie $f(x)$. (Symmetrie, $y$–Achsenabschnitt, Nullstellen, Minima und Maxima, Wendekunkte, Pole, Graph.) Numerische Werte genügen.

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Der Punkt $P_1(3/6/-2)$ liegt auf der Kugel $K_1$. Zentrum von $K_1$ ist der Origo. Konzentrisch um $K_1$ ist eine zweite Kugel $K_2$ vorhanden mit doppeltem Radius. $K_2$ ist innen verspiegelt.
Von $P_1$ aus wird tangential zu $K_1$ ein Laserstrahl mit $x = const.$ ausgesendet, der in $P_2$ auf $K_2$ trifft und dann nach $P_3$ auf $K_1$ geworfen wird (falls ein Schnittpunkt vorhanden

ist). $P_2$ soll so sein, dass die $y$–Koordinate minimal ist.
Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Spiegelebene in $P_2$ sowie dei Koordinaten der Punkte $P_2$ und $P_3$.

**Aufgabe 8** **(12 Punkte)**

Für welchen Wert des Parameters $a$ besitzt das folgende Vektorfeld ein Potential?

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y(a\,e^{a\,x}\ln(x) + \frac{e^x}{x}) + x\,e^{x^2} \\ e^x \ln(x) + \cos(y) \\ 12.248 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Potential, falls es existiert.

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 4. Oktober 1993

## 2.9 Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1993

**Klasse E1D**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1 Extremwertaufgaben:** **(Je 6 Punkte, total 12 Punkte)**

(a) Welcher Punkt des Graphen der Funktion $f(x) = y^2 + 1$ liegt am nächsten beim Punkt $(3, 1)$? *(Exakter Wert und Begründung!)*

(b) Bei der Planung eines Hauses mit einem quadratischen Grundriss der Seitenlänge $a$ sollen heutzutage auch ökologische Aspekte mitberücksichtigt werden. Man will das Dach so bauen, dass bei gefordertem Volumeninhalt die Wärmeabstrahlung (und somit die Oberfläche) minimal ist. Da der Bauherr einen Estrich mit mindestens $72\,m^3$ Inhalt wünscht, kommt nur ein Dach in Form ähnlich einer ägyptische Pyramide (quadratischer Grundriss) in Frage. Wie gross muss man somit die Seitenlänge $a$ des Hauses mindestens planen?

**Aufgabe 2 Einfache Integration:** **(12 Punkte)**

Es gilt:

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$$

(a) Berechne exakt den Flächeninhalt zwischen der *x-Achse*, der *y-Achse* und dem ersten Abschnitt des Graphen der Funktion $f$ im ersten Quadranten.

(b) Quadriere $f$ und berechne den beschriebenen entsprechenden Flächeninhalt abermals exakt.

(c) Was ist das Verhältnis der beiden Flächeninhalte exakt? Entscheide damit die Frage, ob es eine Formel zur Berechnung des Integrals über $(f(x))^2$ mit Hilfe des Integrals über $f(x)$ geben kann, in der nur algebraische Operationen vorkommen.

**Aufgabe 3 Gleichungssysteme:** **(12 Punkte)**

Gegeben ist folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} p\,x - 2\,y - 2\,z &= 2 \\ x - y + z &= 6 \\ 2\,x + y - 2\,z &= -3 \end{aligned}$$

(a) Es ist bekannt, dass für $z = 3$ eine Lösung existiert. Berechne $p$.

(b) Berechne anschliessend $x$ und $y$.

(c) Für welches $p$ hat das System keine Lösung?

**Aufgabe 4 Rechnen mit komplexen Zahlen:** **(12 Punkte)**

Gegeben sei die komplexe Zahl $a \in \mathbf{C}$ mit Realanteil $\Re(a) > 0$.

(a) Skizziere jeweils falls möglich in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ diejenigen Punkte (resp. denjenigen Punkt) $z \in \mathbf{C}$, für die (resp. für den) gilt:

$$\frac{a - z}{\bar{a} + z} = 1$$

(b) Betrachte die Zahlenfolge

$$z_n = (1 + \frac{i}{\sqrt{1}})\,(1 + \frac{i}{\sqrt{2}})\,...\,(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

i. Berechne für jedes $n \in \mathbf{N}$ den Abstand zwischen $z_n$ und $z_{n+1}$ in $\mathbf{C}$

ii. Bestimme folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_n| - |z_{n-1}|}{Arg\,(z_n) - Arg\,(z_{n-1})}$$

(*Hinweis:* Bernoulli, binomische Formel.)

**Aufgabe 5 Matrizen und Eigenwerte:** **(12 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix $A$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte von $A$.

(b) Berechne $D$, $U$ und $U^{-1}$ derart dass gilt: $U^{-1}\,A\,U = D$ ($D$ Diagonalmatrix).

(c) Berechne $A^{48}$.

**Aufgabe 6 Kurzaufgaben:** **(Je 3 Punkte, total 12 Punkte)**

(a) Die urchigen Burschen Humbert, Edelbert, Bernhard, Hartmut und Hansdolf haben dieses Jahr auf der Alp 1999 Käse gefertigt. Da man 1999 nicht durch fünf teilen kann, entsteht Streit. Da kommt gerade der „böse" Adolf vorbei, der letzthin am gesamtälpischen Schwingerfäscht Schwingerkönig geworden ist. Humbert der Schreckliche, der bei Adolf dem Bösen noch eine Rechnung offen hat, bekommt Angst und verschwindet unbemerkt. Adolf (der glaubt, dass er das Herz noch auf dem rechten Flecken habe) greift ein. Er packt die vier verbliebenen Streithähne hart und zwingt sie zur Einwilligung in folgendes Programm: Damit keiner leer ausgeht, bekommt jeder der vier zuerst einen Käse. Um den Rest soll sportlich gekämpft werden, pro Käse ein Wettkampf mit allen der vier unter sich. Bleibt etwas übrig, weil die urchigen nicht mehr kämpfen können (weil sie keine Kraft mehr haben) so gehört es Adolf. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die leider ununterscheidbaren Käse zu verteilen, falls es den urchigen Burschen gelingen sollte, immer alle Wettkämpfe auszutragen, sodass nichts übrigbleibt für Adolf?

(b) Stelle eine Formel auf für die maximale Anzahl der Schnittpunkte von $n$ Kreisen und beweise diese Formel mathematisch korrekt.

(c) Berechne:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+c}$$

(d) Berechne:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{c}{x})^{x}$$

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 4. Oktober 1993

## 2.10 Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1993

**Klasse E2D**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1 Komplexe Zahlen: (12 Punkte)**

Gegeben ist die Abbildung der Gaussschen Ebenen $f:\ \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \frac{3+z}{1-z}$$

(a) Bestimme die Fixpunkte.

(b) Berechne $f(f(f(z)))$ und versuche damit auf $f^{-1}$ zu schliessen.

(c) Was ist das Bild der imaginären Achse?

**Aufgabe 2 Extremwertaufgabe: (12 Punkte)**

Finde den Ort und den Wert des Minimums der Funktion

$$f(x, y) = x^2 - 3\,x\,y + y^2.$$

Der Definitionsbereich von $f$ ist die Menge der Punkte $(x, y)$, für die gilt: $x^2 + y^2 \leq 3$.
*Hinweis:* Passendes Koordinatensystem verwenden.

**Aufgabe 3 Laplace–Transformationen: (12 Punkte)**

Berechne die Funktion $y(t)$, die folgendes Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{aligned} y\,' &= y = 2\,z \\ z\,' &= 2\,y + z + f(t) \end{aligned}$$

Dabei sind die folgenden Anfangsbedingungen gegeben: $y(0) = 0,\ \ z(0) = 0$.

Weiter ist $f$ wie folgt bestimmt:

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

**Aufgabe 4 Integrationsprobleme: (12 Punkte)**

Zu untersuchen ist das folgende Integral über das Gebiet $S$:

$$\int\int_S x^2\, dx\, dy$$

Dabei ist $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. $S_1$ ist das Dreieck begrenzt durch den Ursprung, den Punkt $A = (2, 1)$ und den Punkt $(0, 1)$ auf der $y$–Achse. $S_3$ erhält man aus $S_1$ durch Spiegelung am Ursprung. Spiegelt man das durch die Achsen und $A$ gebildete Rechteck $R_1$ an der $y$–Achse, so erhält man das Rechteck $R_2$. $S_2$ ist bezüglich $R_2$ das Komplement des Spiegelbildes von $S_1$ an die $y$–Achse. $S_3$ ist das Spiegelbild von $S_2$ an den Ursprung. $S$ ist somit eine „ziemlich symmetrische" Figur („Windrad").

(a) Berechne das Integral über $S$.

(b) $S^*$ erhält man aus $S$ durch zentrische Streckung um einen unbekannten Faktor $k$. Bestimme $k$ so, dass das Integral über $S^*$ den Wert 27 annimmt.

**Aufgabe 5 Vektoranalysis: (12 Punkte)**

Sei $A$ eine reelle Matrix und $\vec{r}$ ein Vektor mit den folgenden Koeffizienten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Das Vektorfeld $\vec{v}$ erhält man auf $\mathbb{R}^3$ durch $\vec{v} = A \cdot \vec{r}$.

(a) Berechne $div\, \vec{v}$ und $rot\, \vec{v}$.

(b) Untersuche,unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten von $A$ das Vektorfeld $\vec{v}$ konservativ ist. Von welchem Typ muss dann $A$ sein?

(c) Bestimme dann das Potential von $\vec{v}$ (Potentialfunktion $\varphi(x, y, z)$ mit $\varphi(0, 0, 0) = 0$).

(d) Bestimme alsdann die Arbeit (Wegintegral) im Feld $\vec{v}$ längs irgendeines Weges von $B(1, 2, 3)$ nach $C(3, 5, 1$, wenn $A$ wie folgt gegeben ist:

$$A = M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Bestimme für $M$ den Fluss des Feldes durch die Einheitskugel um den Ursprung.

**Aufgabe 6 Fourieranalysis: (12 Punkte)**

Sei die $2\,\pi$–periodische Funktion $f(x)$ gegeben durch $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\,\pi)$.

(a) Bestimme die Fourierreihe von $f$. (Rechnung!)

(b) Berechne damit die folgenden Reihen:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

*Hinweis:* Dirichletsche Bedingung für die Konvergenz ... An den Sprungstellen Konvergenz gegen das arithmetische Mittel ... Parceval ...

(c) Durch $f$ wird nun eine Spannung beschrieben, die im Labor mittels Überlagerung von Sinus– und Cosinusfunktionen erzeugt werden soll. Man verwendet dazu einfach die ersten hundert Glieder der jeweiligen Summen in der Fourierentwicklung von $f$ und bricht dann ab. Wie verhält sich voraussichtlich die so konstruierte Spannung an den Sprungstellen von $f$ ?
*(Stichwortartige Begründung.)*

(d) Skizziere und beschreibe die einfachste stetige Funktion, die als Fourierreihe eine reine Sinusreihe hat, $8\,\pi$–periodisch ist und auf dem Intervall $(0, 2\,\pi)$ durch $f(x) = x^2$ gegeben ist. Begründe die Wahl.

*Man bedenke diesen Moment: Hier endet für Dich die letzte Mathematik–Prüfung an der ISB in dieser Klasse — oder vielleicht überhaupt im Leben... Alles Gute für den weiteren Weg und viel Kraft im Streben nach jenen gewählten Zielen, die Zufriedenheit bringen!*

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 10. Oktober 1994

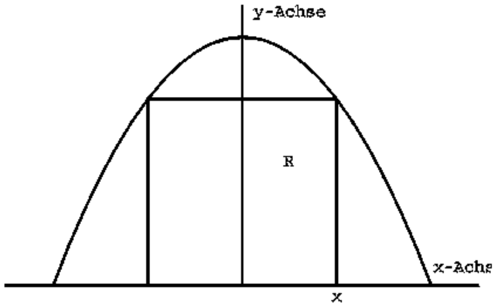
## 2.11 Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1994

**Klasse E1D**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1 Analysis (Extremwerte, Inhalte): (12 Punkte)**

Der durch $y = -x^4 + a$ $(a > 0)$ und die $x - Achse$ gegebenen Kurve wird gemäss Figur unten ein Rechteck $R$ eingeschrieben.

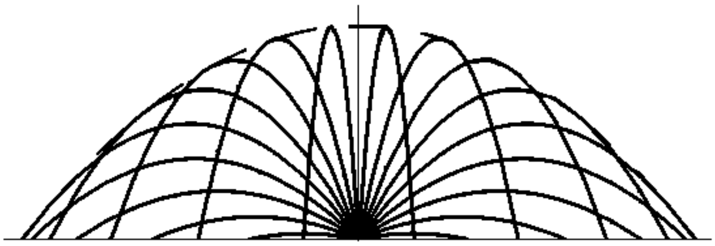



(a) Berechnen Sie exakt[1] die Seitenlängen und den Inhalt des eingeschriebenen Rechtecks $R$ mit *maximalem* Flächeninhalt.

(b) Wie hängt das Verhältnis der Inhalte der Fläche zwischen Kurve und $x - Achse$ und des Rechtecks von $a$ ab?

(c) Für welches $a$ ist das Rechteck ein Quadrat?

**Aufgabe 2 Analysis (Kurven): (12 Punkte)**



[1] Z.B. $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$ statt 1.414 .

Ein Wohnzimmerspringbrunnen besteht aus einer grossen Zahl kleiner Wasserstrahlen. In einer vertikalen Schnittebene ($(x, y)$-Ebene) beobachtet man von einem Zentrum ausgehende Strahlen (vgl. Figur oben) unter verschiedenen Neigungswinkeln $\alpha$ . Alle austretenden Wassertropfen haben dieselbe Startgeschwindigkeit $v_0$. Die vom Parameter $\alpha$ abhängigen Kurven $\vec{r}(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ sind unter Vernachlässigung der Lufteinflüsse gegeben durch

$$x(t) = v_0\, t\, \cos(\alpha) \tag{2.1}$$

$$y(t) = v_0\, t\, \sin(\alpha) - \frac{1}{2}\, g\, t^2\,. \tag{2.2}$$

Es sei $v_0 = 1\,\frac{m}{sec}$ und $g = 10\,\frac{m}{sec^2}$.

(a) Schreiben Sie bei gegebenem Parameter $\alpha$ die Einzelkurven in der Form $y = f(x)$.

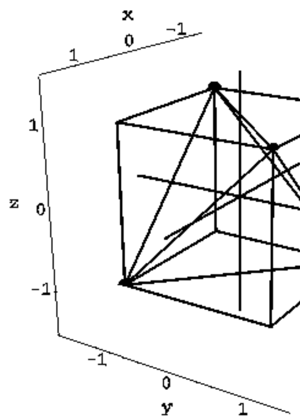
(b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Maximums $(x_m, y_m)$ einer Einzelkurve in Abhängigkeit vom Winkel $\alpha$.

(c) Sei $C$ die Kurve, die bestimmt wird durch die Menge der Punkte maximaler Höhe, die von den Wassertropfen erreicht wird. Zeigen Sie, dass $C$ eine Ellipse bildet. Geben Sie die grosse und die kleine Halbachse.

**Aufgabe 3 Die beiden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig:**

**(12 Punkte)**

(a)




Durch eine Orthonormalbasis $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ (ONB) und einen Ursprung $O$ sei ein Koordinatensystem gegeben. Ein achsenparallel liegender Würfel mit Zentrum im Ursprung $O$ des Koordinatensystems ist bestimmt durch den Eckpunkt $E_4 = (1/1/1)$ (vgl. Figur oben). Dem Würfel ist gemäss Figur ein Tetraeder mit den Ecken $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$ eingeschrieben. Durch eine lineare Abbildung $\mathcal{A}$ des Raumes in sich wird $E_1$ in $E_2$, $E_2$ in $E_3$ und $E_3$ in $E_1$ übergeführt. $E_4$ bleibt fix. $A$ sei die Matrix, welche $\mathcal{A}$ bezüglich der ONB $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ beschreibt. $A'$ sei die Matrix, welche $\mathcal{A}$ bezüglich einer ONB $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$, $\vec{e_3}'$ beschreibt, deren erster Basisvektor vom Ursprung nach $E_4$ zeigt.

i. Bestimmen Sie $A$, $A'$ und $(A')^3$.

ii. Bestimmen Sie $A^{-1}$ sowie $A^2$. Geben Sie zum Vergleich der beiden Matrizen eine geometrische Erklärung ab.

iii. Bestimmen Sie zu A alle reellen Eigenwerte sowie einen Eigenvektor. Erklären Sie das Resultat geometrisch.

(b) Die Spur einer (n x n)-Matrix $M = (m_{ij})$ ist definiert durch die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente: $Sp(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ .
Beweisen Sie, dass für beliebige (n x n)-Matrizen $U$ und $V$ gilt: $Sp(UV) = Sp(VU)$.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Damit bildet man die (3 x 3)-Matrix $M = \vec{a} \cdot \vec{b}^t$.

(a) Zeigen Sie, dass $M$ höchstens den Rang 1 besitzt.

(b) Beweisen Sie: $det(E + \vec{a} \cdot \vec{b}^t) = 1 + \vec{a}^t \cdot \vec{b}$.

(c) Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ speziell gewählt. Berechnen Sie $\alpha$ so, dass die Matrix $H = (E + \vec{a} \cdot \vec{b}^t)$ nicht regulär ist. Lösen Sie in diesem Fall die Gleichungssysteme

i. $$H \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii. $$H \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Es sei

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 t}}, \qquad \text{wobei } m \text{ ein Parameter} \in [0, 1) \text{ ist.}$$

(a) Geben Sie die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 t}}$ in $z := m^2 \sin^2 t$ an.

(b) Benützen Sie die Rekursionsformel

$$\int_a^b sin^n t\, dt = -\frac{\sin^{n-1} t \cos t}{n}\Big|_a^b + \frac{n-1}{n} \int_a^b sin^{n-2} t\, dt\,, \qquad n \in \mathbf{N},$$

um aus $\frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 t}}$ eine Potenzreihe für $K(m)$ zu erhalten. (Es genügt, die ersten 5 Terme anzugeben.)

(c) Beweise die Rekursionsformel in 5b.

**Aufgabe 6 Unabhängige Teilaufgaben** **(12 Punkte)**

(a) i. Lösen Sie die Gleichung $x^6 = 1$ in $\mathbf{C}$ *(Skizze!)* und geben Sie die Zerlegung in Linearfaktoren von $p(x) = x^6 - 1$.

ii. Zerlegen Sie $p(x)$ in möglichst viele Faktoren mit reellen Koeffizienten.

iii. Berechnen Sie den Koeffizienten des Nenners $(x-1)$ in der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x^6-1}$.

(b) i. Berechnen Sie

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}\,.$$

*Hinweis:* $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x \tan x}$.

ii. Berechnen Sie daraus

$$\int \frac{dx}{\sin x}\,.$$

.

iii. Berechnen Sie

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) dx\,.$$

.

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 10. Oktober 1994

## 2.12 Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1994

**Klasse E2D**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1 Differentialgleichungen:** **(12 Punkte)**

Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilaufgaben.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x^2\,y'' - (a+b-1)\,x\,y' + a\,b\,y = 0 \quad \text{in} \quad (0,\infty) \quad \text{mit} \quad a,b \in \mathbf{R}.$$

*Hinweis:* Versuchen Sie den Ansatz $y = x^r$.

(b) $y$ sei eine Lösung der Differentialgleichung $y' = (\frac{1}{2x} - \lambda)\,y$ zu einem bestimmten $\lambda$–Wert. Über diese Lösung weiss man, dass sie durch den Punkt $(x,y) = (1,1)$ geht und an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum besitzt.

i. Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen $\lambda$ zur besagten Lösung.

ii. Bestimmen Sie $y_0(x)$ für $x > 0$.

iii. Skizzieren Sie $y_0(x)$ und beurteilen Sie das Verhalten für grosse $x$ analytisch (Asymptote).

**Aufgabe 2 Differentialgleichungen, Laplace-Transformationen:** **(12 Punkte)**

Ein Elektron mit der Masse $m$ und der Ladung $e$ bewegt sich auf einer ebenen Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ unter dem Einfluss des elektrischen Feldes $\vec{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und des magnetischen Feldes $\vec{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_3 \end{pmatrix}$. Es sei $E_2, H_3 > 0$. Die Bewegung des Elektrons wird wie folgt beschrieben:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} - e\,H_3\,\frac{dy}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} + e\,H_3\,\frac{dx}{dt} = e\,E_2 \tag{2.4}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = 0$ und $\frac{dx}{dt}(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung für $\frac{eH_3}{m} = 1$ und $\frac{E}{H} = 2$. (Laplace–Transformation.)

(b) Wie verhält sich die Lösung für grosse $t$?

(c) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\vec{x}(t)$? (Skizze!)

**Aufgabe 3 Fourierreihen:** **(12 Punkte)**

Sei

$$f_1(t) = t, \qquad t \in I = [-\pi, \pi) \tag{2.5}$$
$$f_1(t) = f(t + 2\pi) \qquad \forall_{t\in\mathbf{R}} \tag{2.6}$$

(a) Sie können davon ausgehen, dass die Fourierkoeffizienten $a_k$ und $b_k$ von $f_1(t)$ bekannt sind. Berechnen Sie ohne Formelsammlung die Fourierkoeffizienten $A_k$ und $B_k$ von $f_2(t) = f_1(t)^2$ aus denen von $f_1(t)$.

(b) Wenden Sie auf $f_2$ die Parsevalsche Gleichung an. Damit lässt sich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ berechnen. Führen Sie die Berechnung durch.

(c) Berechnen Sie ohne Formelsammlung die Fourierreihe der $2\pi$–periodischen Funktion $f_3(t) = (\frac{t}{\pi})^3 - \frac{t}{\pi}$, $t \in I$. Welche Zahlenreihe entsteht für $t = \frac{\pi}{2}$?

**Aufgabe 4 Komplexe Abbildungen:** **(12 Punkte)**

Es sei $f(z) = \dfrac{i\,(z-1)}{(z+i)}$. Weiter sei $w = h(z)$ diejenige gebrochene lineare Abbildung, für die gilt: $h(0) = i$, $h(i) = 0$, $h(\infty) = 1$.

(a) Bestimmen Sie $h(z)$.

(b) Bestimmen Sie $h(f(z))$ und die Fixpunkte dieser Abbildung.

(c) Bestimmen Sie die Bilder der reellen und der imaginären Achse für die Abbildung $f(z)$. Skizzieren Sie das Bild des ersten Quadranten.

(d) Welche Geraden werden durch $f(z)$ in Geraden abgebildet?

**Aufgabe 5 Kurven, Vektoranalysis:** **(12 Punkte)**

Eine in der $(x, y)$-Ebene des Raumes liegende Kurve $C$ ist in Polarkoordinaten gegeben durch $r(\varphi) = (1-\cos\varphi)$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$. $D$ sei das von der Kurve $C$ begrenzte Flächenstück.

(a) Skizzieren Sie die Kurve.

(b) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(\varphi)$ und beurteilen Sie, ob die Krümmung überall endlich ist.

(c) Berechnen Sie die Kurvenlänge sowie den Inhalt von $D$ exakt[2].

[2] Z.B. $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$ statt 1.414.

(d) Durch $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ x+y \\ x^2-2\,y \end{pmatrix}$ und $\vec{G}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x+1 \\ x \\ x-2\,y \end{pmatrix}$ sind zwei Vektorfelder gegeben. Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\oint_C \vec{F} \circ d\vec{r} \qquad \text{und} \qquad \oint_C \vec{G} \circ d\vec{r}.$$

(e) $D$ sei die Grundfläche eines geraden Zylinders der Höhe 1. Berechnen Sie den Fluss des Feldes $\vec{G}(x,y)$ durch die gesamte Oberfläche des Körpers.

**Aufgabe 6 Unabhängige Teilaufgaben (mehrfache Integrale, Algebra)**

**(12 Punkte)**

(a) $K$ sei der Einheitskreis (Mittelpunkt im Ursprung). $Q$ sei ein Quadrat mit ebenfalls dem Mittelpunkt im Ursprung und den Eckpunkten auf den Koordinatenachsen. Wie gross muss die Seitenlänge des Quadrates sein, damit die nachfolgende Gleichung stimmt?

$$\iint_K (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_Q (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

(b) Betrachten Sie das von $t$ abhängige lineare Gleichungssystem
$A(t)\cdot\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ und $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t^2 \end{pmatrix}$.

i. Bestimmen Sie $\vec{x}(t)\ \forall_{t\in\mathbf{R}}$.

ii. Zeigen Sie: Die beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Lösung $\vec{x}(t) = c_1\,\vec{u}(t) + c_2\,\vec{v}(t)$ sind linear unabhängig $\forall_{t\in\mathbf{R}}$.

iii. Zeigen Sie:
$\vec{x}(t)$ ist Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = B(t)\cdot\vec{x}$$

mit speziellem $B(t)$. Berechnen Sie $B(t)$.
*Hinweis:* Berechnen Sie $B(t)$ aus $A(t)\cdot\vec{x}(t) = \binom{c_1}{c_2}$ durch Differenzieren nach $t$. (Die Produktenregel gilt auch für Matrizen.)

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 9. Oktober 1995

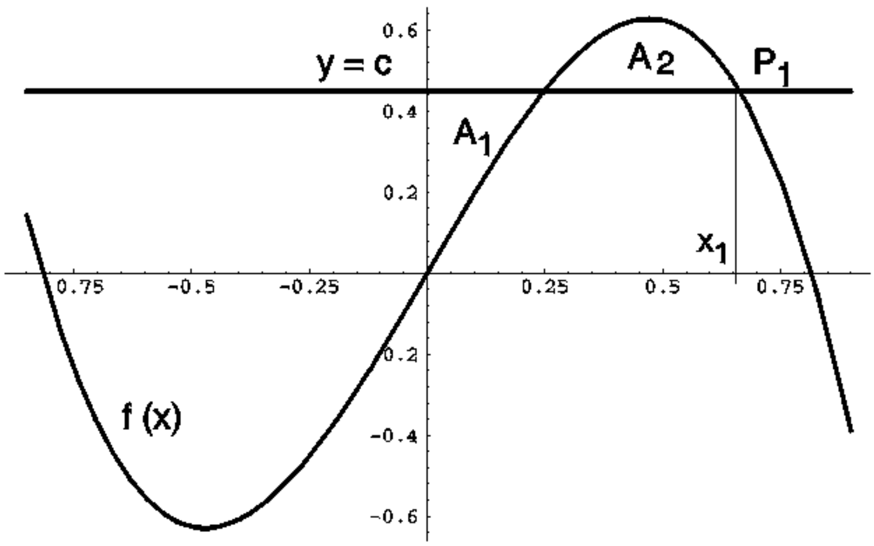
## 2.13 Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1995, Teil 1: Analysis

**Klasse E1D**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Von der zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion $f(x) = y = a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$ ist bekannt, dass $a_1 = 2$ sowie $a_3 = -3$ ist. Durch die Gerade $y = c$ werden zwei Flächen mit den Inhalten $A_1$ und $A_2$ definiert (vgl. Abb. unten). $P_1$ ist der Punkt $(x_1, f(x_1))$.



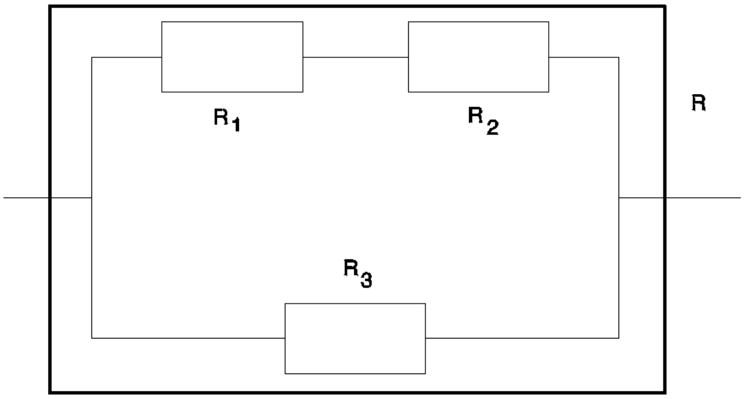

(a) Bestimmen Sie die fehlenden Koeffizienten $a_i$.

(b) Berechnen Sie $c$ *exakt*[3] so, dass $A_1 = A_2$ ist.
*Hinweis: Man integriere* $h(x) = f(x) - c$ *von* $0$ *bis* $x_1$.

[3] Z.B. $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$ statt 1.414 .

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Nach der in der Abbildung unten gezeigten Schaltung wird ein Gesamtwiderstand $R$ mit Hilfe von drei eingekauften Widerständen $R_1, R_2$ und $R_3$ zusammengebaut. $R_1$ und $R_2$ sind in Serie, $R_3$ ist jedoch dazu parallel geschaltet. Der Lieferant garantiert: $R_1 = 10\Omega \pm 0.5\Omega$, $R_2 = 30\Omega \pm 0.5\Omega$, $R_3 = 100\Omega \pm 6\Omega$.
Der Lehrling, der die Schaltung sauber zusammenlöten und ausmessen musste, meldet Ihnen, dass der Gesamtwiderstand um etwa $5\Omega$ vom gerechneten Wert abweiche. Das ist weniger als die Summe der einzelnen Toleranzen.
Berechnen Sie den absoluten Fehler des Gesamtwiderstands und beurteilen Sie, ob die Arbeit des Lehrlings akzeptiert werden kann.




**Aufgabe 3**

**Zur Auswahl stehen zwei unabhängige Teilaufgaben.**
**Es muss nur ein davon gelöst werden!**

**(12 Punkte)**

(a) Gegeben ist

$$z_0 = 0 \tag{2.7}$$
$$z_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (\frac{e^{i\varphi}}{2})^k \tag{2.8}$$

Dabei ist $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

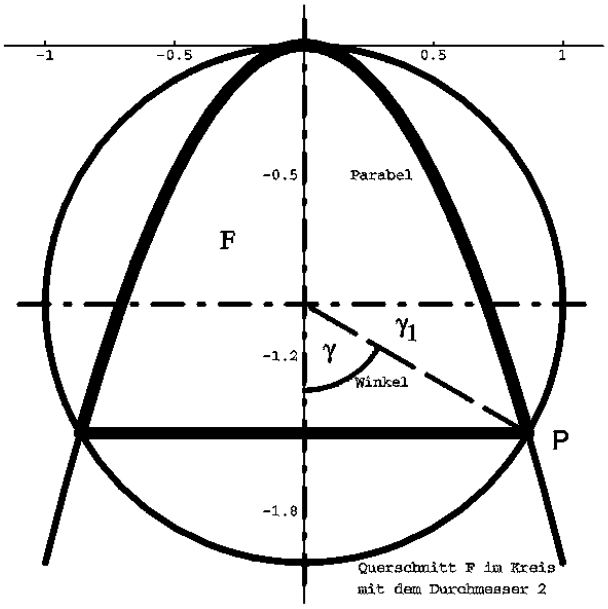
i. Skizzieren Sie die ersten 8 Punkte in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ und verbinden Sie jeweils $z_k$ mit $z_{k+1}$ durch ein Geradenstück. Den so entstehenden Streckenzug von $z_0$ bis $z_n$ nennen wir $s_n$. (Maßstab: $1 Einheit \hat{=} 4\, cm.$)
ii. Berechnen Sie falls möglich den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} z_n$ exakt.
iii. Berechnen Sie die exakte Länge des Streckenzuges $s_\infty$.

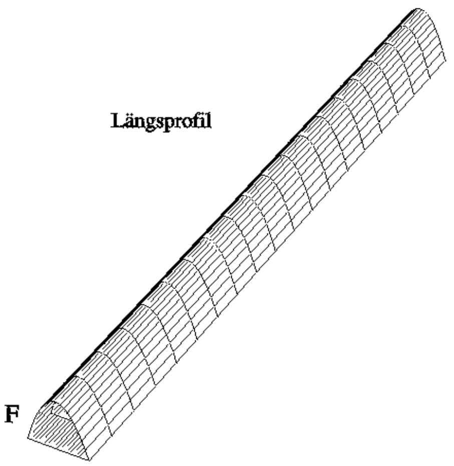
**Alternative:**

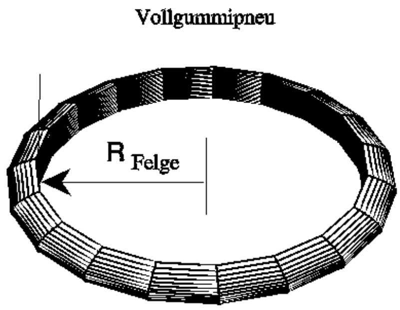
(b) Es wird folgender Sachverhalt vermutet:

$$2\sum_{k=1}^{n} k + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n\,(n+1)^2\,(n+2)$$

Beweisen sie die Formel durch *vollständige Induktion* (oder widerlegen Sie die Formel).



**Aufgabe 4** **(15 Punkte)**

Ein Vollgummipneu mit parabelförmigem Querschnitt $F$ (vgl. Abb. oben) soll durch stirnseitige Verschweissung eines Längsprofils hergestellt werden. Mit der vorhandenen Maschine lassen sich Profile herstellen, deren Querschnitte in einen Kreis von maximal $2\,cm$ Durchmesser passen.

(a) Geben Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die Funktion der Parabel. Dabei ist die Öffnung der Parabel abhängig vom Winkels $\gamma$. ($\gamma$ oder $\gamma_1 = \pi - \gamma$ ist als Parameter zu wählen.)

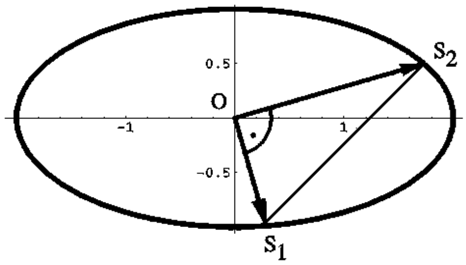
(b) Die Verwendung des fertigen Rades erfordert, dass möglichst viel Gummi vorhanden ist. Bestimmen Sie den Winkel $\gamma$ so, dass der Inhalt der Querschnittsfläche dem Betrage nach *maximal* wird. Berechnen Sie damit den Betrag des Inhalts der Querschnittsfläche $F$.

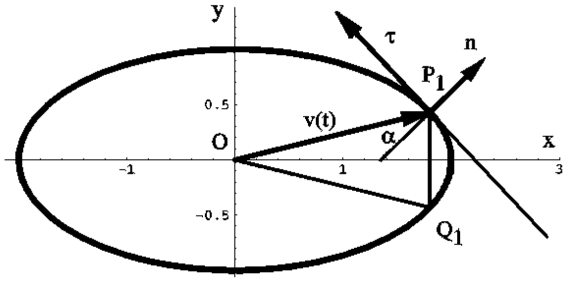
(c) Der fertige Pneu soll auf eine Felge mit dem Durchmesser $d = 20\,cm$ aufgezogen werden. Welches Gummivolumen $V$ ist notwendig für einen Pneu, dessen Form durch Rotation des Parabelbogens entsteht? (Der parabelförmige Querschnitt $F$ rotiert auf dem Felgenradius $R_{Felge}$, vgl. Figur in der Abbildung oben.)

— Ende Teil Analysis —

# — FORTSETZUNG: Teil Algebra —

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**




Durch $\vec{v}(t) = \binom{2cos(t)}{sin(t)}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ ist eine Kurve in Parameterform gegeben. Die Gerade $\overline{OS_1}$ steht senkrecht auf der Geraden $\overline{OS_2}$ (vgl. Abbildung links oben).

(a) Setzen Sie $\vec{OS_1} = \begin{pmatrix} 2cos(t) \\ sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie damit $\vec{OS_2}$ sowie den Flächeninhalt $A(t)$ des Dreiecks $OS_1S_2$.

(b) Ein von $O$ ausgesandter Lichtstrahl wird bei $P_1$ an der Kurve (Tangente $\tau$) nach $Q_1$ gespiegelt. Bei welchem $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ wird der Lichtstrahl von $Q_1$ aus wieder nach $O$ reflektiert? (Falls es ein solches $t$ gibt, genügt ein numerisches Resultat.)

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

(a) Eine Matrix $M$ heisst *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl $n$ gibt, sodass $M^n = N$ ist. ($N$ ist die Nullmatrix.) Sei $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$.

i. Welche Bedingung muss für die Determinante von $M$ gelten, damit $M$ nilpotent sein kann?

ii. Sei $M$ die spezielle Matrix $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ s & 0 & s\lambda \end{pmatrix}$. Können $s$ und $\lambda$ so gewählt werden, dass $M_1^2 = N$ ist? Berechnen Sie $\lambda$ und $s$, sofern das möglich ist.

(b) Seien

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & 0 & -sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\varphi) & 0 & cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

i. Wählen Sie $x$, $y$ und $z$ so, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch $M_3$ in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet wird.

ii. Sei $M_5 = M_4 \cdot (M_2 \cdot M_3)$, $M_3$ wie oben berechnet. Die Matrix $M_5$ bildet die Ebene $\Phi_1 :\ z = 1$ in eine Ebene $\Phi_2$ ab. Bestimmen Sie den Abstand der Bildebene $\Phi_2$ vom Ursprung. ($\lambda$ ist so gewählt, dass die Abbildung möglich ist.)
*(Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, was die geometrische Bedeutung von $M_4$ und von $\varphi$ ist.)*

iii. Die Vektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ (Orthonormalbasis) definieren einen Einheitswürfel. Eine $(3 \times 3)$-Matrix bildet bekanntlich den Einheitswürfel in einen Spat ab. (Der Spat kann auch entartet sein, z.B. wenn alle drei Bildvektoren parallel zu einer Ebene sind.) Berechnen Sie auf kurze Art das Volumen des durch $M_5$ erzeugten Bildes des Einheitswürfels.

— ENDE —

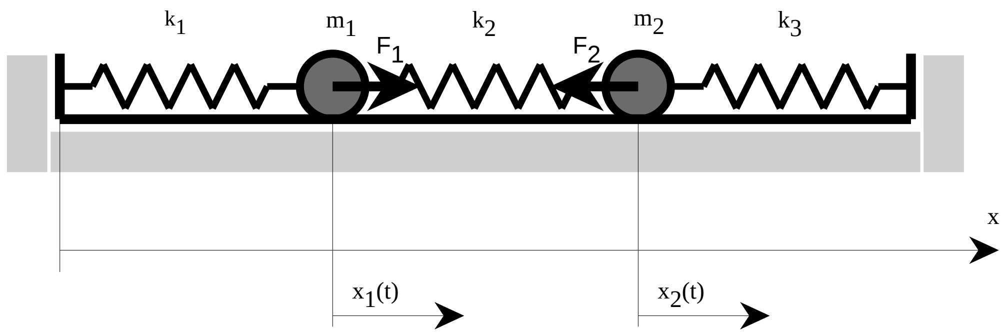
INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 9. Oktober 1995

## 2.14 Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1995

**Klasse E2D**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**




Zwei Kugeln mit den Massen $m_1 = 4$ und $m_2 = 2$ sind an drei Federn mit den Federkonstanten $k_1 = k_2 = 2$ und $k_3 = 1$ gemäss der oben Abbildung gezeigten befestigt. Die Reibung der Kugeln auf der Unterlage soll nicht berücksichtigt werden. Dasselbe gilt für die physikalischen Einheiten.
$x_1(t)$ und $x_2(t)$ seien die Auslenkungen von $m_1$ bzw. $m_2$ aus ihrer Ruhelage. Bis zur Zeit $t = 0$ ist das System in Ruhe (d.h. $x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0$). Für $t > 0$ greift je eine konstante Kraft $\vec{F}_1 = 1$ an $m_1$ resp. $\vec{F}_2 = -1$ an $m_2$ in Richtung der $x$-Achse an.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichungen auf für die Auslenkungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der beiden Kugeln.

(b) Bestimmen Sie die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

**Aufgabe 2** **(15 Punkte)**

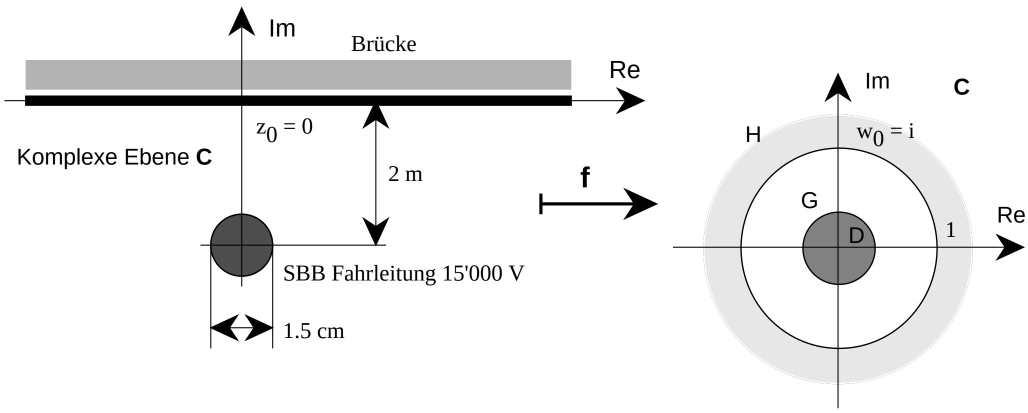
Die Abbildung unten zeigt den Fahrleitungsdraht der SBB unter einer Betonbrücke. Zur Zeit $t_0 = 0$ ist die Spannung im Draht $15\,000\,V$. $200\,cm$ unter der Brücke hängt der Draht mit $1.5\,cm$ Durchmesser. (Zur Vereinfachung: Kreisförmiger Querschnitt.)
Um den *Potentialverlauf* unter der Brücke zur Zeit $t_0$ näherungsweise berechnen zu können nehmen wir an, der Boden sei unendlich weit weg, die Brücke sei unten eben und ihre Länge sowie ihre Breite seien unendlich gross.
Zur Lösung des Problems bilden wir die geometrische Situation in $\mathbf{C}$ durch eine *Möbiustransformation* derart ab, dass der Kreis (Draht) und die Gerade (Brücke) in zwei zentrische Kreise übergehen. Das Bild von $z_0 = 0$ ist $w_0 = i$. Die Einheiten dürfen nun weggelassen werden.

(a) Bekanntlich liefert die Möbiustransformation

$$f(z) = c\,\frac{z + i\,b}{z - i\,b}$$

die gewünschte Abbildung ($b \in \mathbf{R}$). Der Drahtquerschnitt geht dabei in $D$ über, das restliche Gebiet unter der Brücke in $G$, das Gebiet oberhalb in $H$, vgl. Abbbildung. Berechnen Sie $b$ und $c$.
*Hinweis: Im Bildbereich bilden die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ ein symmetrisches Punktepaar bezüglich der beiden zentrischen Kreise. Man suche die Urbildpunkte.*

(b) Die Umgebung des Drahtes ist quellenfrei, d.h. $div\vec{E} = div(grad(\varphi)) = \triangle\varphi = 0$
Schreiben Sie im Bildgebiet (aufgefasst als reelle Ebene $\mathbf{R}^2$) die Potentialgleichung $\triangle\varphi = 0$ in Polarkoordinaten $(r, \alpha)$. Berechnen Sie $\varphi$ in Abhängigkeit vom Radius $r = |f(z)|$.



**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

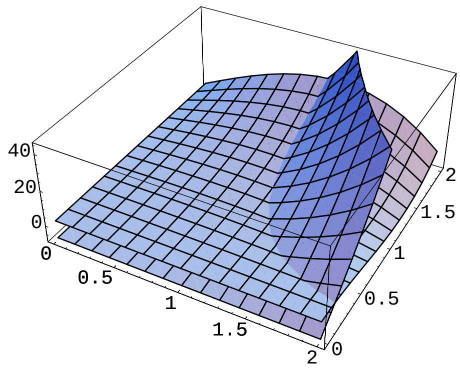
Die Schnittkurve $\gamma$ der beiden Flächen

$$\begin{aligned} z = f(x,y) &= 2\,x^2\,y^3 + 6\,x^3\,y - 8 \\ z = g(x,y) &= 4\,x\,y^3 - 2\,x^3\,y^2 + 2 \end{aligned}$$

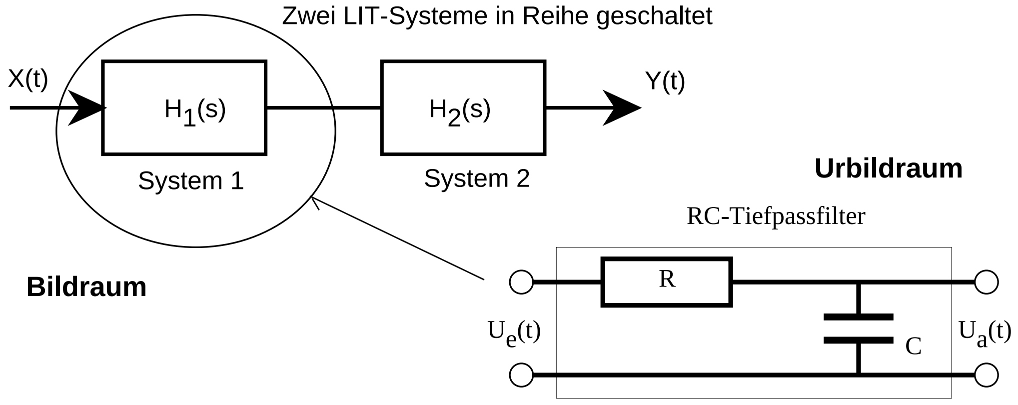
durchstösst die $xy$-Ebene in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0) = (1,1)$. (Vgl. dazu Abb. unten.) Zur Verbesserung dieses Wertes bestimme man

(a) die Tangentialebenen von $z = f(x,y)$ sowie von $z = g(x,y)$ in $(x_0, y_0)$;

(b) den Schnittpunkt $(x_1, y_1)$ der Schnittgeraden der beiden Ebenen mit der Ebene $z = 0$ sowie die Werte $f(x_1, y_1)$ und $g(x_1, y_1)$.
Vergleichen Sie die Differenz $g(x_1, y_1) - f(x_1, y_1)$ mit der Differenz $g(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$ in Dezimalbruchform.



**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**




Ein RC-Tiefpassfilter (vgl. Abbildung oben) wird bekanntlich durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$R\,C\,\dot{U}_a + U_a = U_e.$$

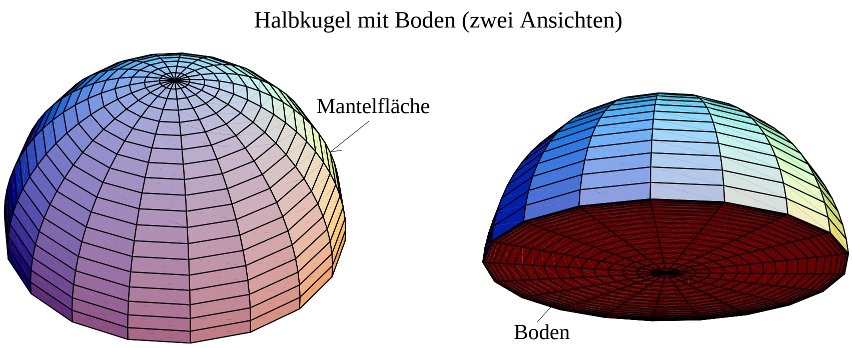
Dabei ist $R = 100\,k\Omega$ und $C = 10\,\mu F$. $U_e$ ist die Eingangsspannung, $U_a$ die Ausgangsspannung des Filters.

(a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion (Bildraum) sowie die Impulsantwort (Urbildraum) dieses Filters. (Man beziehe sich auf die Einheiten $\Omega$, $F$ und $V$. In den Rechnung können die Einheiten dann weggelassen werden.)

(b) Zwei solche identische Filter werden in Serie geschaltet. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems und zeigen Sie damit, dass das System stabil sein muss.

(c) Sei $U_e(t) = 10\,(1 - cos(t))\,V$. Zur Zeit $t = 0$ ist das System in Ruhe. Berechnen Sie und skizzieren Sie die Ausgangsspannung $U_{GS}(t)$ des Gesamtsystems (Serie).

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

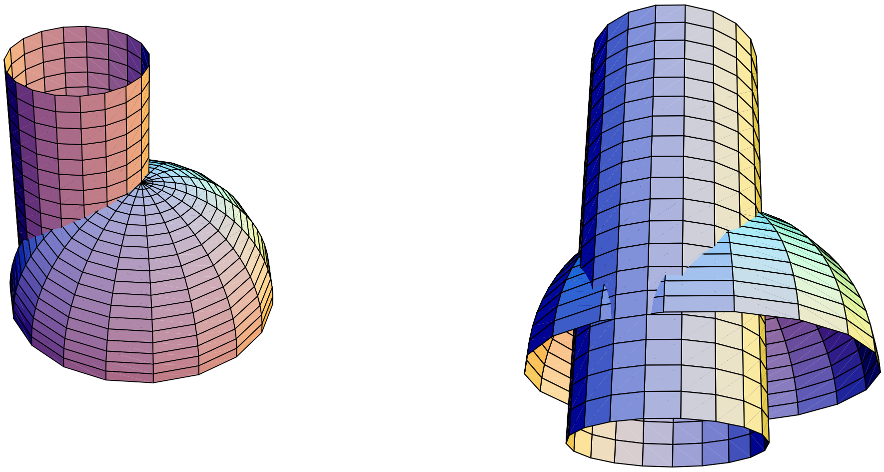



Die Abbildung oben zeigt eine Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $(z \geq 0)$ mit Boden.

(a) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$ durch die gesamte Oberfläche sowie durch die Mantelfläche.

(b) Berechnen Sie den Fluss der Rotation des Vektorfeldes $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} -y^3 \\ yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}$ durch die Mantelfläche sowie durch die Bodenfläche.

**Aufgabe 6** **(15 Punkte)**



Die Halbkugel $(x+1)^2+y^2+z^2=4$, ($z \geq 0$, vgl. Abbildung oben) wird vom Zylinder $x^2+y^2=1$ ($z \in \mathbf{R}$) geschnitten. Wir setzen $x = x(t) = cos(t)$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Parameterdarstellung $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \\ 2\,sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}$ die Schnittkurve beschrieben wird und berechnen Sie die Krümmung $\kappa$ dieser Kurve für $t=\pi$.

(b) Bestimmen Sie für $t=\pi$ den Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}$ und den Hauptnormaleneinheitsvektor $\vec{N}$.
Berechnen Sie damit den Mittelpunkt des Krümmungskreises für $t=\pi$.

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 7. Oktober 1996

## 2.15 Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1996, Teil Algebra

**Klassen E1B, E1D**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilaufgaben, die beide gleich bewertet werden.

(a) Gegeben ist das komplexe Polynom

$$p(z) = i\,z^5 + a\,z^4 - 40\,i\,z^3 - 80\,z^2 + 80\,i\,z + b, \qquad (a,\, b \in \mathbf{R})$$

Von diesem Polynom weiss man, dass die Summe der Nullstellen $-10/i$ beträgt und das Produkt der Nullstellen $-31/i$.
Stellen Sie alle Nullstellen in einer Skizze graphisch dar (Maßstab: 1 $cm$ resp. 2 Häuschen $\hat{=}$ Einheit.) Beantworten Sie damit die Frage, ob dieses Polynom eine reelle Nullstelle hat.
*Hinweise: Setzen Sie* $i\,z = w$, *Hauptsatz der Algebra,* $(w+k)^n = ?$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$.
Für welche $x$, $y$, $z$, $w$ gilt $A \cdot B = B \cdot A$? Wählen Sie bei der Berechnung gegebenenfalls $x$ als Parameter.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Sei $S = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $x$ so, dass $det(S) = 4$ ist. Verwenden Sie in den nachfolgenden Teilaufgaben das erhaltene Resultat.

(b) Stellen Sie $S$ in der Form $S = UDU^{-1}$ dar ($D = Diagonalmatrix$).

(c) Untersuchen Sie, was mit dem Vektor $\vec{b}_n = S^{-1}(S^{-1}(\ldots(S^{-1}\vec{a})\ldots)) = (S^{-1})^n\,\vec{a}$ ($\vec{a} \in \mathbf{R}^3$) passiert, wenn $n$ ($n \in \mathbf{N}$) gegen $\infty$ strebt.

(d) Sei $T$ eine beliebige symmetrische Matrix mit $T = UDU^{-1}$ ($D$ Diagonalmatrix).
$P_n(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\,\lambda + c_0$ sei das charakteristische Polynom von $T$.
Erklären Sie, weshalb die folgende Gleichung gilt:

$$P_n(T) = T^n + c_{n-1}\,T^{n-1} + \ldots + c_1\,T + c_0\,E = N \qquad (N = Nullmatrix)$$

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 7. Oktober 1996

## 2.16 Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1996

**Klasse E2D**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = (2\,(x - y) - 3\,(x - y)^3) \cdot cos(x + y).$$

Der Definitionsbereich ist das Gebiet $D = (-0.4, 0.4) \times (-0.4, 0.4)$.

(a) Suchen Sie einen Punkt im Innern von $D$ (der Rand $\partial D$ gehört nicht zu $D$), in dem die Funktion $f$ ein *Maximum* annimmt.

(b) Berechnen Sie das Volumen zwischen $D$ und dem Graphen von $f$ (2-dim. Fläche).

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(z) = (-2)^z$ mit $z \in \mathbf{C}$ (komplexe Zahlen $\mathbf{C}$).

(a) Klären Sie die Frage, ob $f$ komplex differenzierbar (holomorph) ist.

(b) Skizzieren Sie die Bilder der reellen und der imaginären Achse unter $f$.

(c) Während die Achsen nur einen Schnittpunkt haben (den Ursprung), haben die Bilder der Achsen vermutlich mehrere Schnittpunkte.
Berechnen Sie allenfalls die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Bildkurven der Achsen.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

1929 gelang *E. Hubble* die zweite seiner Entdeckungen, die für die Kosmologie von ungeheurer Tragweite ist: Die Rotverschiebung in den Linien der Spektren ferner Galaxien wächst proportional mit der Entfernung $r$ an. Deutet man diese Rotverschiebung als Dopplereffekt, so gilt für die Fluchtgeschwindigkeit $v$ der Galaxien und den Abstand $r$ die Beziehung: $v = H_0 \cdot r$.[4] ($H_0$ heisst *Hubble-Konstante*. Über sie wird heute stark gestritten.).
Um das Problem eventueller Einflüsse auf $H_0$ zu untersuchen (z.B. Richtungsabhängigkeit, Störungen), machen wir uns den allgemeineren Ansatz $\dot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r})$. Um in diesem Zusammenhang die Variante $\dot{\vec{r}} = H \cdot \vec{r}$ zu studieren ($H =$ Matrix), wollen wir zur Vereinfachung im Zweidimensionalen (euklidscher Fall) das Modell

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a\,x(t) + b\,y(t) \\ \dot{y}(t) &= c\,x(t) + d\,y(t) \end{aligned}$$

mit speziell gewählten Koeffizienten untersuchen. Wir setzen zur Vereinfachung:
$a = d$ und $b = -1$, $c = 1$.

(a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem bei den versuchsweise gewählten Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ mit Hilfe der Laplace-Transformation. Kontrollieren Sie das Resultat durch Einsetzen.

(b) Beschreiben Sie die Bahnkurven der Galaxien mit Hilfe einer Zeichnung bei verschiedenen Parametern a. Welche Werte für $a$ kommen wohl physikalisch nicht in Frage?

(c) Studieren Sie die Position einer Galaxie für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von $a$.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Gegeben seien die Vektorfelder

$$\vec{v}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} (a-b) \\ (b-c) \\ (c-a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} a\,x \\ b\,y \\ c\,z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; \vec{v}_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} a\,x \\ b\,y \\ c\,z \end{pmatrix}.$$

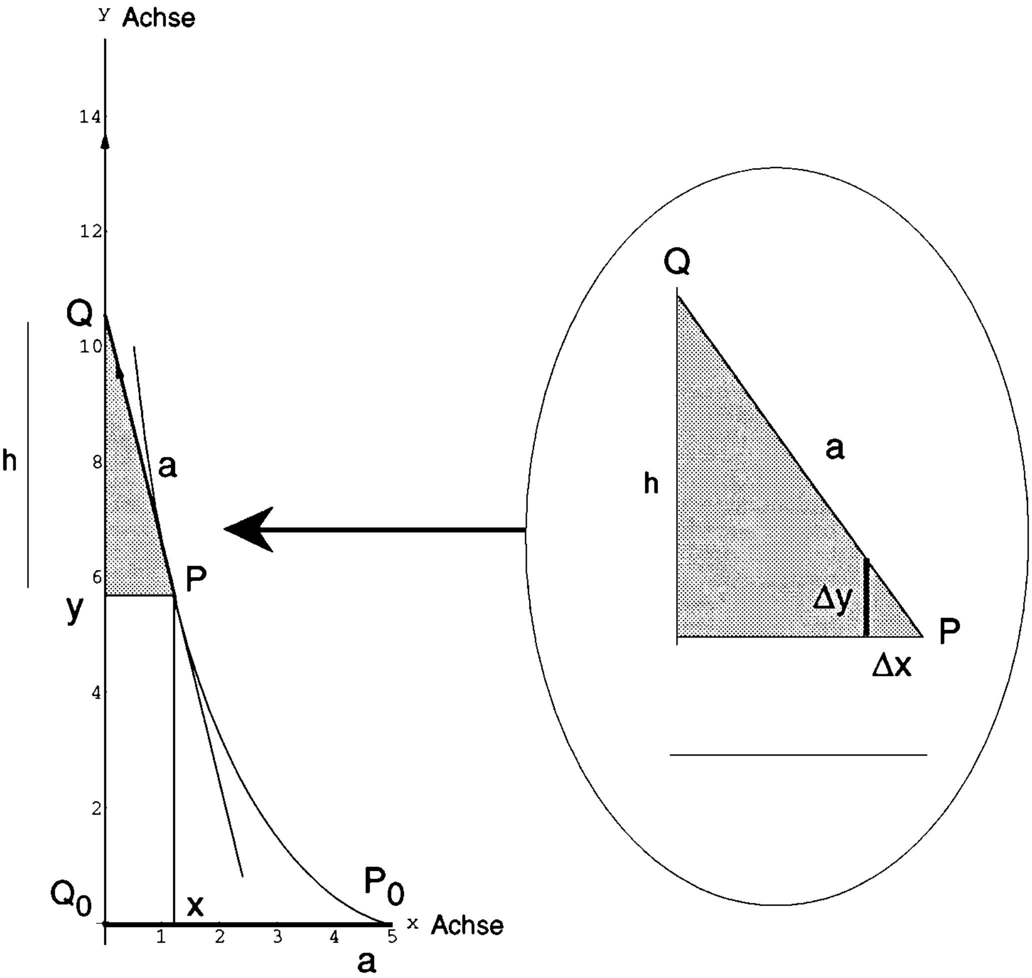
(a) Untersuchen Sie, für welche Parameter $a$, $b$ und $c$ alle drei Felder konservativ sind.

(b) Untersuchen Sie, für welche Parameter $a$, $b$ und $c$ alle drei Felder quellenfrei sind.

(c) Berechnen Sie im konservativen Falle für alle drei Vektorfelder den Fluss durch die Einheitskugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt.

[4] So beschrieben von Unsöld in "Der neue Kosmos".

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**




Ein Traktor, der sich ursprünglich im Punkt $Q_0(0,0)$ befand (vgl. schematische Skizze Abb. oben), fährt in Richtung der positiven y-Achse. Er muss einen Baumstamm der Länge $a$ wegschleppen, der zu Beginn parallel zur x-Achse lag und in $P_0(a,0)$ den Boden berührte. Momentan befindet sich der Traktor in der Position $Q(0, y+h)$. Das Ende des Baumstammes hinterlässt am Boden eine Spur (Schleppkurve). Es befindet sich momentan in der Position $P(x,y)$. Da sich $h$ durch $a$ und $x$ ausdrücken lässt, kann man anhand der oben gezeigten Abbildung ein Modell in Form einer Differentialgleichung gewinnen.

(a) Wählen Sie $a = 5$ und stellen Sie die Differentialgleichung auf.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung.

(c) Berechnen Sie die $y$-Koordinate sowie den Krümmungsradius der Schleppkurve an der Stelle $x = 4$.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Potenzreihe

$$ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \qquad x \in [-1,1)$$

(a) Leiten Sie daraus die Fourierreihe für $ln(2\sin\frac{t}{2})$ her $(0 < t < 2\pi)$ und berechnen Sie damit eine numerische Approximation der Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k} = \frac{\cos 1}{1} + \frac{\cos 2}{2} + \frac{\cos 3}{3} + \ldots$$

*Hinweis: Setze $x = re^{it}$ und betrachte den Realanteil der entstehenden Gleichung. Man benutze die gegebene Tatsache, dass die so gewonnene Beziehung auch auch für $r = 1$ und $0 < t < 2\pi$ erfüllt ist.*

(b) Leiten Sie aus der eben gewonnenen Reihe die Fourierreihe von $ln(2\cos\frac{t}{2})$ her $(-\pi < t < \pi)$.

(c) Berechnen Sie damit die Fourierreihe von $ln(\cot\frac{t}{2})$, $0 < t < \pi$. Gewinnen Sie damit eine numerische Approximation der unendlichen Summe

$$\frac{\cos 1}{1} + \frac{\cos 3}{3} + \frac{\cos 5}{5} + \frac{\cos 7}{7} + \ldots$$

— ENDE —

**7. Oktober** / *octobre* **1996**

## 2.17 Vordiplomprüfung — Examen préalable 1996

**Klasse / classe E2**
**INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) / école d'ingénieurs Bienne (ETS)**

*Viel Glück !* ◇ *Bonne chance!*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte** / *points***)**

(a)

$$f(x) = k\,e^x\sqrt{x} + e^{4k} - k\,x, \qquad \frac{d}{dx}f(x) = ?$$

(b)

$$f(x) = \frac{y}{log(x^2) + y} + x^{(\frac{1}{x})}, \qquad \frac{d}{dx}f(x) = ?$$

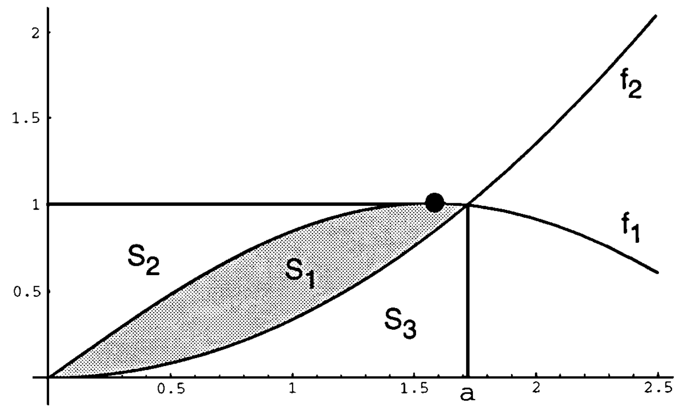
(c)

$$f(x) = x\,\sin(x^2)\,\cos(x^2), \qquad \int f(x)\,dx = ?$$

(d)

$$f(x) = \frac{x^3\,(\cos(x^2) + e^{(x^2)})}{\ln(|x| + 5)}, \qquad \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = ?$$

**Aufgabe 2** **(12 Punkte / *points*)**

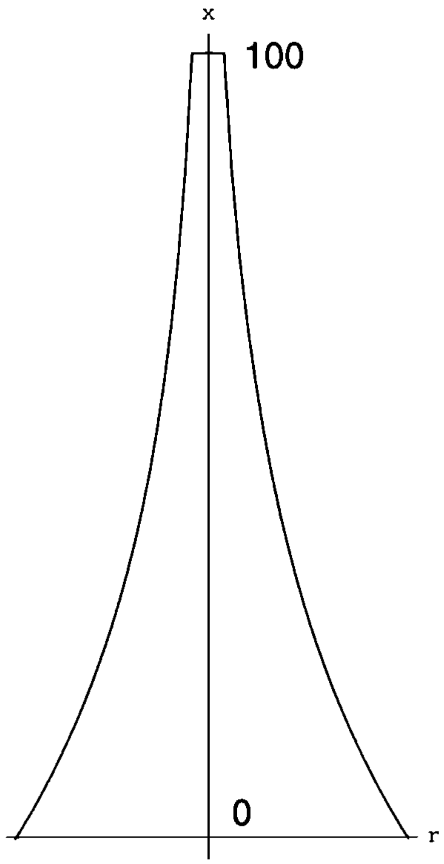



Die Abbbildung oben zeigt $f_1(x) = \sin(x)$ und $f_2(x) = \frac{x^2}{3}$.
*L'image en haut montre* $f_1(x) = \sin(x)$ *et* $f_2(x) = \frac{x^2}{3}$.

(a) Berechnen Sie $a$ (vgl. Skizze) numerisch.
*Calculer* $a$ *(voir esquisse) numériquement.*

(b) Berechnen Sie die Flächeninhalte von $S_1$, $S_2$ (bis $\frac{\pi}{2}$) und $S_3$.
*Calculer la surface de* $S_1$, $S_2$ *(jusqu'à* $\frac{\pi}{2}$*) et* $S_3$.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte** / *points***)**




Die Abbildung oben zeigt einen rotationssymmetrischen Turm. Dabei ist $r(x) = c\, e^{ax}$. Für $x = 0$ ist $r = 2.0$, für $x = 100$ ist $r = 1.2$ (in m).
*L'image en haut montre une tour à symétrie de révolution. Soit $r(x) = c\, e^{ax}$. Pour $x = 0$ on a $r = 2.0$, pour $x = 100$ on a $r = 1.2$ (en m).*

(a) Wie gross ist $r$ bei $x = 2$? ◇ *Calculer $r$ à $x = 2$!*

(b) Berechnen Sie die Funktion $r(x)$ sowie das Volumen des Turms.
*Calculer la fonction $r(x)$ ainsi que le volume de la tour.*

**Aufgabe 4** **(12 Punkte** / *points***)**

Gegeben ist die Funktion — *Soit donnée la fonction* $f(x) = x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x + 2$.

(a) Kontrollieren Sie, ob diese Funktion bei $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$ eine Nullstelle hat.
*Controller si cette fonction a un zéro à* $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$.

(b) Skizzieren Sie die Funktionskurve.
*Dessiner une esquisse de la courbe de cette fonction.*

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Kurve.
*Trouver tous les zéros, les points extrêmes et les points d'infléxion de cette fonction.*

**Aufgabe 5** **(12 Punkte** / *points***)**

Gegeben ist das Gleichungssystem — *Soit donné le système d'équations*:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ r\,x - y - z &= 1 \\ 2\,x + y - 4\,z &= -3\,q \end{aligned} \tag{2.9}$$

(a) Für $z = 3$ und $q = 1$ existiert eine Lösung. Berechne $x, y$ und $r$.
*Pour* $z = 3$ *et* $q = 1$ *il existe une solution. Calculer* $x, y$ *et* $r$.

(b) Sei $q = -2$. Für welche $r$ existieren keine resp. unendlich viele Lösungen?
*Soit* $q = -2$. *Decider pour quels* $r$ *il n'y a pas de solution resp. infiniment de solutions.*

**Aufgabe 6** **(12 Punkte** / *points***)**

Eine Gruppe von Studenten hat die Körpergrösse von Mitstudenten gemessen. Hier sind die Messdaten (in cm):
*Un groupe d'étudiants a mesuré la taille d'un nombre d'étudiants de l'école. Voici les données (en cm)*:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 173 | 178 | 177 | 173 | 184 | 161 | 162 | 169 | 154 | 188 |
| 177 | 177 | 169 | 183 | 185 | 183 | 173 | 192 | 182 | 181 |
| 176 | 177 | 169 | 177 | 173 | 163 | 192 | 165 | 156 | 159 |
| 175 | 173 | 179 | 178 | 177 | 168 | 158 | 183 | 187 | 175 |
| 174 | 173 | 179 | 169 | 179 | 168 | 174 | 194 | 160 | 187 |

(a) Teilen Sie die Daten in Klassen ein mit den Klassenmitten $152, 157, 162, \ldots$ (Klassenbreite 5).
*Classifier les données en classes dont les millieus sont* $152, 157, 162, \ldots$ *(largeur des classes* 5*).*

(b) Berechnen Sie Mittelwert sowie Standardabweichung der Klassen.
*Calculer la valeur moyenne et la déviation standard.*

(c) Stellen Sie die Klassen in einem Balkendiagramm oder Histogramm dar.
*Représenter ces classes à l'aide d'un diagramme de barre ou bien histogramme.*

**Aufgabe 7** **(12 Punkte** / *points*)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:
*Résoudre les équations différentielles suivantes*:

(a)

$$y(x)\,y'(x) - x = 1, \qquad y(1) = 2$$

(b)

$$y\,'(x) = e^{-x}\,y(x)$$

**Aufgabe 8** **(12 Punkte** / *points*)

Gegeben sind die folgenden Matrizen. *Soient données les matrices suivantes*:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_4$ sei die Inverse von $M_3$ — *soit* $M_4$ *l'inverse de* $M_3$,
$M_5 = M_4 \cdot M_2$.
Die Gerade $g$ ist gegeben durch — *la droite* $g$ *soit donnée par*

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \end{pmatrix} \; (t \in \mathbf{R}).$$

(a) Berechnen Sie / *Calculer* $M_4$ und / *et* $M_5$.

(b) Berechnen Sie das Bild $g'$ von $g$ unter $M_5$ / *Calculer l'image* $g'$ *de* $g$ : $\vec{v} = M_5 \cdot \vec{r}$.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von $g'$ mit der Geraden $y = x$.
*Calculer le point d'intersection de* $g'$ *avec la droite* $y = x$.

(d) Bestimmen Sie das Volumen des Spats, der aufgespannt wird durch die Ortsvektoren zu den Punkten $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.
Vergleichen Sie das Resultat mit der Determinante von $M_1$.
*Calculer le volume du parallélépipède étendu par les vecteurs liés aux points suivants:* $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.
*Comparez le résultat avec la valeur de la déterminante de* $M_1$.

— ENDE — ◇ — FIN —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 7. Oktober 1997

## 2.18 Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1997, Teil Algebra

**Klasse E1B**

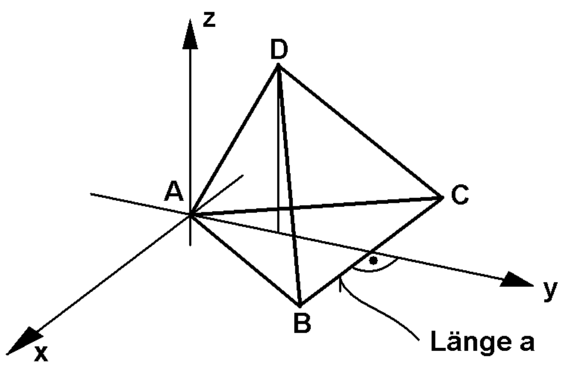
*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Eine Ebene $\Phi$ schneidet die Koordinatenachen bei $x = 1$, $y = 2$ und $z = 3$. Zwischen dieser Ebene und den Koordinatenebenen (Grundebenen), die durch die Koordiantenachsen gegeben sind, ist eine exakt hineinpassende Kugel eingeschlossen, die alle vier genannten Ebenen in je einem Punkt berührt.
Berechnen Sie das Volumen dieser Kugel. (Skizze.)

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Ein nicht reguläres Tetraeder hat 5 gleich lange Seiten je der Länge 1 sowie eine Seite der Länge $a$. Es liegt in einem Koordinatensystem so wie in der Skizze gezeigt:




(a) Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte.

(b) Berechnen Sie den Volumeninhalt des Tetraeders.

(c) Berechnen Sie den kürzesten Abstand der Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Summe $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4\,k^2 - 1}, \ \ n \in \mathbb{N}$

(a) Berechnen Sie exakt einige aufeinanderfolgende Werte $S_n$ und versuchen Sie damit, eine einfache Summenformel zu finden.

(b) Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion.

**Alternative:** **(4 Punkte)**
*Falls es Ihnen nicht gelingt, eine befriedigende Formel für $S_n$ zu finden, so beweisen Sie an Stelle der gefragten Formel die Richtigkeit der nachfolgenden Gleichung:*

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2$$

(c) Untersuchen Sie das Verhalten von $S_n$ für grosse $n$. (Berechnen Sie $Lim_{n \to \infty} S_n$.)

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Beschreiben Sie exakt das Gebiet der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, in dem die Ungleichung $|z| < 2\,|z - i|$ erfüllt ist. Setzen Sie dazu $z = x + i\,y$.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

In der Funktion $z(t) = \dfrac{2}{1 + i\,t}$ sei $t$ eine reelle Variable. Durch $t \longmapsto z(t)$ wird die reelle Achse $\mathbb{R}$ auf eine Kurve in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ abgebildet. Offenbar haben wir hier einen Spezialfall einer Möbiustransformation, eingeschränkt auf die reelle Achse.

(a) Zeichnen Sie in $\mathbb{C}$ die Punkte, die zu $t = 0,\ \ t = \pm 1,\ \ t = \pm 2,\ \ t = \pm\infty$ gehören.

(b) Zeigen Sie, dass die durch $z(t)$ gegebene Kurve ein Kreis in $\mathbb{C}$ ist.

(c) Berechnen Sie alle $t$–Werte, deren Bilder mit dem Nullpunkt zusammen ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Durch eine affine Abbildung $\varphi$ wird ein Dreieck $\triangle ABC$ mit $A(0,0)$, $B(2,0)$ und $C(1,3)$ in das Dreieck $\triangle A'B'C'$ mit $A'(\frac{3}{4}, -\frac{5}{2})$, $B'(\frac{7}{4}, -1)$ und $C'(\frac{7}{2}, \frac{23}{4})$ abgebildet. Bezüglich der Ortsvektoren ist $\varphi$ gegeben durch

$$\varphi : \overrightarrow{OP} \longmapsto \overrightarrow{OP}' = M \cdot \overrightarrow{OP} + \vec{c}$$

Dabei ist $M$ eine symmetrische Matrix.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der gegebenen Dreiecke $M$ und $\vec{c}$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $M$.

(c) Durch $\varphi$ wird der Einheitskreis $K$ um den Ursprung, gegeben durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, auf die Bildfigur $K'$ abgebildet. $K'$ ist eine Ellipse.
Skizzieren Sie die Lage von $K'$ und berechnen Sie die Länge der beiden Halbachsen von $K'$ sowie das Verhältnis der Flächeninhalte von $K'$ und $K$. Was hat dieses Verhältnis mit den Eigenwerten von $M$ sowie mit der Determinante von $M$ zu tun?

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Die durch eine Gleichung wie $16\,x^2 - 8\,x\,y + 10\,y^2 = 72$ definierte algebraische Kurve ist im nicht entarteten Fall ein Kegelschnitt. Bekanntlich kann die darin enthaltene quadratische Form $16\,x^2 - 8\,x\,y + 10\,y^2$ durch $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$ dargestellt werden. Dabei ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = U \cdot D \cdot U^{-1}$ mit $U^{-1} = U^T$ ($U$ unitär).
Durch $P = U^T$ wird $a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2 = (\vec{x}^T \cdot P^T) \cdot D \cdot (P \cdot \vec{x}) = \vec{y}^T \cdot D \cdot \vec{y}$, wobei $\vec{y} = P \cdot \vec{x}$ gesetzt worden ist.

(a) Führen Sie mit Hilfe der Eigenvektoren von $A$ im vorliegenden Falle ein neues Koordinatensystem ein und skizzieren Sie darin die Kurve.

(b) Berechnen Sie den kleinsten positiven Drehwinkel, durch den die erste Achse des alten Koordinatensystems in eine der Achsen des neuen Koordinatensystems gedreht werden kann.

— ENDE —

INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) 6. Oktober 1997

## 2.19 Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1997, Teil Analysis

**Klasse E1B**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Ein Volumen ist begrenzt durch vier Flächen, die durch folgende Gleichung definiert sind:

$$x = 2\,z^2 \quad (2.10)$$
$$x = 4 - z^2 \quad (2.11)$$
$$y = 0 \quad (2.12)$$
$$x + y = 12 \quad (2.13)$$

Berechnen Sie den Volumeninhalt dieses Körpers. (Skizze!)

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = x^{\frac{1}{x}} - y^2$. Durch diese Funktion wird im $\mathbb{R}^3$ eine Fläche definiert.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten des vermuteten Punktes in der $(x, y)$–Ebene, in dem der Funktionswert global gesehen maximal wird.

(b) Durch die Gleichung $f(x, y) = x^{\frac{1}{x}} - y^2 = 0$ wird in der $(x, y)$–Ebene eine Kurve $k$ definiert. Berechnen Sie die Koordinaten derjenigen eventuellen Punkte, in denen $k$ die Gerade $y = x$ schneidet.

(c) Bestimmen Sie allenfalls approximativ Punkte auf $k$, in denen die Krümmung 0 ist.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben seien Polynome $p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^n - 1 + \ldots + a_1\,x + a_0$, für welche gilt:

$$p(2\,x) = p(x)' \cdot p(x)''.$$

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_k$ dieser Polynome.

(b) Aus einem solchen Polynom $p(x)$ wird ein neues Polynom $q(x)$ durch Veränderung des Koeffizienten $a_{n-1}$ gewonnen, sodass die Summe der Nullstellen von $q(x)$ gleich 1 wird. Um welchen Wert ändert sich bei dieser Operation allenfalls der Inhalt der Fläche unter der Kurve zwischen 0 und 1?.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Mit welcher Genauigkeit kann die Brennweite $f$ einer Linse bestimmt werden, wenn ein Objekt, das sich in einer Distanz $g = 37.0 \pm 0.1\,cm$ vor der Linse befindet, ein scharfes Bild erzeugt, das sich im Abstand $b = 56.4 \pm 0.4\,cm$ hinter der Linse befindet?
*Hinweis: Die Linsengleichung lautet* $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

In welchem Punkt $P$ der Ebene $\Phi$, die durch $2\,x + 3\,y + 4\,z = 12$ gegeben ist, wird die Funktion $f(x, y, z) = 4\,x^2 + y^2 + 5\,z^2$ minimal? Berechnen Sie diesen Punkt.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Die Funktion $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ wird über dem Definitionsbereich $D$ betrachtet, $D = \{(x, y) \mid f(x, y) \geq 0\}$.

(a) Berechnen Sie den Inhalt der von $f(x, y)$ erzeugten Fläche über $D_f$. (Allenfalls genügt das exakte Resultat für diesen Oberflächeninhalt.)

(b) Die durch $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) \\ f(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$ gegebene Kurve verläuft auf der durch $f$ erzeugten Fläche.
Berechnen Sie die Krümmung dieser Kurve in dem Punkt, der am höchsten liegt.

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Das Integral $f(x) = \int\limits_0^x \sqrt[3]{1 + t^3}\,dt$ kann für $|t| < 1$ als Potenzreihe in $x$ gewonnen werden, indem man die Binomialreihenentwicklung des Integranden benutzt.

(a) Berechnen Sie damit die Potenzreihe von $\frac{f(x)}{x}$. Berechnen sie weiter den Wert von $\frac{f(x)}{x}$ an der Stelle $x = 0.1$ auf 4 Stellen genau.

(b) Berechnen Sie damit ebenso $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^4}$.

— ENDE —

Deutsche Version **6. Oktober** / *octobre* **1996**

## 2.20 Vordiplomprüfung — Examen préalable 1997

### Klasse / classe B2
### INGENIEURSCHULE BIEL (HTL) / école d'ingénieurs Bienne (ETS)

*Viel Glück ! ◇ Bonne chance!*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

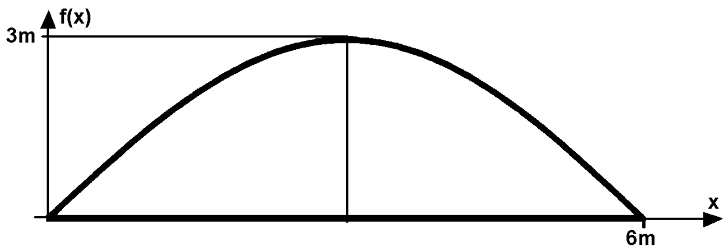
In einem gegebenen Raum sind zwei Drähte gespannt, die wir für die Rechnung näherungsweise durch zwei Geradenstücke beschreiben wollen. Das erste Stück liegt auf der Gerade $g$. Diese ist gegeben durch $\overline{P_1P_2}$ mit $P_1(0,1,1)$ und $P_2(1,0,2)$. Das zweite Stück liegt auf der Geraden $q$, gegeben durch $\overline{Q_1Q_2}$ mit $Q_1(1,1,3)$ und $Q_2(-2,-3,5)$. die folgenden unabhängigen Teilaufgaben sind zu lösen:

(a) Berechnen Sie den kürzesten Abstand zwischen den beiden Geraden.

(b) $P_0$ sei derjenige Punkt der Geraden $g$, der dem Ursprung $O$ am nächsten liegt. Auf $q$ heisst der entsprechende Punkt $Q_0$. Berechnen Sie den Inhalt des Dreiecks $\triangle OP_0Q_0$.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Die Terrasse eines Hauses soll einen sinusförmigen Grundriss bekommen (vgl. Skizze).




Der Aussenrand der Terrasse kann durch die Funktion $f(x) = a\,\sin(k\,x)$ beschrieben werden, wobei die fehlenden Parameter $a$ und $k$ aus der Skizze zu bestimmen sind. (Breite $6\,m$, Tiefe $3\,m$; $m$: Meter, vgl. Skizze. In der Rechnung darf die Masseinheit weggelassen werden.)

(a) Berechnen Sie die $y$–Koordinate des Flächenschwerpunktes $S$ des Grundrisses.

(b) Berechnen Sie den Radius des Krümmungskreises an der Stelle $x$ mit maximalem $y$.

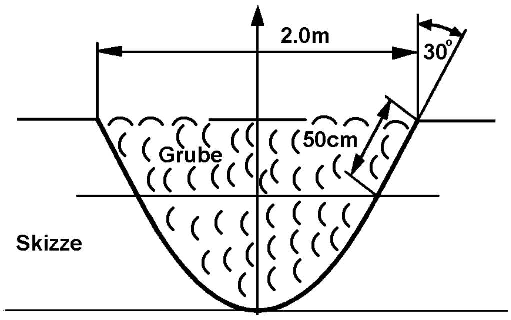
(c) Berechnen Sie näherungsweise die Länge des Terrassengeländers im Grundriss. Beschreiben Sie dabei Ihr Vorgehen bei der Berechnung.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Die Brüder Eleck und Trick wollen sich für das Dachabwasser ihres neuen Elektro–Magazins eine kreisrunde Sickergrube selber bauen. Der Untergrund besteht aus festem Lehm, worin das Wasser nur langsam versickert. Der zur Verfügung stehende Platz erlaubt ihnen einen Grubendurchmesser von $2.0\,m$. Sie gehen davon aus, dass bei einer Hangneigung bis zu $60^o$ gegen die Horizontale keine grossen Auswaschprobleme der Grubenränder zu berürchten sind. Daher beginnen wie mit dem Spaten im Winkel von $30^o$ gegen die Vertikale in die Erde zu stechen. So graben sie ca. $50\,cm$ tief in Spatenrichtung (vgl. Skizze des Grubenquerschnitts). Dann geht ihr Loch ohne Knick in ein Rotationsparaboloid über. (Es ist in Metern zu rechnen. Die Einheiten dürfen weggelassen werden.)

(a) Stellen Sie die Gleichung der Funktionen auf, die den Rand des Grubenquerschnittes beschreiben.

(b) Wieviel Liter Wasser kann die leere Grube aufnehmen? (Berechnen Sie den Voluminhalt der noch leeren Grube mit Hilfe der Integralrechnung.)




**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

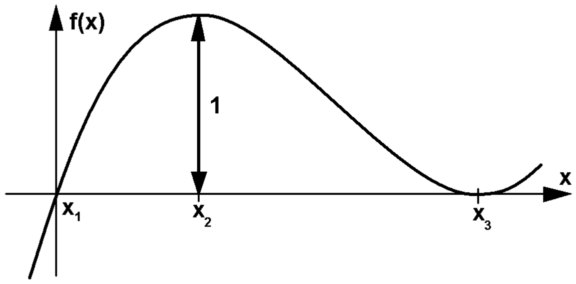
Aufgrund der in der letzten Aufgabe beschriebenen Sickergrube der Brüder Eleck und Trick stellt sich das Problem, wieviel Wasser in einer Sickergrube noch Platz findet, nachdem diese mit Kies gefüllt worden ist. Dieses Problem soll jetzt anhand einer Modellrechnung behandelt werden.
Dabei gehen wir von einer vorhandenen Kiesqualität mit einem mittleren Kieselsteindurchmesser von $d = 2.0\,cm$ aus. Für diese Aufgabe können vereinfacht die Steine als kugelförmig in in dichter Packung angenommen werden (D.h. eine Tetraederpackung, Mittelpunkte benachbarter Kugeln bilden Tetraeder.)
(Es ist in Zentimetern zu rechnen. Die Einheiten dürfen weggelassen werden.)

(a) Berechnen Sie am Modell eines geeigneten schiefen Parallelepipeds (gleichseitiger Spat) der Kantenlänge $2\,r\,n$ ($r$ = Kieselsteinradius resp. Kugelradius) das Verhältnis $v(r)$ zwischen „Inhalt des gegebenen Kiesvolumens im gefüllten Spat" und „Inhalt des noch leeren Spats" für sehr grosse $n$ (Grenzfall $n \to \infty$).

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von $v(r)$ annähernd das noch vorhandene Sickervolumen in einer kiesgefüllten Sickergrube in Prozent vom Gesamtvolumen $V_0$. Untersuchen Sie, was mit diesem Restvolumen passiert, falls statt Kies einmal Sand mit dem Korndurchmesser $1.0\,mm$ verwendet wird!

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Ein Geländequerschnitt kann in einem gegebenen Bereich mit einem passenden Massstab durch eine Parabel 3. Ordnung (kubische Parabel) dargestellt werden. Dazu gehört die durch das Polynom 3. Grades gegebene Funktion $f(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$. Der Graph verläuft so wie in der Skizze gezeigt. Es gibt Nullstellen bei $x_0 = 0$ und bei $x_3 = 2$, ein Maximum bei $x_2$ der Grösse $f(x_2) = 1$ sowie ein Minimum bei $x_3 = 2$.




(a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_3, \ldots, a_0$.

(b) Berechnen Sie den Querschnittsflächeninhalt zwischen $x = 0$ und $x = 2$ (vgl. Skizze.) Falls es nicht gelungen ist, $a_3$ bis $a_0$ zu berechnen, kann dieses Teilproblem mit der andern Funktion $p(x) = \frac{e}{\pi} \cdot (x-2) \cdot (3\,x-2) \cdot x$ gelöst werden.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

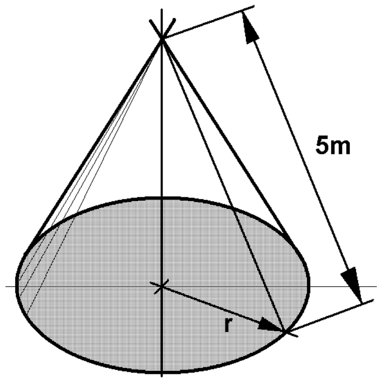
Eine lineare Abbildung $\mathcal{A}$ ist durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegeben. Sie bildet $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\overrightarrow{OP}\,' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab. Den Vektor $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bildet sie in $\overrightarrow{OQ}\,' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ab.

(a) Berechnen Sie die Matrix $A$.

(b) Berechnen Sie das Bild des Punktes $S(2, 4)$.

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Die nachstehende Skizze zeigt ein kreisrundes Indianerzelt. Die vorhandenen Baumstangen lassen eine Zeltstangenlänge von $5\,m$ zu.
Berechnen Sie den Radius $r$ an der Basis, sodass das Volumen des Zeltes maximal wird.




— ENDE — ◇ — FIN —

Hochschule für Technik und Architektur BIEL (HTA) 6. Oktober 1998

## 2.21 Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1998, Teil Algebra

**Klasse E1A**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

In einer stark windigen Berggegend soll ein Kran gebaut werden. $M$ ist der Fusspunkt dieses Krans, der einen horizontalen Arm mit dem Radius von 20 Metern hat. Die Höhe vom Fusspunkt bis zu Arm misst 22 Meter. In der Nähe des Krans verläuft sehr geradelinig eine elektrische Leitung. Der nächstgelegene Draht geht vom Punkte $P_1$ eines ersten Mastes zum Punkte $P_2$ eines zweiten Mastes. In einem speziell gewählten Koordinatensystem ist $M$ gegeben durch $M(0,0,0)$, $P_1$ durch $P_1(0,30,10)$ und $P_2$ durch $P_2(20,40,30)$ (alle Angaben in Metern). Der Leitungsdraht sei für die Rechnung durch eine Gerade $g$ approximiert (jeweils beidseitig der Masten in Leitungsrichtung). Es besteht das Problem zu untersuchen, ob bei einem unvorhergesehenen Umkippen des Krans um den Fusspunkt $M$ Gefahr für die Leitung besteht. Da die Drähte durch eine Gerade approximiert sind und zudem schwingen können, soll im ungünstigsten Fall eine Sicherheitsdistanz von 5 Metern zwischen der Geraden und der Kugelsphäre um $M$ mit dem Kippradius eingehalten werden.

(a) Skizzieren und beschriften Sie die Situation.

(b) Berechnen Sie den kürzesten Abstand von der Geraden $g$ zum Fusspunkt $M$.

(c) Berechnen Sie den Kippradius des Krans um den Fusspunkt $M$ und entscheiden Sie, ob die Sicherheitsdistanz eingehalten werden kann.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sowie die Ebenenschar $\Phi_h$:

$$\vec{r}_h(\lambda, \mu) = h \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie von $A$ die Determinante sowie die Spur.

(b) Berechnen Sie von $A$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

(c) Berechnen Sie daraus die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von $A^2 = A \cdot A$.

(d) Durch $A$ und $A^2$ sind zwei lineare Abbildungen gegeben. Suchen Sie die durch $A$ und $A^2$ erzeugten Bilder der Ebenenschar $\Phi_h$. Was fällt dabei auf?

(e) Durch den Ursprung und die Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Tetraeder definiert. Wie ändert sich sein Volumen bei der Abbildung durch $A$?

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Bilden Sie sämtliche Permutationen der drei Zahlen $1, 2, 3$ und interpretieren Sie jede Permutation als einen Punkt in einem räumlichen Koordinatensystem. (Skizzieren Sie die Situation.)

(a) Welche Figur entsteht dadurch?

(b) Begründen Sie Ihre Vermutung. (Verwenden sie dazu die Vektoren, die durch die Punktepaare mit kürzestem Abstand gegeben sind.)

(c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes $S$ der Figur.

(d) Durch den Ursprung $O$, die Figur sowie den Punkt $Q(4, 4, 4)$ ist ein Körper definiert. (Der Körper entsteht durch Verbindung benachbarter Punkte der Figur sowie durch Verbindung dieser Punkte mit $O$ und $Q$.) Berechnen Sie den Volumeninhalt dieses Körpers.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Betrachten Sie in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ ein beliebiges Dreieck mit den Eckpunkten (Zahlen) $z_1, z_2, z_3$ und dem Schwerpunkt $z_s$. (Die Eckpunkte sind nummeriert im Uhrzeigersinn. Fertigen Sie sich eine Skizze an!) Wenn Sie über jeder Seite nach aussen das gleichseitige Dreieck errichten, erhalten Sie drei neue Eckpunkte $p_1, p_2, p_3$ ($p_1$ soll $z_1$ gegenüber liegen etc.). Die Schwerpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke sind $m_1, m_2, m_3$ ($m_1$ im Dreieck mit $p_1$ etc.).

(a) Berechnen Sie $p_1, p_2$ und $p_3$ (zyklisch!).
*Hinweis: Interpretieren Sie die komplexen Zahlen als Vektoren. — Z.B. entsteht der Punkt $p_1$ aus $z_2$ durch Drehung um $z_3$ um einen bekannten Winkel. Nutzen Sie hier die Beziehung zwischen Drehverhalten und Multiplikation komplexer Zahlen aus.*

(b) Berechnen Sie die Schwerpunkte $m_1, m_2, m_3$.

(c) Berechnen Sie den Schwerpunkt $z_m$ des Dreiecks mit den Eckpunkten $m_1, m_2, m_3$ und vergleichen Sie diesen Punkt mit dem Schwerpunkt $z_s$ des ursprünglichen Dreiecks.

(d) Zeigen Sie, dass das durch $m_1, m_2, m_3$ gegebene Dreieck immer gleichseitig ist, indem Sie zeigen, dass sich z.B. der von $m_1$ nach $m_2$ zeigende Seitenvektor um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ in den von $m_1$ nach $m_3$ zeigenden Seitenvektor drehen lässt. (Wegen der zyklischen Vertauschung muss z.B. nur dieser Fall behandelt werden.)
*Hinweis: Benützen Sie bei der Rechnung Beziehungen wie $1 - e^{\frac{i\pi}{3}} = -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$, was aus einer Skizze sofort ersichtlich ist.*

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Gesucht ist die Menge der Vektoren $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T\} := U^\perp$, die senkrecht stehen auf den gegebenen Vektoren $\vec{v}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)^T$, $\vec{v}_1 = (2, 3, 4, 5, 6)^T$ und $\vec{v}_3 = (3, 4, 5, 6, 7)^T$. ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ spannen einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^5$ auf. $U^\perp$ heisst *Orthogonalraum.*)

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Vektoren aus $U^\perp$. Verwenden Sie dabei die Koordinatenvariablen mir den höheren Indices als Parameter.
*Hinweis: Skalarprodukt, Gleichungssystem.*

(b) Untersuchen Sie, für welche $k$ der Vektor $(k, 1, -2, 1, k)^T$ zu $U^\perp$ gehört.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

(a) In einem Koordinatensystem befinden sich auf der $x$–Achse zwei Punkte $F_1(c, 0)$ und $F_2(-c, 0)$. Die Menge der Punkte $P(x, y)$, für die gilt

$$|d(P.F_1) - d(P, F_2)| = const. = 2\,a$$

bildet eine Kurve mit zwei Ästen, *Hyperbel* genannt. ($d$ steht für Distanz.) Wir setzen $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$. Damit lässt sich aus der Gleichung $|d(P.F_1) - d(P, F_2)| = 2\,a$ durch Umformen die Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ gewinnen. Führen Sie diese Umformung durch.

(b) Parallel zu einer geraden Meeresküste fährt ein Schiff. An der Küste befinden sich zwei Stationen $A$ und $B$ der Küstenwache $320\,km$ voneinander entfernt.Ein Koordinatensystem sei so gelegt, dass die $x$–Achse auf der Küstenlinie liegt, $A$ und $B$ gleich weit vom Ursprung entfernt liegen und die $y$–Achse Richtung Meer zeigt. (Machen Sie sich eine Skizze.) Da es möglich ist, mit Hilfe der hochentwickelten Navigationstechnik einigermassen exakt Kurs zu halten, weiss man auf dem Schiff infolge einer früheren Positionsbestimmung, dass der Abstand zur Küste $y = 80\,km$ beträgt. Um 10 Uhr ($\pm 1\,\mu sec$) senden die beiden Stationen $A$ und $B$ je ein identifizierbares Radiosignal aus, das sich mit Lichtgeschwindigkeit (ca. $3\,10^5\,\frac{km}{sec}$) ausbreitet. Das Signal von $A$ wird auf dem Schiff $400\,\mu sec$ früher registriert als das Signal von $B$. Damit lässt sich die Position des Schiffes auf der $x$–Achse bestimmen. Führen Sie die Positionsbestimmung durch! (Berechnen Sie die zur Laufzeitdifferenz des Signals gehörige Längendifferenz $d$ in Kilometern und lassen Sie dann die Einheiten weg.)
*Hinweis: Verwenden Sie den 1. Teil der Aufgabe.*

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

$$z(t) = (t + \frac{1}{2}) + i\,(t - \frac{1}{2}))$$

$z(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Kurve in der komplexen Zahlenebene.

(a) Um welche Kurve handlet es sich? Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

(b) Wo liegen die Punkte $w(t) = \frac{1}{2}\,(z(t))^2 - 0.75\,i$, wenn $t$ die reellen Zahlen durchläuft? Skizzieren Sie auch diese Kurven und berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

(c) Berechnen Sie die minimalen Werte von $|Re(z(t)) - w(t)|$ und $|Im(z(t)) - w(t)|$. Was lässt sich daraus für die minimalen Werte von $|z(t) - w(t)|$ folgern?

— ENDE —

Hochschule für Technik und Architektur BIEL (HTA) 5. Oktober 1998

## 2.22 Vordiplomprüfung 1 Mathematik 1998, Teil Analysis

**Klasse E1B**

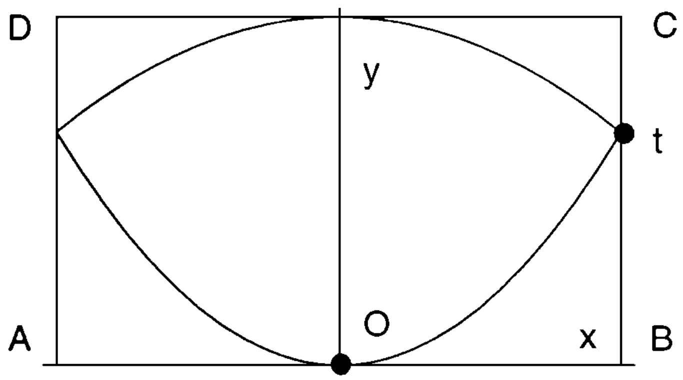
*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Die Funktion $f(x) = 2\,\sin(\frac{x}{2} + 1)$ soll im Intervall $[0, \pi]$ durch die Parabel $p(x) = a\,x^2 + b\,x + x$ angenähert werden, so dass die mittlere quadratische Abweichung zwischen $f$ und $p$ minimal ist.
Berechnen Sie die Koeffizienten $a$, $b$ und $c$. *Hinweis: Durch eine geeignete Koordinatentransformation lässt sich die Rechnung vereinfachen.*

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben sei ist das Rechteck $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 4)$, $D(-4, 4)$ sowie zwei Parabelbögen mit der $y$–Achse als Symmetrieachse (vgl. Skizze).




(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t$ die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln.

(b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die beiden Parabelbögen begrenzt wird.

(c) Berechnen Sie den Wert von $t$, für den sich die beiden Parabeln unter einem rechten Winkel schneiden.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Der Verkehrsfluss $F$ gibt an, wieviele Autos pro Zeiteinheit eine bestimmte Stelle passieren. In einem einfachen Modell zum Studium von $F$ wird angenommen, dass alle Autos die gleiche Baulänge $l$ haben und sich mit gleicher Geschwindigkeit $v$ in der gleichen Richtung fortbewegen. Weiter wird angenommen, dass der von einem Auto benötigte Fahrbahnbedarf $L$ (d.h. die Distanz von der vorderen Stossstange des Fahrzeugs bis zur vordern Stossstange des folgenden Fahrzeugs), welcher ein Fahrzeug aus Sicherheitsgründen einnimmt, ebenfalls für alle Autos gleich gross ist. Aus physikalischen Gründen (Bremsweg incl. Berücksichtigung der Reaktionszeit) gilt für $L$:

$$L = L(v) = l + a\,v + b\,v^2$$

Die Parameter $a > 0$ (Reaktionszeit) und $b > 0$ (Fahrbahntyp) sind fest vorgegeben.

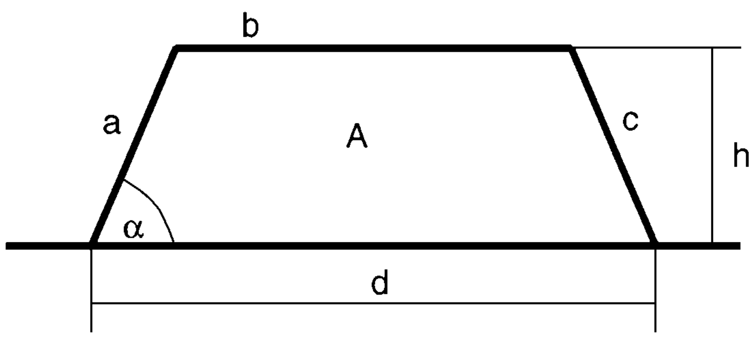
(a) Erklären Sie kurz, warum $F$ sich nach der Formel $F(v) = v/L(v)$ berechnen lässt.

(b) Skizzieren Sie rein qualitativ die Funktion $F(v)$ für $v \geq 0$.

(c) Berechnen Sie den maximalen Verkehrsfluss $F_{max}$ (das Resultat muss möglichst stark vereinfacht werden!) und die zugehörige Geschwindigkeit $v_{opt}$. Zur Kontrolle: Interessanterweise ist $v_{opt}$ nicht von der Reaktionszeit abhängig.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Im Orient wird von einem Ingenieur beim Studium der Überdachung einer langen, geraden Rennbahn ein trapezförmiger Querschnitt (vgl. Figur) von minimal $A = 400\,m^2$ vorgeschalgen. Mit dieser Quadratmeterzahl können bei der vorgesehenen Nutzung alle Bedingungen erfüllt werden. Nebenbedingungen: Der Winkel $\alpha$ an der Basis soll minimal $60^o$, die Basisbreite $d$ minimal $25\,m$, die Höhe $h$ minimal $7\,m$ betragen. Da bei der Grösse des Projektes die Baukosten und damit die Materialkosten wesentlich sind, soll der minimale Umfang $u = a + b + c$ (mit $a = c$) beim begebenen Querschnitt $A$ berechnet werden.




(a) Berechnen Sie $u_{min}$ (ohne Berücksichtigung der Nebenbedingungen).

(b) Überprüfen Sie, ob damit die Bedingungen an $\alpha$, $d$ und $h$ erfüllbar sind.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Sei $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin(\omega\, t^2)}{t^2}\, dt$. ($\omega$ ist hier Parameter.)

(a) Entwickeln Sie $f(x)$ in eine Potenzreihe. (Dabei darf von der Potenzreihe von $\sin(x)$ ausgegangen werden.)

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius.

(c) Approximieren Sie $f(x) = \int\limits_{-1}^1 \frac{\sin(\omega\, t^2)}{t^2}\, dt$ mit Hilfe des vorhergehenden Resultates, indem Sie nur Potenzen von $x$ bis zum Exponenten 10 berücksichtigen.

(d) Berechnen Sie $f(x) = \int\limits_{-a}^a \frac{\sin(\omega\, t^2)}{t^2}\, dt$ für eine beliebige Zahl $a$ und beantworten Sie die Frage, ob $f(x)$ zur Klasse der geraden oder der ungeraden Funktionen gehört.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Ein Werkstück ist wie folgt gegeben:
Durch $z = h(r, \varphi) = \frac{\varphi}{4}$ ist über der Grundebene in Zylinderkoordinaten eine Funktionsfläche gegeben. Der Definitionsbereich ist festgelegt durch $r \in [1, 2]$ und $\varphi \in [0, \frac{3\pi}{2}]$. Zwischen der Grundebene und der Funktionsfläche ist dadurch ein Volumen (Körper) definiert.

(a) Definieren Sie den Körper!

(b) Berechnen Sie den Volumeninhalt des Körpers (zwischen Grundebene und Funktionsfläche mit dem gegebenen Definitionsbereich).

(c) Berechnen Sie bei einem beliebigen festen Winkel $\varphi$ die Tangentensteigung für die innere und die äussere Randkurve der Funktionsfläche über dem Definitionsbereich. Wie hängt diese Steigung vom Radius $r$ ab?

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Eine Elipse ist gegeben durch die Parameterdarstellung $\vec{x} = \begin{pmatrix} a\, \cos(t) \\ b\, \sin(t) \end{pmatrix}$.
Wir wählen $a = 2$.

(a) Berechnen Sie die Krümmung als Funktion von $t$. Dabei ist $b$ Parameter.

(b) Berechnen Sie die Krümmung für $t = 0$ als Funktion von $b$.

(c) Wie gross muss $b$ gewählt werden (Fall $t = 0$), damit der Krümmungsradius gerade 1 ist? Skizzieren Sie den Fall und berechnen Sie noch die Brennpunkte. Was fällt auf?

— ENDE —

Hochschule für Technik und Architektur BIEL (HTA) 5. Oktober 1998

## 2.23 Vordiplomprüfung 2 Mathematik 1998

**Klasse E2B**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u'(x) - \tan(x) \cdot u(x) &= -\sin(x) \\ x \cdot v'(x) &= v(x) + 4\,x \end{aligned}$$

(a) Suchen Sie diejenige spezielle Lösung $u_0(x)$ der ersten Gleichung, die durch den Ursprung geht.

(b) Berechnen Sie diejenige spezielle Lösung $v_0(x)$ der zweiten Gleichung, die die Bedingung $v_0(\pi) = u_0(\pi)$ erfüllt.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der Steigung $\lim\limits_{x\to\infty} v_0{}'(x)$ sowie das Minimum resp. das Infimum der Steigung.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Ein harmonischer Oszillator (z.B. eine Masse an einer Feder) wird durch die Gleichung

$$m\,y''(t) + \mu\,y\,(t) + k\,y(t) = F(t)$$

beschrieben. $F(t)$ ist die äussere Anregung, $\mu$ die Dämpfung. Um das Problem der Resonanz zu studieren, setzen wir $m = 1,\ \mu = 0,\ k = 1$ und für die äussere Anregung $F(t) = \sin(\omega_0\,t)$. Für $t = 0$ befinde sich das System im Ruhezustand.

(a) Bestimmen Sie für den beschriebenen Fall mit Hilfe der Laplace–Transformationen die Lösung in Abhängigkeit vom Parameter $\omega_0$.

(b) Bestimmen Sie bei der gefundenen Lösung die Grösse $\omega_0$ für den Resonanzfall.

(c) Bestimmen Sie die Stossantwort zur Zeit $t = 0$ bei einer Dämpfung $\mu = 1$. ($m = 1,\ \ k = 1$ wie vorher.)

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

In einem diskreten Zeitsystem soll die Impulsantwort $\{y_k\} = \{(-1)^k - 2^k\}$ $(k \geq 0)$ sein.

(a) Bestimmen Sie die die Transferfunktion $G(z)$.

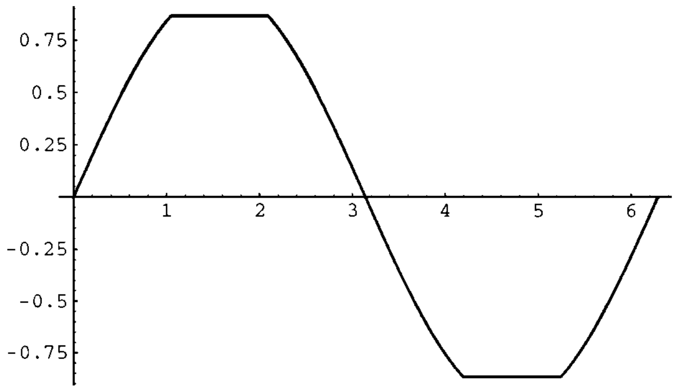
(b) Entwerfen Sie zu $G(z)$ ein Blockdiagramm.

(c) Bestimmen Sie die zugehörige Differenzengleichung.

(d) Bestimmen Sie zu $G(z)$ die Schrittantwort.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Die in der Figur über eine Periode gezeigte Funktion *nbsin*$(t)$ heisst unter *„neuer Bieler Sinus“*. In den Intervallen $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ und $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ ist sie oben resp. unten horizontal abgeschnitten. Der neue Bieler Sinus lässt sich zusammensetzen aus der Funktion $\sin(t)$ sowie einer $2\pi$–periodischen Hilfsfunktion $h(t)$, die 0 ist, ausser auf den folgenden Intervallen: Auf $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ ist sie gleich $(\sin(t) - \sin(\frac{\pi}{3}))$ und auf dem Intervall $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ ist sie gleich $(\sin(t) + \sin(\frac{\pi}{3}))$.




(a) Skizzieren Sie $h(t)$.

(b) Entwickeln Sie $h(t)$ in eine Fourierreihe, indem Sie die Fourierkoeffizienten $a_0/2$, $a_n$ und $b_n$ bestimmen. (Falls die Koeffizienten nicht ständig gleich 0 sind, genügen die ersten vier, d.h. $n = 4$. Das gibt die Reihe $h_4(t)$.)

(c) Berechnen Sie numerisch die Abweichung $|h_4(t) - h(t)|$ an der Übergangsstelle $t = \frac{\pi}{3}$.

(d) Geben Sie in einer Gleichung die Beziehung zwischen *nbsin*$(t)$, $\sin(t)$ und $h(t)$.

(e) Berechnen Sie aus dieser Gleichung die Fourierkoeffizienten von *nbsin*$(t)$ bis zu $n = 4$.

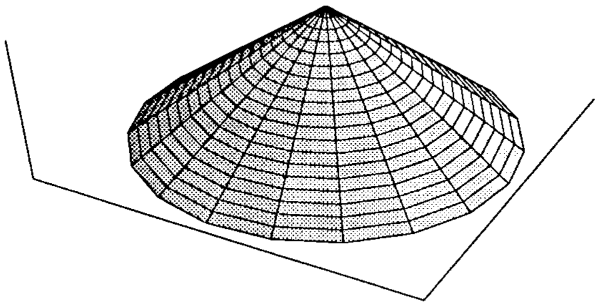
**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

(a) Sei $\vec{u} = f(x,y,z)\cdot\vec{c}$. ($\vec{c}$ ist ein beliebiger, geeignet gewählter konstanter Vektor, $f$ eine skalare Funktion.) Leiten Sie damit mit Hilfe des Divergenzsatzes folgende Gleichung her:

$$\iint_S f\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_Q (\nabla f)\,dV$$

(Der Nachweis für eine Komponente genügt.)

(b)



In einem See wird eine kegelförmige Tauchkapsel mit dem Grundkreisradius $R$ und der Höhe $H$ so versenkt, dass die Rotationsachse senkrecht steht. Die Tiefe des Kapselbodens ab Wasseroberfläche sei $z_0$. Da der Druck $p$ in der Tiefe $z$ unter der Wasseroberfläche dem Gewicht der Wassersäule über der Einheitsfläche entspricht, gilt für $p$ die Formel: $p = k\cdot z$ ($k = const.$). Die auf ein Flächenelement $d\vec{S}$ wirkende Kraft berechnet sich bekanntlich nach der Formel $d\vec{F} = -p\cdot d\vec{S} = -p\cdot\vec{n}\cdot dS$. Damit kann die gesamte auf die Kapsel wirkende Auftriebskraft $-\iint_S p\cdot\vec{n}\,dS$ nach der im ersten Teil der Aufgabe hergeleiteten Gleichung berechnet werden. In einem geeignet gewählten Masssystem ist $R = 1$, $H = 3$. Berechnen Sie damit $\vec{F}$ als Funktion von $z_0$. (Lassen Sie die Normierungskonstante $k$ als Parameter stehen.) Spielt bei dieser Rechnung die Körperform eine Rolle? (Vergleichen Sie das Resultat mit dem *Gesetz von Archimedes*!)

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

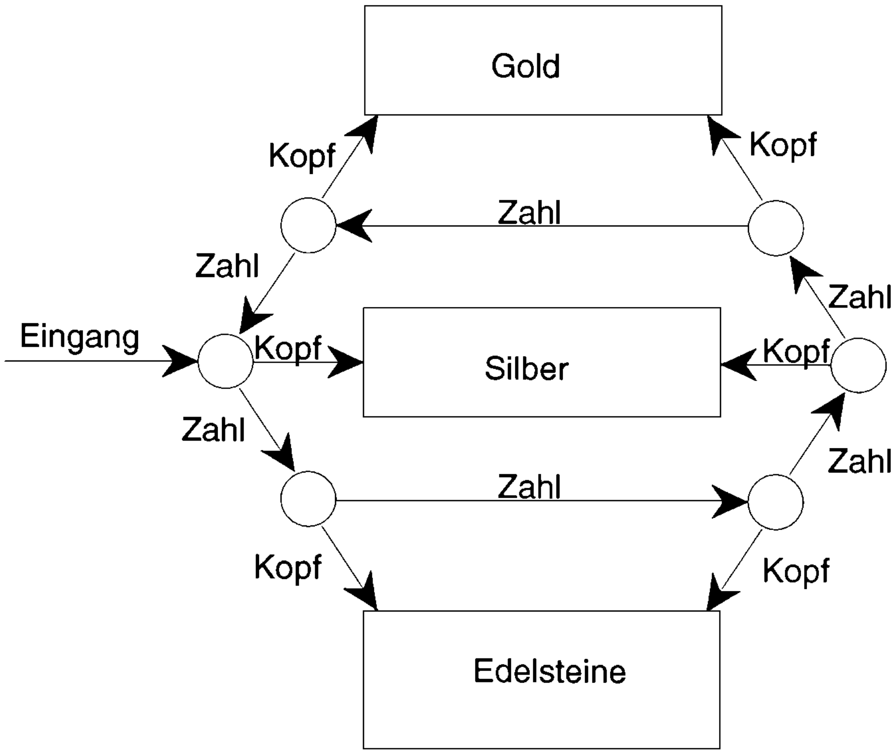
Untersuchen Sie das folgende Differentialgleichungssystem als System mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $y(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x} - x - 5\,y &= f(x)\\ \dot{y} + x + k\,y &= 0\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die die Transferfunktion $G(s)$.

(b) Untersuchen Sie, in welchem Bereich für $k$ das System stabil ist.

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**




Sie betreten einen Labyrinth bei „Eingang" (vgl. Skizze). Sie dürfen sich nur in Pfeilrichtung bewegen. Bei jeder Verzweigung entscheiden Sie mit einem Münzwurf (ideale Münze), welchen Gang Sie betreten. Das geht solange, bis Sie entweder bei den Edelsteinen, beim Silber oder beim Gold angelangt sind. Beachten Sie, dass Sie dazu vielleicht mehrere Durchgänge benötigen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen Sie

(a) zu den Edelsteinen?

(b) zum Silber?

(c) zum Gold?

*(Die Idee zu dieser Aufgabe ist einer Mittellehrerprüfung der Universität Basel entnommen.)*

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 21. September 1999

## 2.24 Vordiplomprüfung 1 in Algebra 1999

**Klasse E1b**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Gegeben ist in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ die Kurve $t \longmapsto z(t) = \sqrt{0.97} \cdot e^{i \cdot t} + (-0.1 + 0.4\, i)$, $t \in [0, 2\,\pi]$. Betrachte dazu noch die komplexe Abbildung $\varphi: \; z \longmapsto \varphi(z) = z + \dfrac{1}{z}$.
Hiermit wird folgendes Bild der Kurve $z(t)$ definiert:

$$\varphi(z(t)) := w(t) = z(t) + \frac{1}{z(t)}$$

(a) Skizziere die Kurve $z(t)$ in $\mathbb{C}$. Um welchen Kurventyp handelt es sich?

(b) Skizziere die Kurve $w(t)$ in $\mathbb{C}$.
*Hinweis:* Dieses Kurvenprofil spielt u.a. in der Aerodynamik eine Rolle, z.B. beim Tragflügel. Es heisst *Joukowski–Profil*.

(c) Untersuche, ob es einen Wert $t_0 \in [0, 2\,\pi]$ gibt, für den der Tangentialvektor an die Kurve $w(t)$ gleich resp. approximativ gleich $\vec{0}$ ist. Bestimme allenfalls $t_0$ sowie $w(t_0)$ numerisch.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

In der Elektrotechnik spielt die Möbiustransformation $\mathbb{C} \ni z \longmapsto w = f(z) = \dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{C}$ eine wichtige Rolle. Das Bild des rechtwinkligen Koordinatennetzes der $z$–Ebene in der $w$–Ebene heisst *Smith–Diagramm.*

(a) Das Bild des rechtwinkligen Koordinatennetzes der $z$–Ebene in der $w$–Ebene soll wie folgt dargestellt werden:
Skiziere die Bilder der vertikalen Geraden der $z$–Ebene mit dem Realanteil $x = 0,\ 0.2,\ 0.4,\ 1$ sowie die Bilder der horizontalen Halbgeraden mit nicht–negativem Realanteil und Imaginäranteil $i\,y = -2\,i,\ \ -0.4\,i,\ 0,\ 0.4\,i,\ 2\,i$. Um welchen Kurventyp handelt es sich bei diesen Bildern?

(b) Bestimme die Schnittwinkel zwischen den Bildkurven. (Begründung?)

(c) Untersuche, ob es einen Bildpunkt gibt, der als Schnittpunkt von Bildkurven eine Ausnahme bildet. (Begründung?)

(d) Sei $z_1 = 1 + 2\,i$. Zeichne $w_1 = f(z_1)$ und $w_2 = f(\frac{1}{z_1})$ in der Skizze ein. Dabei stellt man eine Eigenschaft fest, die ein allgemeines Gesetz vermuten lässt. Formuliere und begründe dieses Gesetz.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Ein Würfel $W_3$ mit der Kantenlänge 10 steht so in einem kartesischen Koordinatensystem, dass der Eckpunkt $P_1$ im Ursprung liegt. Der zweite Punkt auf der Körperdiagonale durch $P_1$ sei $P_7$. Dieser Punkt liegt auf der positiven $z$–Achse. Weiter liegen die Punkte $P_4$ und diesem gegenüber $P_6$ in der $xz$–Ebene. $P_4$ hat keine negativen Koordinaten und liegt tiefer als $P_6$ bezüglich der $z$–Richtung.

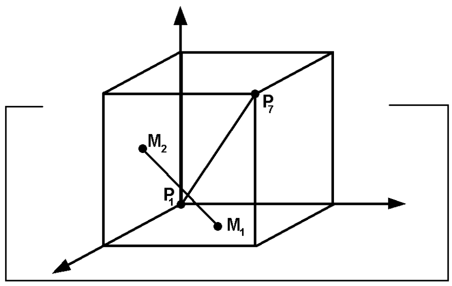
(a) Untersuche, ob die Lage des Würfels damit eindeutig bestimmt ist. Fertige davon eine Skizze an.

(b) Berechne die Koordinaten der Eckpunkte von $W_3$.

(c) Sei $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
$W_3$ wird durch $B$ in ${W_3}'$ abgebildet. Berechne den Inhalt von ${W_3}'$ sowie die Länge der Seitenvektoren.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Der Würfel $W_4$ liegt achsenparallel. Von $W_4$ kennt man die Eckpunkte $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(100, 100, 100)$, $P_4(100, 0, 0)$




Durch $W_4$ sollen zwei Löcher mit einem Durchmesser 20 gebohrt werden. Das eine Loch hat als Achse die Raumdiagonale $\overline{P_1P_7}$. Die Achse des anderen Lochs geht vom Flächenmittelpunkt $M_1(50, 50, 0)$ zum Flächenmittelpunkt $M_2(50, 0, 50)$.

(a) Berechne den minimalen Abstand der beiden Bohrachsen.

(b) Die kleinste Wandstärke zwischen den beiden Löchern sollte mindestens 1 betragen. Untersuche, ob sich die Löcher durchdringen. Falls dies nicht der Fall ist, soll die kleinste Wandstärke zwischen den beiden Löchern berechnet werden.

(c) Falls die kleinste Wandstärke $w$ zwischen den beiden Lächern kleiner als 1 ist:
Sei $M_2(50, 0, 50 + z)$ variabel. Berechne $w$ als Funktion von $z$ und schätze mittels des Graphen ab, wieviel $z$ betragen müsste, damit $w$ mindestens 1 wird.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

(a) Finde eine kurze Formel für die Summe $2+4+6+8+\ldots+2\,n,\ \ n \in \mathbb{N}$ und beweise diese Formel durch vollständige Induktion.

(b) Überprüfe damit die bekannte Formel für die Summe $1+2+3+4+\ldots+n,\ \ n \in \mathbb{N}$.

(c) Versuche, durch vollständige Induktion die Beziehung $1+2+3+4+\ldots+n < \frac{1}{8}\,(2\,n+1)^2$ zu beweisen.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Sei $\langle a_n \rangle_{n \geq 1}$ die FIBONACCI–Folge mit $a_1 = a_2 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

(a) Bestimme die Matrix $M$, für die gilt:

$$\forall_{n \geq 2} : \ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

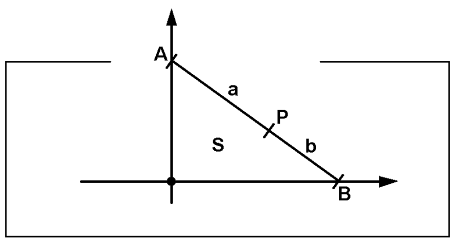
(b) Berechne exakt die Eigenwerte $\alpha > 0$ und $\beta < 0$ sowie die dazugehörigen Eigenvektoren von $M$. (Die vereinfachten Werte werden verlangt.)

(c) Wir definieren mit obigen Eigenwerten die Funktion $f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\alpha^n - \beta^n)$. Beweise dann:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : \ f(n) = a_n$$

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Ein Geradenabschnitt der Länge $s = a+b$ wird so verschoben, dass die Endpunkte $A$ und $B$ auf den Koordinatenachsen gleiten. ($a = 4,\ \ b = 3$.) Dabei beschreibt der Teilpunkt $P$ eine Kurve. Die Kurvengleichung kann elementargeometrisch gefunden werden.




(a) Bestimme die Gleichung der durch $P$ erzeugten Kurve und begründe, dass es sich um eine Ellipse handelt.

(b) Der Ortsvektor eines Punktes $P(x, y)$ der Kurve wird durch die Matrix $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ in den Ortsvektor des Punktes $P'(x', y')$ abgebildet. Bestimme die Gleichung der Bildkurve und begründe, um welchen Kurventyp es sich handelt.

(c) Bestimme die Lage der allfälligen Achsen der Bildkurve.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 20. September 1999

## 2.25 Vordiplomprüfung 1 in Analysis 1999

**Klasse E1b**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

(a) Berechnen Sie von $f(x,y) = x^4 - 2\,x^2 + (2\,x^2 - 1)\,y^2$ die Extrema unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Sei $G = [-1,1] \times [-1,1]$. Zu $f(x)$ wird eine Konstante $c$ addiert, so dass das Integral $\int\limits_G f(x,y)\,dG = 0$ wird. Wie gross muss $c$ gewählt werden?

*Hinweis:* Für $y > 0$ kann z.B. $y^2$ geeignet substituiert werden. (Es gibt mehr als eine Möglichkeit ...)

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(2/3)$, $P_2(7,2)$ und $P_3(5/6)$. Im Innern befindet sich ein Punkt $P(x,y)$, der zu $P_i$ einen Abstand $d_i$ hat $(i = 1, 2, 3)$.

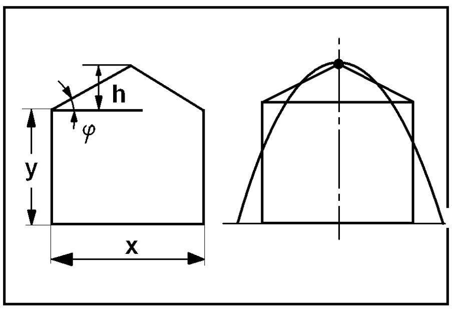
(a) Berechne $P(x,y)$ so, dass die Summe der Abstandquadrate $\sum\limits_{i=1}^{3} d_i^2$ minimal wird.

(b) Entscheide mit Begründung, ob es sich bei $P$ um einen der folgenden Punkte handelt: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt oder Inkreismittelpunkt.

(c) Begründe den vorhin gefundenen Sachverhalt allgemein.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Hauses. Der Umfang $u = 40\,m$ ist gegeben. $x, y, h$ sind unbekannt.




(a) Berechne $x, y, h$ so, dass der Flächeninhalt $A$ maximal wird. Berechne auch $A_{max}$.

(b) Bestimme die Funktionsgleichung der eingezeichneten Parabel durch die Dachspitze, wenn die Parabel mit der $x$–Achse ebenfalls den Flächeninhalt $A_{max}$ umschliesst.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Die grösste Nullstelle $x_0(\lambda)$ von $y(x,\lambda) = x^3 + 2(\lambda^2+1)\,x + 2\sqrt{6}\,\lambda = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$ soll berechnet werden.

(a) Zeige, dass $y(x,\lambda) = y_\lambda(x)$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ genau eine Nullstelle hat.
*Hinweis:* Untersuche die Ableitung $y_x{}'(x,\lambda)$.

(b) Bestimme die grösste Nullstelle von $x_0(\lambda)$.
*Hinweis:* Es muss gelten: $y_0(x_0(\lambda),\lambda) = 0 \ \Rightarrow \ y_\lambda{}' + y_x{}' \cdot x_\lambda{}' = 0$ (Kettenregel)
$\Rightarrow \ x_\lambda{}' = \ldots = 0$ (Extremum!)
Setze das so berechnete $\lambda$ in $y(x,\lambda)$ ein ...
verifiziere, dass tatsächlich die grösste und nicht die kleinste Nullstelle gefunden worden ist.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Für das Integral $\int_0^1 \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2}\,dx$ ist keine elementare Stammfunktion bekannt. Um trotzdem zu einer Abschätzung zu kommen, gehen wir wie folgt vor:

(a) Benütze die Potenzreihenentwicklung für den Cosinus für $x_0 = 0$, um den Integranden wie folgt zu approximieren:

$$f(x) = \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2} \approx \sum_{k=0}^{10} a_k\,x^k$$

(b) Versuche, für die Approximation von $f(x), \ x \in [0,1]$, den Fehler abzuschätzen.

(c) Verwende das gewonnene Resultat, um $\int_0^1 \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2}\,dx$ zu approximieren.

(d) Versuche, für $\int_0^1 \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2}\,dx$ den Fehler abzuschätzen.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Im Graphen von $f(x) = x^2$ wird im Punkt $x = 0$ der Krümmungskreis eingezeichnet (Krümmungsradius $\rho$). $P_0$ sei ein Punkt auf der Kreisperipherie, $P_0 \neq (0,0)$. Eine Kreistangente in $P_0$ mit dem Steigungswinkel $\varphi$, die nicht parallel zu einer Koordinatenachse liegt, schneidet die parabel in zwei Punkten $P_1, P_2$.

(a) Bestimme $P_1$ und $P_2$ für $\varphi = \frac{\pi}{6}$. (Numerisches Resultat genügt.)

(b) Bestimme den Inhalt $A$ der Fläche zwischen der Parabel und der Tangente (zwischen den Punkten $P_1$ und $P_2$).

(c) Entscheide, ob $A < 3$ gilt oder nicht.

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Ein Gebiet $D$ stellt die Oberfläche eines Sees dar, welche in einem $xy$–Koordinatensystem plaziert wird ($x$ und $y$ in $km$). die Tiefe in Metern unterhalb des Punktes $(x, y)$ ist gegeben durch

$$z = f(x, y) = 300 - x^2 - 2\,y^2$$

(a) Ein Boot befindet sich im Punkt $(10, 10)$ (d.h. am Ufer).
In welcher Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1(x, y) \\ a_2(x, y) \end{pmatrix} = \vec{a}(10, 10) = \begin{pmatrix} a_1(10, 10) \\ a_2(10, 10) \end{pmatrix}$ muss es fahren, damit die *Tiefe möglichst rasch abnimmt?*

(b) Bestimme $\vec{a}(x, y) = \begin{pmatrix} a_1(x, y) \\ a_2(x, y) \end{pmatrix}$ für einen beliebigen Punkt $(x, y)$.

(c) Der Kapitän wählt den Kurs so, dass in jedem Punkt die Richtung identisch ist mit der Richtung der stärksten Tiefenzunahme resp. Tiefenabnahme.
$\leadsto\ \frac{d\,x(t)}{d\,t} = a_1(x, y),\ \frac{d\,y(t)}{d\,t} = a_2(x, y)$. Bestimme die Parameterdarstellung der Fahrtkurve, wenn das Schiff sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $(10, 10)$ befunden hat.

*Hinweise:* Normiere den Richtungsvektor nicht. Benütze folgende bekannte Tatsache: $(h(x) + c)' = (a \cdot e^{k \cdot x} + c)' = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = k \cdot h(x)$.

(d) Berechne näherungsweise die Länge der Fahrtkurve vom Punkt $(10, 10)$ bis zum Punkt mit der grössten Tiefe.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 20. September 1999

## 2.26 Vordiplomprüfung 1 in Mathematik 1999

**Klasse E2b**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Ein Massenpunkt wird gegen die Kraft $\vec{F} = (-D \cdot \vec{x}) - (m\,g\,\vec{k}) = \vec{F_1} - \vec{F_2}$ längs einer Schraubenlinie $C$ verschoben. (Spannkraft $\vec{F_1}$, Schwerkraft $\vec{F_2}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$.)

$$C: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(t) \\ R \cdot \sin(t) \\ \dfrac{t}{2\,\pi} \end{pmatrix}, \ \ t \in [0, n\,2\,\pi], \ \ n \in \mathbb{N}.$$

(a) Berechne das Wegintegral (d.h. die geleistete Arbeit) für $n = 1, 2, 3$.

(b) Welche Komponenten von $\vec{F}$ kann man ändern, ohne das Resultat zu beeinflussen?.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Löse die Differentialgleichung

$$x^2 - y^2 + 2\,x \cdot y \cdot y' = 0$$

und skizziere die Kurvenschar. Um welchen Typ von Kurven handelt es sich bei den Lösungen?

*Hinweis:* Stelle die D'Gl. für $x, y \neq 0$ als explizite D'Gl. dar und substituiere $u := \dfrac{y}{x}$.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

(a) Löse das Anfangswertproblem

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = \sin(t) + \sinh(2\,t), \ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

(b) Diskutiere das Verhalten der Lösung für grosse $t$ (d.h. berechne $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$).

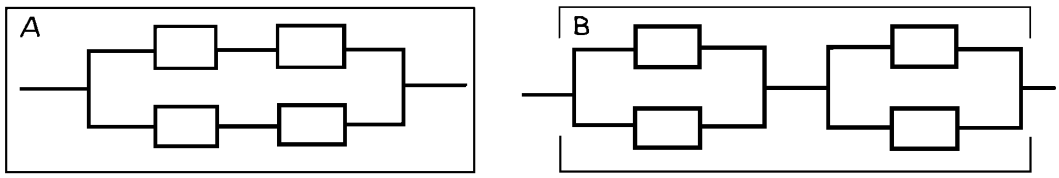
**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

**Zuverlässigkeit von Systemen**

In den folgenden Teilaufgaben arbeitet jedes Element mit einer gegebenen Zuverlässigkeit $p \in [0, 1]$.

(a) Bestimme die Zuverlässigkeit $S(p)$ von 2 in Serie geschalteten Systemen.

(b) Für die Zuverlässigkeit von 2 parallel geschalteten Systemen gilt: $P(p) = p\,(2 - p)$. Leite diese Formel her.

(c) 


Berechne für die beiden skizzierten Systeme $A$ und $B$ die Zuverlässigkeiten $A(p)$ und $B(p)$. Vergleiche die Werte $A(0.9)$ und $B(0.9)$.

(d) Beweise analytisch, dass das eine System immer zuverlässiger ist als das andere für alle $p \in (0, 1)$.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Ein Gebiet $D$ stellt die Oberfläche eines Sees dar, welcher in einem $xy$–Koordinatensystem plaziert ist ($x$ und $y$ in $km$). Die Tiefe in Metern unterhalb des Punktes $(x, y)$ ist gegeben durch

$$z = f(x, y) = 400 - 2\,x^2 - x\,y - y^2$$

(a) Ein Boot befindet sich im Punkte $(0, 20)$. In welche Richtung $\vec{a}(x, y) = \begin{pmatrix} a_1(x, y) \\ a_2(x, y) \end{pmatrix}$ muss es fahren, damit die *Tiefe möglichst rasch zunimmt?*

(b) Der Kapitän wählt den Kurs so, dass in jedem Punkt die Richtung identisch ist mit der Richtung der stärksten Tiefenzunahme resp. Tiefenabnahme.
$\rightsquigarrow \quad \dfrac{d\,x(t)}{d\,t} = a_1(x, y), \quad \dfrac{d\,y(t)}{d\,t} = a_2(x, y)$. Bestimme die Parameterdarstellung der Fahrtkurve, wenn das Schiff sich im Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $(0, 20)$ befand.
*Hinweis:* Normiere den Richtungsvektor nicht.

(c) Skizziere die Fahrtkurve.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Seien $C_1$, $C_2$ und $C$ drei einfach geschlossene Kurven im $\mathbb{R}^2$, die stückweise stetig sind und den Ursprung umschliessen. $C_1$ und $C_2$ schneiden sich nicht.

(a) Zeige, dass gilt: $\oint\limits_{C_1} M\,dx + N\,dy = \oint\limits_{C_2} M\,dx + N\,dy$
*Hinweis:* Satz von Green.

(b) Zeige, dass gilt: $\oint\limits_{C} M\,dx + N\,dy = 2\,\pi$

(c) Berechne $\oint\limits_{C} (e^x - 3\,y^2)\,dx + (e^y + 4\,x^2)\,dy$, wobei $C$ der Kreis $x^2 + y^2 = 4$ ist.
*Hinweis:* Verwende nach Anwendung eines naheliegenden Integralsatzes Polarkoordinaten, oder nütze allfällige Symmetrien aus.

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Sei $S$ die Kugelsphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^3 + x^2 + x + 2\,y\,z \\ y^3 + y^2 + y + 2\,x\,z \\ z^3 + z^2 + z + 2\,x\,y \end{pmatrix}$.

(a) Bestimme so einfach wie möglich $\int\limits_{S} \vec{F}\,d\vec{S}$.

(b) Schneidet man die Kugel der $xy$–Ebene entlang entzwei, so entsteht auf der einen Seite der positiven $z$–Achse ein Körper der Oberfläche $S^*$.
Bestimme so einfach wie möglich $\int\limits_{S^*} \vec{F}\,d\vec{S}$.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 19. September 2000

## 2.27 Vordiplomprüfung 1 in Algebra 2000

**Klasse F1**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

*In der folgenden Aufgabe sind die Masse in Metern angegeben. Die Masseinheit dient nur dem Verständnis und darf in der Rechnung weggelassen werden.*

In einer Fabrikationshalle hängt ein Rohr in Form eines Kreiszylinders, das ein Förderband enthält. Der äussere Radius beträgt 5 und die Zylinderachse ist durch die folgende Gerade gegeben: $g\,:\ \vec{x}(\lambda) = (-6,-2,4)^T + \lambda \cdot (12,16,4)^T$. Die axiale Abweichung infolge von Temperaturschwankungen wird mit $\pm 0.03$ angegeben.

Ein Ingenieur hat nun die Aufgabe, ein zweites Förderrohr zu bauen, das die Punkte $Q_1(3/5/2)$ und $Q_2(4/16/9)$ verbindet. Die axiale Toleranz soll dieselbe wie bei der ersten Röhre sein.

(a) Berechne den kleinsten Abstand zwischen den theoretischen Achsen und entscheide, ob eine gerade Verlegung des zweiten Rohres überhaupt möglich ist. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(b) Untersuche, ob die Achse des zweiten Rohres oberhalb oder unterhalb der Achse des schon vorhandenen Rohres verläuft. (Das Resultat ist zu begründen.)

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Eine Ebene $\Phi_1$ ist gegeben durch die Punkte $A(1/-2/0)$, $B(3/3/6)$, $C(-1/0/1)$.

Eine zweite Ebene $\Phi_2$ ist bestimmt durch die Vektorgleichung

$$\Phi_2\,:\ \vec{x}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Weiter sei $K$ eine Kugel mit unbekanntem Radius $r$ und Mittelpunkt $M(2/1/2)$.

Der Punkt $P$ hat die Koordinaten $P(2/2/0)$ und der Punkt $Q$ die Koordinaten $Q(-2/0/5)$. Spiegelt man $P$ an $\Phi_1$, so erhält man den Punkt $P'$.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Bestimme den Kugelradius für den Fall, in dem die Schnittgerade $s = \Phi_1 \cap \Phi_2$ Tangente an die Kugel ist. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(c) Berechne die Koordinaten von $P'$. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(d) Untersuche, ob die Gerade $g = \overline{PQ}$ mit der Kugel einen Schnittpunkt hat. (Das Resultat ist zu begründen.)

(e) Untersuche, ob die Geraden $s$ und $g$ windschief sind. (Das Resultat ist zu begründen.)

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die folgenden Gleichungen:

$$1 = x + y - a\,z \tag{2.14}$$
$$1 = x - y + 2\,z \tag{2.15}$$
$$1 = -x + y + b\,z \tag{2.16}$$
$$1 = -x - y + c\,z \tag{2.17}$$
$$0 = z \tag{2.18}$$
$$w = -x + 2\,y - 3\,z \tag{2.19}$$

Dabei ist $w$ variabel. Jede der 6 Gleichungen bestimmt bekanntlich geometrisch eine Ebene.

(a) Bestimme $a$, $b$ und $c$ derart, dass die ersten vier Ebenen sich auf der $z$–Achse schneiden.

(b) Immer drei Gleichungen der ersten fünf Gleichungen bestimmen einen Schnittpunkt von drei Ebenen. Berechne diese Schnittpunkte, falls sie existieren.

(c) Bestimme die Anzahl der möglichen Schnittpunkte.

(d) Skizziere die Situation. Falls die fünf ersten Ebenen einen (oder mehrere) Körper einschliessen, soll das aus der Skizze ersichtlich sein. Der eingeschlossene Bereich sei mit $K$ bezeichnet.

(e) In $w = -x + 2\,y - 3\,z$ seien $(x/y/z)$ die Koordinaten eines Punktes $P \in K$. Bestimme diesen Punkt so, dass $w$ minimal wird. (Begründe die Lösung!)

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Sei $z_1 = 2 + 4\,i \in \mathbb{C}$.

(a) Löse die Gleichung $z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$ sowie die Gleichung $i \cdot z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$

(b) Stelle die Lösungen der beiden Gleichungen graphisch dar und nummeriere sie je beginnend mit der Basislösung in aufsteigender Reihenfolge.

(c) Löse die folgende Gleichung $z_1 + i \cdot z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$, die aus Teilen der ersten beiden Gleichungen gebildet worden ist. Stelle diese Lösungen ebenfalls in der Graphik dar.

(d) Beurteile, ob alle Lösungen der dritten Gleichung aus je zwei entsprechenden Lösungen (mit gleicher Nummer) der beiden ersten Gleichungen durch die gleiche Linearkombination gebildet werden können.

(e) Löse die Gleichung $2\,i\,(z_1^2 - z_1) = (z-1)^5 \in \mathbb{C}$

(f) Addiere alle Lösungen der letzten Gleichung und bilde das arithmetische Mittel. Stelle die Lösungen sowie das gewonnene arithmetische Mittel graphisch dar.

(g) Wie lässt sich die gefundene Lage des arithmetischen Mittels erklären?

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Punkte $P_1(2/0)$ und $P_2(0/1)$ sowie $Q_1(1/2)$ und $Q_2(-3/-4)$.

(a) Berechne diejenige Matrix $M$, die die folgende Abbildung leistet:
$P_1 \longmapsto Q_1,\;\; P_2 \longmapsto Q_2$. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(b) Berechne den Mittelpunkt $P_M$ von $\overline{P_1P_2}$ und suche den Bildpunkt $P'_M$ bei der Abbildung $M$. Beantworte die Frage, ob $P'_M = Q_M$ gilt. (Begründe die Antwort.)

(c) Entscheide, ob $M$ eine reguläre Matrix darstellt. (Begründe die Antwort.)

(d) Berechne die Eigenwerte von $M$. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(e) Berechne die Eigenvektoren von $M$ (Näherungen genügen. Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.).

(f) Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis der Eigenvektoren graphisch dar und ebenfalls den Bildvektor. (Skizze.)

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Von einer unbekannten Matrix $A$ kennt man den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1, den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2 und den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3.

(a) Berechne Matrix $A$ exakt. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(b) Berechne die Skalarprodukte der Eigenvektoren $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_k \rangle,\;\; j \neq k$. Kommentiere das Resultat.

(c) Berechne die normierten Eigenvektoren $\vec{v}_i$ von $A$. (Näherungen genügen.)

(d) Bilde mit den normierten Eigenvektoren die Matrix $X = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

(e) Bilde mit den Eigenwerten $\lambda_i$ die Matrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ und berechne

$$X \cdot D \cdot X^{-1}\;.$$

(f) Berechne die Matrix $B = X \cdot D^2 \cdot X^{-1} - A^T$ .

(g) Berechne die Eigenwerte von $B$ und kommentiere das Resultat.

(h) Entscheide, ob $B$ regulär ist und begründe die Aussage.

— ENDE — ◇ — FIN —

Haute école spécialisée bernoise, école d'ingénieurs Bienne 19 septembre 2000

## 2.28 Examen de diplôme préalable 2 en mathématiques 2000

**Classe F1**

*Bonne chance !*

**Aufgabe 1** **(12 points)**

*Les mesures suivantes sont données en mètres. L'unité de mesure sert seulement à la compréhension et peut être omise dans le calcul.*

Dans un hall de fabrication, un tube en forme d'un cylindrique circulaire, qui contient une bande transporteuse, pend au plafond. Le rayon extérieur est 5 et l'axe du cylindre est donné par la droite suivante: $g:\ \vec{x}(\lambda) = (-6,-2,4)^T + \lambda\cdot(12,16,4)^T$. L'écart axial à la suite de fluctuations de température est donné par $\pm 0.03$.

Maintenant un ingénieur a le devoir de bâtir un deuxième tube qui relie les points $Q_1(3/5/2)$ et $Q_2(4/16/9)$. La tolérance axiale doit être la même que pour la première conduite.

(a) Calculer la distance la plus petite entre les axes théoriques et décider si une installation droite du deuxième tube est en effect possible. (Le chemin de solution doit être visible.)

(b) Examiner, si l'axe du deuxième tube qui passe au–dessus d'ou au-dessous de l'axe du tube déjà disponible. (Le résultat est à justifier.)

**Aufgabe 2** **(12 points)**

Un plan $\Phi_1$ est donné par les points $A(1/-2/0)$, $B(3/3/6)$, $C(-1/0/1)$.

Un deuxième plan $\Phi_2$ est déterminé par l'équation vectorielle $\Phi_2$

$$\Phi_2:\ \vec{x}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

En outre, $K$ soit une sphère avec le rayon inconnu $r$ et le centre $M(2/1/2)$.

Le point $P$ a les coordonnées $P(2/2/0)$ et le point $Q$ les coordonnées $Q(-2/0/5)$. Si on reflète $P$ à $\Phi_1$, on obtient le point $P'$.

(a) Dessiner la situation.

(b) Déterminer le rayon de la sphère pour le cas, dans lequel la droite d'intersection $s = \Phi_1 \cap \Phi_2$ est tangente à la sphère. (Le chemin de solution doit être visible.)

(c) Calculer les coordonnées de $P'$. (Le chemin de solution doit être visible.)

(d) Examiner, si la droite $g = \overline{PQ}$ a un point d'intersection avec la sphère. (Le résultat est à documenter.)

(e) Examiner, si les droites $s$ et $g$ sont gauches. (Le résultat est à documenter.)

**Aufgabe 3** **(12 points)**

Soient données les équations suivantes:

$$
\begin{aligned}
1 &= x + y - a\,z & (2.20)\\
1 &= x - y + 2\,z & (2.21)\\
1 &= -x + y + b\,z & (2.22)\\
1 &= -x - y + c\,z & (2.23)\\
0 &= z & (2.24)\\
w &= -x + 2\,y - 3\,z & (2.25)
\end{aligned}
$$

$w$ est variable. Chacune des 6 équations détermine un plan, comme nous savons.

(a) Déterminer $a$, $b$ et $c$ de façon à ce que les quatre plans aient une droite d'intersection sur l'axe $z$.

(b) Toujours trois équations des premières cinq équations déterminent un point d'intersection de trois plans. Calculer ces points d'intersection s'ils existent.

(c) Déterminer le nombre des points d'intersection possibles.

(d) Dessiner la situation. Si les cinq premiers plans enferment un (ou plusieurs) volumes, cela devrait être évident dans le croquis. Le domaine inclus est à appeler $K$.

(e) Dans $w = -x + 2\,y - 3\,z$ l'expression $(x/y/z)$ décrit les coordonnées du point $P \in K$. Déterminer ce point de façon à ce que $w$ devienne minimal. (La solution est à documenter.)

**Aufgabe 4** **(12 points)**

Sei $z_1 = 2 + 4\,i \in \mathbb{C}$.

(a) Résoudre l'équation $z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$ ainsi que l'équation $i \cdot z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$ .

(b) Documenter graphiquement les solutions des deux équations et numéroter les solutions commençant par la solution de base dans l'ordre ascendant.

(c) Résoudre l'équation composée suivante $z_1 + i \cdot z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$ et représenter les solutions de façon graphique.

(d) Juger si les solutions de la troisième équation peuvent être obtenues toutes par la même combinaison linéaire de deux solutions correspondantes (avec le même numéro) des premières deux équations.

(e) Résoudre l'équation $2\,i\,(z_1^2 - z_1) = (z-1)^5 \in \mathbb{C}$ .

(f) Additionner toutes les solutions de la dernière équation et calculer la moyenne arithmétique. Documenter graphiquement les solutions de cette équation et aussi la moyenne arithmétique.

(g) Comment expliquer cette situation géométrique de la moyenne arithmétique?

**Aufgabe 5** **(12 points)**

Soient donnés les points $P_1(2/0)$ et $P_2(0/1)$ ainsi que $Q_1(1/2)$ et $Q_2(-3/-4)$.

(a) Calculer la matrice $M$ qui donne l'application suivante:
$P_1 \longmapsto Q_1,\;\; P_2 \longmapsto Q_2$. (Le chemin de solution doit être visible.)

(b) Calculer le centre $P_M$ de $\overline{P_1P_2}$ et trouver le point image $P'_M$ pour l'application $M$. Répondre à la question s'il vaut $P'_M = Q_M$. (Documenter la réponse.)

(c) Décider, si $M$ représente une matrice régulière. (Documenter la réponse.)

(d) Calculer les valeurs propres de $M$. (Le chemin de solution doit être visible.)

(e) Calculer les vecteurs propres de $M$ (Il suffit d'approximer. Le chemin de solution doit être visible.)

(f) Représenter le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base des vecteurs propres de façon graphique et aussi le vecteur image. (Esquisse.)

**Aufgabe 6** **(12 points)**

On connaît d'une matrice inconnue $A$ le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lié à la valeur propre 1, le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ lié à la valeur propre 2 et le vecteur propre $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ lié à la valeur propre 3.

(a) Calculer la matrice $A$ de façon exacte. (Le chemin de solution doit être visible.)

(b) Calculer le produit scalaire des vecteurs propres $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_k \rangle,\;\; j \neq k$. Commenter le résultat.

(c) Calculer les vecteurs propres normés $\vec{v}_i$ de $A$. (Il suffit d'approximer.)

(d) Composer avec les vecteurs propres normés la matrice $X = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

(e) Composer à l'aide des valeurs propres $\lambda_i$ la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et calculer $X \cdot D \cdot X^{-1}$ .

(f) Calculer la matrice $B = X \cdot D^2 \cdot X^{-1} - A^T$ .

(g) Calculer la valeur propre de $B$ et commenter le résultat.

(h) Décider si $B$ est régulière et documenter la décision.

— ENDE — ◇ — FIN —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 18. September 2000

## 2.29 Vordiplomprüfung 1 in Algebra 2000

**Klasse E1b**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix}$, $r, s$ sind Parameter.

(a) Berechne das charakteristische Polynom mit der Variablen $\lambda$.

(b) Bestimme die Eigenwerte exakt. (Der Rechnungsweg muss begründet werden.)

(c) Bestimme die Eigenvektoren exakt. (Der Rechnungsweg muss sichtbar sein.)

(d) Diagonalisiere die Matrix $A$.

(e) Sei $A^2 := A \cdot A,\ A^n = A^{n-1} \cdot A$
Untersuche, was mit $A^n \cdot \vec{x}$ passiert, wenn $n$ immer grösser wird. und berechne $\lim\limits_{n\to\infty} A^n \cdot \vec{x}$ exakt.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Zu einer linearen Abbildung $\mathcal{B}$ gehört eine Matrix $B$. Diese bildet die drei Seitenvektoren eines Spats wie folgt ab:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Entscheide, ob die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ linear unabhängig sind. (Der Entscheid ist zu begründen.)

(b) Berechne die Matrix $B$. (Der Weg ist zu begründen.)

(c) Bestimme die Eigenwerte von $B$ exakt. (Das Resultat ist zu begründen.)

(d) Bestimme allgemein das Bild der Ebene $\Phi(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 \cdot 2\,\vec{x}_1 + \mu_2 \cdot 6\,\vec{x}_2 + 4\,\vec{x}_3$. (Das Resultat ist zu begründen.)

(e) Berechne $B^T$ und bilde damit die Gerade $g:\ \vec{x}(\lambda) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Skizziere und interpretiere das Resultat.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben ist das Dreieck $ABC$ $[(0/0),\ (12/0),\ (0/9)]$.

(a) Mache eine Skizze und berechne die Radien des Inkreises sowie der drei Ankreise. *Hinweis: Die Formeln für die Kreisradien können nachgeschlagen werden.*

Zeige (oder widerlege) für dieses Dreieck die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

(b) Die drei Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit den Berührungspunkten des Inkreises auf den Gegenseiten schneiden einander in einem Punkt $G$ (*Gergonne*scher Punkt).

(c) Berechne $G$, falls die Aussage richtig ist.

(d) Die drei Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit den Berührungspunkten der Ankreise auf den Gegenseiten schneiden einander in einem Punkt $N$ (*Nagel*scher Punkt).

(e) Berechne $N$, falls die Aussage richtig ist.

(f) Untersuche gegebenenfalls, ob alle der Punkte {Inkreismittelpunkt, Schwerpunkt, Geronnscher Punkt, Nagelscher Punkt} auf einer Geraden liegen — oder ob allenfalls drei dieser Punkte diese Eigenschaft zeigen.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilaufgaben.

(a) Gegeben ist die komplexe Zahl $z = r \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$. Untersuche ob es möglich ist $r$ so zu wählen, dass die Punkte 0, $z$ und $z^{-1}$ in der komplexen Ebene ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Berechne und skizziere allenfalls existierende Lösungen.

(b) In $\mathbb{C}$ ist die folgende Gleichung gegeben:

$$10\,z^4 - 39\,z^3 + a\,z^2 + b\,z - 15 = 0$$

Von den Lösungen $z_1, z_2, z_3$ und $z_4$ kennt man die Beziehungen:

$$z_3 + z_4 = 4 \text{ und } z_1 \cdot z_2 = -\frac{3}{10}.$$

Bestimme $a$ und $b$ sowie die Lösungen.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Durch die folgenden vier Ebenen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ und $\Phi_4$ wird ein Tetraeder bestimmt:

$$\Phi_1 : \ \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x} \rangle = -23, \qquad \Phi_2 : \ \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{x} \rangle = 68,$$

$$\Phi_3 : \ \langle \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x} \rangle = -28, \qquad \Phi_4 : \ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} \rangle = 6$$

(a) Berechne die Koordinaten der vier Eckpunkte. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(b) Das Tetraeder wird um $+\dfrac{\pi}{3}$ um die $z$–Achse gedreht. Berechne die Koordinaten der vier neuen Eckpunkte.

(c) Berechne den Volumeninhalt der grössten Kugel, die dem Tetraeder eingeschrieben werden kann. (Idee und Lösungsweg müssen sichtbar sein.)

(d) Berechne das Verhältnis der Volumina des Tetraeders und der Kugel.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Matrixgleichung $M \cdot X \cdot X^T \cdot M^{-1} - E^k = N, \ \ k \in \mathbb{N}$. ($N$ ist die Nullmatrix, $E$ die Einheitsmatrix.) $M$ ist eine beliebige reguläre Matrix. Von der regulären Matrix $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ wissen wir, dass $x_3 = \dfrac{1}{4}$ gilt.

(a) Berechne die Matrix $X$. (Wenn es mehrere Lösungen gibt, sind alle Lösungen zu bestimmen.)

(b) Verwende diejenige Lösung, bei der die negativen Matrixelemente am Schluss kommen. Berechne damit das Bild des Kreises $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ in Vektorform. (Schreibe dazu den Kreis in Vektorform mit einer Variablen $t$.)

(c) Begründe, ob es sich beim gefundenen Bild um eine Ellipse handelt oder nicht.

(d) Skizziere die Kurve.

— ENDE — ◇ — FIN —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 18. September 2000

## 2.30 Vordiplomprüfung 1 in Analysis 2000

**Klasse E1b**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $f:\ \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R},\ \ x \longmapsto 5\,(x^2 - 2\,x - 15)$ und $g:\ \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$. Die Graphen beider Funktionen schneiden einander in zwei Punkten auf der $x$–Achse. Im rechten Schnittpunkt fallen ausserdem die Tangenten an die beiden Kurven zusammen.

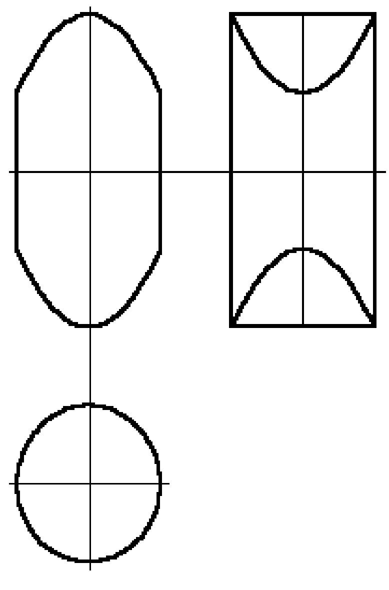
(a) Berechne $a$, $b$ und $c$ exakt. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

(b) Zeichne die Graphen der beiden Kurven im Intervall $[-4, 6]$.

(c) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das von den beiden Kurven eingeschlossen wird.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Ein rotationssymmetrischer Schwimmkörper, der ausser an den beiden Deckflächen die Form eines Zylinders hat, ist derart in ein Koordinatensystem gestellt, dass die $z$–Achse gleich der Rotationsachse ist. Der Zylinderradius ist gleich 5 und die beiden Deckflächen des Körpers werden durch die Funktion $z = f_d(x, y) = -x^2 + 50$ und $z = f_g(x, y) = -f_d(x, y)$ gegeben. (Vgl. Skizze mit Grundriss, Aufriss und Seitenriss.)



(a) Berechne das Volumen des Körpers exakt. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

(b) Berechne die Oberfläche des Körpers. (Wenn eine exakte Berechnung nicht möglich ist, genügt auch eine numerische Näherung. Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

**Zusatzaufgabe** (kann weggelassen werden): **(6 Punkte)**

(c) Der Körper wird axial zur $x$–Achse zylindrisch durchbohrt. Es entsteht ein Loch mit dem Durchmesser 5. Berechne das Restvolumen des Körpers. (Wenn eine exakte Berechnung nicht möglich ist, genügt auch eine numerische Näherung. Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $f(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $g(x) = 2 - f(x)$.

(a) Skizziere $f(x)$ und $g(x)$ und bezeichne $f(x)$ mit dem sonst üblichen Namen.

(b) Die Funktion $g(x)$ soll im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ durch $u(x) = a \cdot \cos(x) + b$ approximiert werden. Bestimme die Parameter $a$ und $b$ so, dass $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - u(x))^2 \, dx$ minimal wird. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein. Numerische Werte genügen.)

(c) $u(0) = ?$, $u(-\dfrac{\pi}{2}) = ?$, $u(\dfrac{\pi}{2}) = ?$

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktione $f(x)$, die einen Kreisbogen mit Radius $r = 1$ sowie Kreismittelpunkt $(x_M/y_M) = (0/1)$ beschreibt und durch den Punkt $P(0/2)$ geht. Weiter ist die Funktion $g(x) = k \cdot \cos(\alpha\, x + \beta) + c$ gegeben. $k, \alpha, \beta$ und $c$ sind Parameter.

Die Parameter $k, \alpha, \beta$ und $c$ sind so zu bestimmen, dass die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in $P$ möglichst gut zueinander passen. Damit ist gemeint, dass die folgenden Kriterien erfüllt sein müssen: Die Graphen von $f$ und $g$ fallen im Punkte $P$ zusammen, haben in $P$ eine gemeinsame Tangente und auch dieselbe Krümmung.

Durch diese drei Bedingungen kann man drei Parameter als Funktion des vierten Parameters bestimmen.

(a) Bestimme $k, \beta$ und $c$ als Funktion von $\alpha$. (Der Lösungsweg muss dokumentiert sein.)

(b) Bestimme anschliessend die Potenzreihenentwicklungen von $f$ und von $g = g_\alpha$. (Die Reihen können mit Hilfe von Tabellenbüchern gefunden werden. Die Angabe von Gliedern bis zur Ordnung 10 genügen.)

(c) Entscheide anhand der nun vorliegenden Potenzreihenentwicklung von $g_\alpha(x) - f(x)$, was mit $|g_\alpha(x) - f(x)|$ passiert, wenn $\alpha$ gegen 0 strebt.

(d) Berechne damit $\lim\limits_{\alpha \to 0} g_\alpha(x)$ und skizziere in diesem Falle $f$ und $g_\alpha$.

(e) Beschreibe den Einfluss von $\alpha$ auf das Annäherungsverhalten von $g_\alpha(x)$ an $f(x)$

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = 3\,x^2 - 5\,x\,y + 4\,y^2 - y + x - 1$ im Gebiet $G$, $G = I \times I = [-1,1] \times [-1,1]$ .

(a) Berechne die Extrema oder Sattelpunkte im Innern und auf dem Rand.

(b) Durch den Rand $\partial G$ von $G$ lassen sich vier Geraden legen. Untersuche, in welchen Punkten $P_i$ auf diesen vier Geraden die maximale Richtungsableitung lokale Extrema hat. (Untersuche dazu die Länge des Gradienten.) Entscheide, ob die gefundenen Extrema Minima oder Maxima sind.

(c) Skizziere $G$ mit den berechneten Extrema von $f$. Zeichne ebenfalls die berechneten Punkte $P_i$ ein. Verbinde je zwei sich entsprechende Punkte auf gegenüberliegenden Geraden und kontrolliere, ob sich die Verbindungsgeraden in einem ausgezeichneten Punkt kreuzen. Was stellt man fest? Ist etwas bemerkenswert?

(d) Bestimme, in welchen Punkten der Geraden $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$ in der Grundebene $f(x,y)$ extremal wird. (Die Punkte auf dem Rand sind auch in die Betrachtung einzubeziehen.)

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Ein in der Tropenzone geplantes Stadion hat nach dem Vorbild einer römischen Arena die Form eines Zylinders mit einem Durchmesser von 250 Metern und einer Mantelhöhe von 25 Metern. Um die heutzutage gefürchtete UV–Strahlung abzuhalten wird vorgeschlagen, das Bauwerk zeltartig mit Hilfe eines bis zum Boden reichenden Rotationsparaboloides zu überdachen, wobei dieses geplante Zelt den oberen Zylinderrand berührt. (Skizziere die Situation!)

(a) Berechne den Zeltradius und die Zelthöhe, wenn der umbaute Raum minimal werden soll.

(b) Berechne im Falle des minimalen Volumens die Mantellänge vom Boden bis zum obersten Punkt des Zeltes numerisch.

(c) Berechne den Zeltradius und die Zelthöhe, wenn die Zeltoberfläche minimal werden soll. (Falls diese Aufgabe auf den ersten Blick zu schwierig erscheinen mag, so versuche man zuerst, die Oberfläche des einfachst möglichen Rotationsparaboloids zu berechnen. Für die Integration können Hilfsmittel wie Tabellen etc. verwendet werden.)

— ENDE — ◇ — FIN —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 18. September 2000

## 2.31 Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2000

**Klasse B2**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

*In der folgenden Aufgabe sind die Masse in Decametern angegeben. Die Masseinheit dient nur dem Verständnis und darf in der Rechnung weggelassen werden.*

In einem Plan eines Geometers ist die Lage einer im Boden versenkten Röhre mit dem äussern Radius 5 durch zwei Punkte mit den folgenden Koordinaten definiert: $P_1(3/5/2)$, $P_2(4/16/9)$. Man weiss, dass die Röhre längs einer Geraden geführt ist mit einer axialen Abweichung von $\pm 0.03$.

Nun soll in der selben Zone eine zweite Röhre mit demselben Durchmesser und derselben axialen Toleranz verlegt werden. Diese neue Röhre ist durch die Koordinaten $Q_1(-6,-2,4)$, $Q_2(6,14,8)$ bestimmt.

(a) Berechne den kleinsten Abstand zwischen den theoretischen Achsen und entscheide, ob eine gerade Verlegung der zweiten Leitung überhaupt möglich ist. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(b) Untersuche, ob die Achse der neuen Röhre oberhalb oder unterhalb der Achse der schon vorhandenen Röhre verläuft. (Das Resultat ist zu begründen.)

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.

(a) Bestimme von Hand die Steigung der folgenden Funktion an den Stellen $x=0$ und $x=1$: $\quad f_a(x) = 5\,x^5 - 4\,x^{\alpha} + \dfrac{1}{2}\,x^2 - 4\,x + 9$

(b) Differenziere von Hand: $\quad f_b(x) = 3\,x^5 - \dfrac{2}{x^2} + ln(x) + \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{2}$

(c) Berechne von Hand die zweite Ableitung: $f_b(x) = 3\,x^5 - \dfrac{2}{x^2} + ln(x) + \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{2}$

(d) Berechne von Hand die erste Ableitung von Hand:

$$f_d(x) = \cos(x)\cdot e^x - \frac{1}{2}\,\cos(2\,x+\alpha) + x\;ln(x)$$

(e) Berechne von Hand die erste Ableitung: $f_e(x) = \cos(\sin(x)) - ln(x^3) + \dfrac{ln(x)}{x^2}$

(f) Berechne numerisch den Winkel zwischen den Tangenten an den Graphen der folgenden Funktion in den Punkten $x = 100$ und et $x = -100$: $f_f(x) = -2\,x^4 + 6\,x^2 + 8$. Das gefundene Resultat ist zu kommentieren.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.

(a) Integriere von Hand: $\int 5\,x^5 - 4\,x^\alpha + \dfrac{1}{2}\,x^2 - 4\,x + 9\,dx = ?$

(b) Integriere von Hand: $\int\limits_0^{t^2} x^2\,dx = ?$

(c) Integriere von Hand: $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{1}{\omega}\,\cos(\omega t + \beta)\,dt = ?$

(d) Integriere von Hand: $\int\limits_{-1}^{1} y \cdot e^y\,dy = ?$

(e) Integriere von Hand: $\int\limits_0^{1} x \cdot e^{(x^2)}\,dx = ?$

(f) Integriere von Hand: $\int\limits_a^{t} \dfrac{d}{d\,x}\log(e^{x^2} + 2\,x\,\cos^2(3\,x - 2))\,dx = ?$

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion durch das Polynom $p(x) = \dfrac{2}{27}\,x^4 - \dfrac{4}{9}\,x^3$. Bestimme folgendes:

(a) Faktorisiere das Polynom und berechne dann die Nullstellen.

(b) Berechne die Extrema. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(c) Berechne allfällige Wendepunkte ($p''(x) = 0$) und die Steigung der Wendetangenten (Tangenten in den Wendepunkten). (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

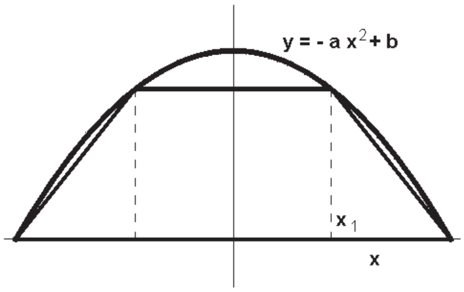
(d) Definitionsbereich $D_p$ und Wertebereich $W_p$?

(e) Skizziere den Graphen der Funktion.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

(a) Der Grundriss eines Hauses, das in einen Abhang hineingebaut wird, soll nach dem folgenden Prinzip festgelegt werden: Zwischen der Parabel

$y = f_5(x) = -a\,x^2 + b \quad (a, b > 0)$
und der $x$–Achse wird ein Trapez eingeschrieben (vgl. Skizze).




Berechne die $x$–Koordinate $x_1$ des rechten oberen Punktes des Trapezes mit dem maximal möglichen Inhalt. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(b) Das Volumen des Aushubes beträgt schätzungsweise etwa einen Viertel des Volumens, das entsteht, wenn man die Parabel um die $x$–Achse rotieren lässt. Berechne dieses Volumen. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(c) Berechne die Resultate für $a = \dfrac{1}{4}$ und $b = 36$.

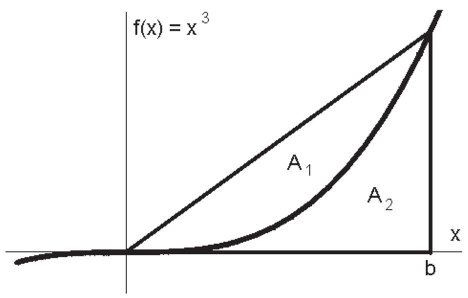
**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

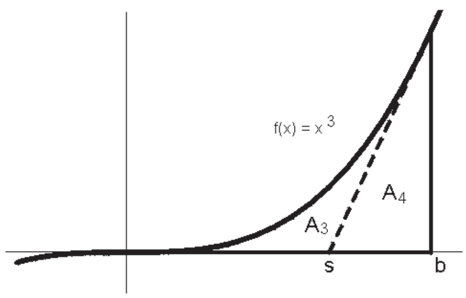
Gegeben ist die Funktion $f(x) := x^3$ und das Dreieck $ABC$ mit den Eckpunkten $A(0/0)$, $B(b/0)$ und $C(b/f(b))$. (Vgl. Skizze unten.)

(a) Der Graph der Funktion teilt die Fläche dieses Dreiecks in zwei Teile $A_1$ und $A_2$ (vgl. Skizze). Berechne das Verhältnis der Inhalte von $A_1$ und $A_2$ in Anhängigkeit von $b$.

(b) Die Tangente an den Funktionsgraphen in $C$ schneidet die $x$–Achse bei der Koordinate $s$. Dadurch wird die Fläche unter dem Graphen in zwei Teile $A_3$ und $A_4$ geteilt (vgl. Skizze). Berechne $s$.

(c) Berechne das Verhältnis der Inhalte von $A_3$ und $A_4$ in Anhängigkeit von $s$.




— ENDE — ◇ — FIN —

Haute école spécialisée bernoise, école d'ingénieurs Bienne 18 séptembre 2000

## 2.32 Examen de diplôme préalable 2 en mathématiques 2000

**Classe B2**

*Bonne chance !*

**Aufgabe 1** **(12 points)**

*Les mesures suivantes sont données en decamètres. L'unité de mesure sert seulement à la compréhension et peut être omise dans le calcul.*

Dans un plan d'un géomètre, la situation d'une conduite enterrée dans le sol avec le rayon extérieur de 5 est donnée par deux points avec les coordonnées suivantes: $P_1(3/5/2)$, $P_2(4/16/9)$. On sait que la conduite suit une droite longitudinalement avec un écart axial de $\pm 0.03$.

Maintenant il faut placer une deuxième conduite dans la même zone avec le même diamètre et la tolérance axiale qui est aussi la même. Cette nouvelle conduite est déterminée par les coordonnées $Q_1(-6,-2{,}4)$, $Q_2(6{,}14{,}8)$.

(a) Calculer la plus petite distance entre les axes théoriques et décider si un déplacement droit de la deuxième conduite est en effet possible. (Le chemin de solution doit être visible.)

(b) Examiner, si l'axe de la nouvelle conduite passe au–dessus d'ou au-dessous de l'axe de celle qui est déjà là. (Le résultat est à documenter.)

**Aufgabe 2** **(12 points)**

Les problèmes partiels suivants sont indépendants. Pour chaque problème partiel on donne le même nombre de points. Toutes les étapes partielles de la solution sont à retenir par écrit sur la feuille de solution.

(a) Calculer à la main la montée de la fonction suivante aux places $x = 0$ et $x = 1$:
$$f_a(x) = 5\,x^5 - 4\,x^\alpha + \frac{1}{2}\,x^2 - 4\,x + 9$$

(b) Calculer à la main la dérivée: $f_b(x) = 3\,x^5 - \dfrac{2}{x^2} + ln(x) + \dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{2}$

(c) Calculer à la main la deuxième dérivée: $f_b(x) = 3\,x^5 - \dfrac{2}{x^2} + ln(x) + \dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{2}$

(d) Calculer la première dérivée à la main: $f_d(x) = \cos(x)\cdot e^x - \dfrac{1}{2}\cos(2\,x + \alpha) + x\; ln(x)$

(e) Calculer à la main la première dérivée: $f_e(x) = \cos(\sin(x)) - ln(x^3) + \dfrac{ln(x)}{x^2}$

(f) Calculer numériquement les angles entre les tangentes aux graphes de la fonction suivante dans le points $x = 100$ et $x = -100$: $f_f(x) = -2\,x^4 + 6\,x^2 + 8$. Le résultat trouvé est à commenter.

**Aufgabe 3** **(12 points)**

Les problèmes partiels suivants sont indépendants. Pour chaque problème partiel on donne le même nombre de points. Toutes les étapes partielles de la solution sont à retenir par écrit sur la feuille de solution.

(a) Intégrer à la main: $\int 5\,x^5 - 4\,x^\alpha + \frac{1}{2}\,x^2 - 4\,x + 9\,dx = \,?$

(b) Intégrer à la main: $\int\limits_0^{t^2} x^2\,dx = \,?$

(c) Intégrer à la main: $\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\omega}\,\cos(\omega t + \beta)\,dt = \,?$

(d) Intégrer à la main: $\int\limits_{-1}^{1} y \cdot e^y\,dy = \,?$

(e) Intégrer à la main: $\int\limits_0^{1} x \cdot e^{(x^2)}\,dx = \,?$

(f) Intégrer à la main: $\int\limits_a^{t} \frac{d}{d\,x} \log(e^{x^2} + 2\,x\,\cos^2(3\,x - 2))\,dx = \,?$

**Aufgabe 4** **(12 points)**

Soit donnée une fonction par le polynôme $p(x) = \frac{2}{27}\,x^4 - \frac{4}{9}\,x^3$. Calculer les choses suivantes:

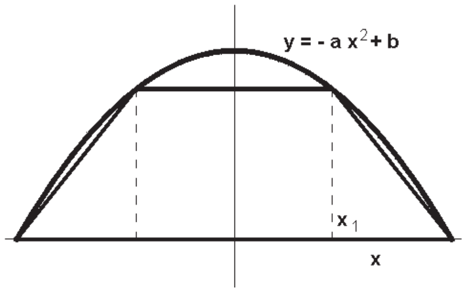
(a) Factoriser le polynôme et calculer ensuite les places de zéro.
(b) Calculer les extrema. (Le chemin de solution doit être visible.)
(c) Calculer les points d'inflexion possibles ($p''(x) = 0$) et la montée des tangentes d'inflexion (Tangentes dans les points solsticiaux).
(Le chemin de solution doit être visible.)
(d) Domaine de définition $D_p$ et domaine de valeur $W_p$?
(e) Dessiner le graphe de la fonction.

**Aufgabe 5** **(12 points)**

(a) Le plan d'une maison, qui est construite dans une pente, devrait être fixé d'après le principe suivant:
Entre la parabole

$y = f_5(x) = -a\,x^2 + b \quad (a,b > 0)$

et l'axe $x$ on inscrit un trapèze (voir esquisse).




Calculer la coordonnée $x$ (qui soit $x_1$) du point supérieur droit du trapèze avec le contenu maximal possible. (Le chemin de solution doit être visible.)

(b) Le volume de l'excavation se monte à approximativement environ un quart du volume qu'on obtient par rotation de la parabole autour de l'axe $x$. Calculer ce volume. (Le chemin de solution doit être visible.)

(c) Calculer les résultats pour $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = 36$.

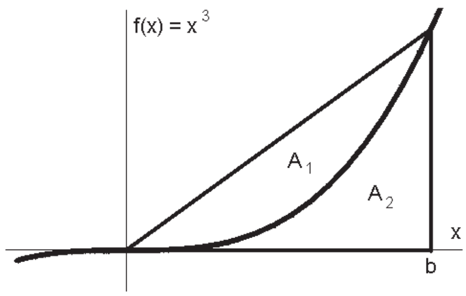
**Aufgabe 6** **(12 points)**

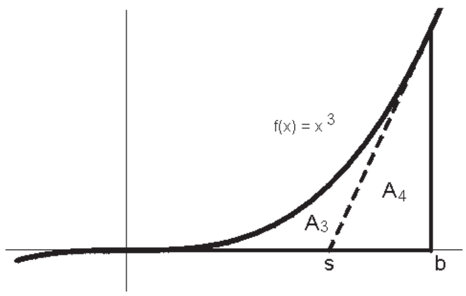
Soit donnée la fonction $f(x) := x^3$ et le triangle $ABC$ avec les sommets $A(0/0)$, $B(b/0)$ et $C(b/f(b))$. (Voir croquis ci-dessous.)

(a) Le graphe de la fonction partage la surface de ce triangle en deux parties $A_1$ et $A_2$ (voir croquis). Calculer le rapport du contenu de $A_1$ et $A_2$ en dépendance de $b$.

(b) La tangente au graphe de la fonction dans $C$ coupe l'axe $x$ dans la coordonnée $s$. Par cela la surface sous le graphe est divisée en deux parties $A_3$ et $A_4$ (voir croquis). Calculer $s$.

(c) Calculer le rapport du contenu de $A_3$ et de $A_4$ qui dépend de $s$.




— ENDE — ◇ — FIN —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 10. September 2001

## 2.33 Vordiplomprüfung 1 in Analysis 2001

**Klasse E1a**

*Viel Glück !*

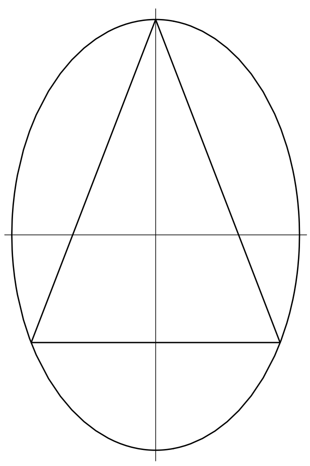
**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

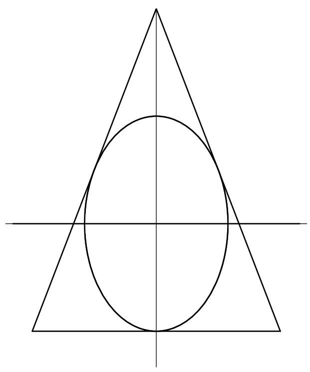
Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $s = 12$ und der Höhe $h = 18$.

(a) Um dieses Dreieck soll zuerst eine Ellipse mit den Halbachsen $a$ und $b$ so gelegt werden, dass die Basis des Dreiecks parallel zur kleineren Achse zu liegen kommt. $a$ und $b$ sollen so gewählt werden, dass der Flächeninhalt $A_1$ der Ellipse minimal wird. Berechnen Sie dieses $A_1$.

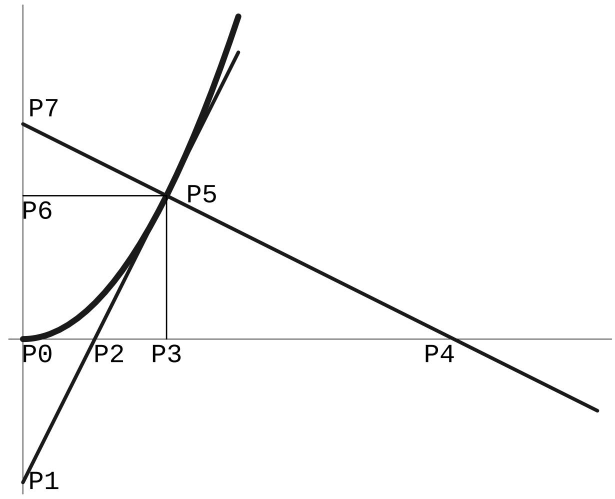
(b) Anschliessend soll in das Dreieck eine Ellipse mit den Halbachsen $c$ und $d$ so eingeschrieben werden, dass wieder die Basis parallel zur kleineren Achse ist und dass der Flächeninhalt $A_2$ maximal wird. Berechnen Sie $A_2$.

(c) Wie gross ist $A_1 : A_2$?





**Aufgabe 2**




Die Skizze zeigt eine Funktion $f(x) = a\,x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$. In $P_5(x_0, y = a\,x_0^n)$ sind die Tangente und die Normale gegeben. Die damit entstehenden Punkte $P_0 \dots P_7$ definieren Dreiecksflächen resp. Flächen, deren eine Begrenzungslinie der „Parabelbogen" ist.
Die Flächen werden wie folgt benannt (mache eine Skizze!):
$(P_0P_5P_6P_0) \leadsto A_1$, $(P_0P_3P_5P_0) \leadsto A_2$, $(P_0P_1P_2P_0) \leadsto A_3$,
$(P_2P_3P_5P_2) \leadsto A_4$, $(P_6P_5P_7P_6) \leadsto A_5$, $(P_3P_4P_5P_3) \leadsto A_6$.

Berechnen Sie die folgenden Verhältnisse der Flächeninhalte. Untersuchen Sie wie $n$ gewählt werden muss, damit das jeweilige Verhältnis unabhängig ist von $x_0$. Untersuchen Sie auch den Einfluss von $a$.

(a) $A_1 : A_2$

(b) $A_4 : A_2$

(c) $A_4 : A_3$

(d) $A_4 : A_5$

(e) $A_4 : A_6$

(f) $(A_4 \cdot A_4) : (A_5 \cdot A_6)$

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Zur Funktion $p(x) = -x + 1$ suchen wir über dem Intervall $[0, 1]$ eine andere Funktion $f(x) = \cos(\omega\,x) + h$ derart, dass $\int_0^1 (f(x) - p(x))^2\,dx$ minimal ist und $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt.

(a) Berechnen Sie das Integral von Hand

(b) Berechnen Sie $h$ und $\omega$. (Eine numerische Näherung genügt.)

(c) Skizzieren Sie die Graphen von $p(x)$ und der gefundenen Funktion $f(x)$ im selben Diagramm.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Ein ebener Kreiszylinder mit dem Radius $R = 4$ ist derart in ein Koordinatensystem einer „Lehren–Bohrmaschine" gestellt, dass die $z$–Achse die Zylinderachse ist. Die ebene Grundfläche befindet sich auf der Höhe $z = -5$ und die ebene Deckfläche auf der Höhe $z = 5$.
Der in der Bohrmaschine eingespannte Bohrer hat einen Durchmesser von $d = 2$. Seine Achse ist parallel zur $y$–Achse und hat von der Zylinderachse einen senkrechten Abstand von $a = 2$. (Aus der Situation folgt, dass dieser Abstand $a$ exakt in $x$–Richtung gemessen ist.) Es gilt $z = 2$.

(a) Machen Sie sich eine räumliche Skizze von der Situation.

(b) Berechnen Sie approximativ das Volumen des entstehenden Abfalls beim Ausbohren des Loches. Wieviel Prozent des ursprünglichen Volumens wird Abfall?

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = z := x^4 + y^2$. Durch $|grad(f)| = 1$ wird in der Grundebene eine Kurve $C$ definiert.

(a) Berechnen Sie die Kurve $C$ als Vektorfunktion und skizzieren Sie $C$. Skizzieren Sie auch $z = f(x, y)$ resp. $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y) \ \wedge \ (x, y) \in C\}$ für $x \geq 0, \ \ y \geq 0$.

(b) Bestimmen Sie $C$ für $x \geq 0, \ \ y \geq 0$ als Funktion $y = h(x)$ und ermitteln Sie dort den Definitionsbereich von $h$.

(c) Berechne Sie die Extremalstellen von $z = f(x, y)$ für $(x, y) \in C$ resp. $y = h(x)$ mit Hilfe der Methode von Lagrange.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $g(z) = \dfrac{1}{a+z}$ und $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. Um $f(x)$ rasch von Hand in eine Potenzreihe zu entwickeln und dabei die infolge der Quotientenregel anfallenden grossen Ausdrücke für die Koeffizienten zu vermeiden, gehen wir wie folgt vor:
Entwickelt man $g(z)$ sowie $e^x$ in eine Potenzreihe, so findet man:

$$g(z) = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \frac{z^3}{a^4} + \frac{z^4}{a^5} - \frac{z^5}{a^6} + \frac{z^6}{a^7} - \frac{z^7}{a^8} + \frac{z^8}{a^9} - \frac{z^9}{a^{10}} + \frac{z^{10}}{a^{11}} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800} + \ldots$$

Setzt man nun $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{x}{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \ldots) - 1} = \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \ldots} = \dfrac{1}{1+z}$,
so ist $a = 1$ und $z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \ldots$

(a) Berechnen Sie *von Hand* die ersten vier Koeffizienten $B_k$ in der Potenzreihenentwicklung von

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \ldots} := B_0 + \frac{B_1}{1!}\,x + \frac{B_2}{2!}\,x^2 + \ldots$$

der Reihe nach aus der Gleichung

$$1 = (1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \ldots) \cdot (B_0 + \frac{B_1}{1!}\,x + \frac{B_2}{2!}\,x^2 + \ldots).$$

*Bemerkung: Die Zahlen $B_k$ heissen* **Bernoullische Zahlen.**

(b) Berechnen Sie damit eine Näherungsformel für $\int\limits_0^{x^n} \frac{t}{e^t - 1}\,dt, \qquad (x^n \leq 1).$

(c) Berechnen Sie den Konvergenzradius von $g(z)$ sowie von $e^x$. Was lässt sich daraus für den Konvergenzradius von $f(x)$ folgern?
*Hinweis: $g(z)$ hat mit einer geometrischen Reihe zu tun!*

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Ein vollkommen biegsamer, schwerer und an zwei Punkten aufgehängter Faden, der sich im Gleichgewicht befindet, nimmt die Form einer Kettenlinie an, welche durch die Funktion $f(x) = a\,\cosh(\frac{x}{a})$ beschrieben wird. Sei $P(x) := (x, f(x))$ und $a = 2$.

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-1, 1]$.

(b) Berechnen Sie den Krümmungsradius der Kurve für $x = 0$ und für $x = 1$.

(c) Berechnen Sie den Krümmungsmittelpunkt $M$ für $x = 1$. Zeichnen Sie $M$ in den Graphen ein. ($M$ liegt auf der Normalen $n$ zur Tangente $t$. Die Normale schneidet die $x$–Achse in $S$)

(d) Berechnen Sie für $x = 1$ die Streckenlängen $|\overline{MP}|$ und $|\overline{PS}|$. Ist zum Resultat etwas zu bemerken?

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 10. September 2001

## 2.34 Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2001

**Klasse B2**

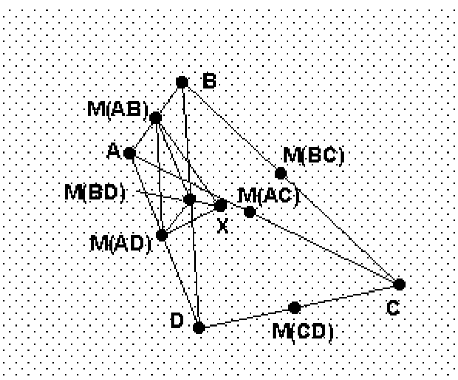
*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Gegeben ist ein Tetraeder $T(ABCD)$ mit den Eckpunkten $A, B, C, D$.
$A = A(1, 1, 1),\ B = B(-1, 2, 3),\ C = C(5, 4, 7),\ D = D(3, 8, 11)$. $V$ ist das Volumen.
Mit $M(AB)$ bezeichnen wir den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$, mit $M(AC)$ den Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ u.s.w.. Der Punkt $X$ berechnet sich durch $\overrightarrow{OX} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$.
Jeweils 3 Seitenmittelpunkte bilden mit $X$ zusammen wieder ein Tetraeder, was auf 4 Arten möglich ist:
$T_1(X, M(AB), M(AD), M(BD)),\ T_2(X, M(AC), M(AD), M(CD)),$
$T_3(X, M(AB), M(AC), M(BC)),\ T_4(X, M(BC), M(BD), M(CD))$.
Weiter bilden jeweils 3 Seitenmittelpunkte mit der gemeinsamen Ecke zusammen wieder ein Tetraeder, was auch auf 4 Arten möglich ist:
$E_1(A, M(AB), M(AC), M(AD)),\ E_2(B, M(AB), M(BC), M(BD)),$
$E_3(C, M(AC), M(BC), M(CD)),\ E_4(D, M(AD), M(BD), M(CD))$.

(a) Berechnen Sie das Volumen $V_1$, das noch bleibt, wenn vom Tetraeder $T$ die kleineren Tetraeder $T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4$ ausgeschnitten werden. $\rightsquigarrow\ V : V_1 = ?$

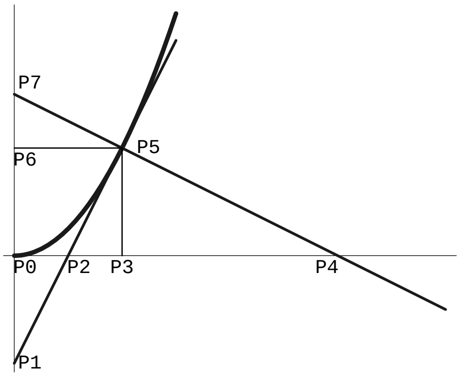
(b) Berechnen Sie das Volumen $V_2$, das noch bleibt, wenn vom Tetraeder $T$ die andern kleineren Tetraeder $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$ ausgeschnitten werden. $\rightsquigarrow\ V : V_2 = ?$




Die Skizze nebenan zeigt $T$ mit $T_1$.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Die Skizze zeigt eine Funktion $f(x) = a\,x^3,\ \ x \geq 0$. In $P_5(x_0, y = a\,x_0^3)$ sind die Tangente und die Normale gegeben. Die damit entstehenden Punkte $P_0 \ldots P_7$ definieren Dreiecksflächen resp. Flächen, deren eine Begrenzungslinie der „Parabelbogen" ist.
Die Flächen werden wie folgt benannt (mache eine Skizze!):
$(P_0P_5P_6P_0) \rightsquigarrow\ A_1,\qquad (P_0P_3P_5P_0) \rightsquigarrow\ A_2,\qquad (P_0P_1P_2P_0) \rightsquigarrow\ A_3,$
$(P_2P_3P_5P_2) \rightsquigarrow\ A_4,\qquad (P_6P_5P_7P_6) \rightsquigarrow\ A_5,\qquad (P_3P_4P_5P_3) \rightsquigarrow\ A_6.$
Berechne die folgenden Verhältnisse der Flächeninhalte. Untersuche, wie $n$ gewählt werden muss, damit das jeweilige Verhältnis unabhängig ist von $x_0$. Untersuche auch den Einfluss von $a$.




(a) $A_1 : A_2$

(b) $A_4 : A_2$

(c) $A_4 : A_3$

(d) $A_4 : A_5$

(e) $A_4 : A_6$

(f) $(A_4 \cdot A_4) : (A_5 \cdot A_6)$

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

(a) Ein runder Kuchen mit dem Inhalt $A = 2$ wird halbiert. Eines der dabei entstehenden Stücke mit den Inhalten $A_0$ wird wieder halbiert. Dadurch entstehen wieder zwei neue, kleinere Stücke mit den Inhalten $A_1$. Davon wird wieder eines halbiert. Dadurch entstehen auch wieder zwei neue, kleinere Stücke mit den Inhalten $A_2$. Davon wird wieder eines halbiert, u.s.w., bis schliesslich theoretisch unendlich viele Stücke vorhanden sind.

Schreiben Sie die so entstehende Reihe $A = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ korrekt mit Zahlen auf. Um welchen Reihentyp handelt es sich?

(b) In einem Diagramm wird über dem Intervall $(0, 1]$ die konstante Funktion $A_0$ aufgetragen, dann über $(1, 2]$ die konstante Funktion $A_1$ aufgetragen, über $(2, 3]$ die konstante Funktion $A_2$ u.s.w.. So entsteht eine Treppenfunktion oder ein Balkendiagramm, je nachdem wie man das sieht. Zeichnen Sie das Diagramm und berechnen Sie den Inhalt unter der Kurve, d.h. der Inhalt aller Balken.

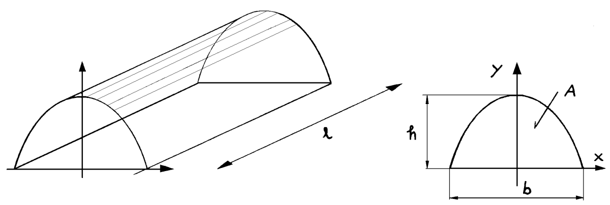
(c) Im gemachten Diagramm über $(0, \infty)$ ist noch die Funktion $f(x) = (\dfrac{1}{2})^{x-1}$ einzuzeichnen. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Balken und der Kurve von $f$.

(d) Ein runder Kuchen mit dem Inhalt $A = 3$ wird nun getrittelt. Eines der dabei entstehenden Stücke mit den Inhalten $B_0$ wird gegessen, ein zweites wird wieder getrittelt.

Dadurch entstehen wieder drei neue, kleinere Stücke mit den Inhalten $B_1$. Davon wird wieder eines gegessen und ein zweites wird wieder getrittelt. Dadurch entstehen wieder drei neue, kleinere Stücke mit den Inhalten $B_2$. Davon wird wieder eines gegessen und ein zweites wird wieder getrittelt. u.s.w., bis schliesslich theoretisch unendlich viele Stücke vorhanden sind, obwohl auch unendlich viele gegessen worden sind.

Schreiben Sie die so entstehende Reihe $B_0 + B_1 + B_2 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k$ der nicht gegessenen Stücke korrekt mit Zahlen auf und berechnen Sie exakt die Summe.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**




Die Funktion $f(x) = a\,x^4 + h$ mit $f(0) = h$ und $f(-\frac{b}{2}) = f(\frac{b}{2}) = 0$ beschreibt den Querschnitt eines Tunnels nach nebenstehender Skizze.

Es ist $h = 3.5\,m$, $b = 6.5\,m$ und $l = 20\,km$.

(a) Berechnen Sie $f(x)$. Erstellen Sie eine genaue Skizze des Tunnelprofils.

(b) Berechnen Sie das auszubrechende Volumen beim Tunnelbau.

(c) Wie ist bei gleichem $a$ die Höhe $h$ zu ändern, damit sich das auszubrechende Volumen verdoppelt? (Achtung: Mit $h$ ändert auch $b$!)

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Wir kennen die Ableitung $f'(x) = \dfrac{x^3}{4} - 3\,x$ einer unbekannten Funktion $f(x)$, von der wir jedoch wissen, dass $f(0) = 5$ ist.

(a) Berechnen Sie $f(x)$. Skizzieren Sie $f(x)$ über $I = [-5, 5]$.

(b) Berechnen Sie die Extremwertstellen von $f(x)$, an denen die Tangente horizontal ist.

(c) Berechnen Sie die Nullstellen von $f(x)$.

(d) Berechnen Sie $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.

(a) Integrieren Sie von Hand: $\int\limits_{1}^{\pi} x \cdot \cos(x)\,dx = \,?$

(b) Für welche Werte von $x \in [0, \pi]$ hat die Kurve von $x \cdot \cos(x)$ die Steigung 1?

(c) Differenzieren Sie von Hand: $\frac{d}{d\,x}(x \cdot e^x - e^{x^2}) = \,?\qquad x = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \,?$

(d) Suchen Sie von Hand eine Stammfunktion zu: $f(x) = x \cdot \sin(x^2) - \cos(2\,x) + \frac{2}{3\,x}$

**Aufgabe 7** **(12 Punkte)**

Der Graph der Funktion $f(x) = e^{-x}$ wird um die $x$–Achse rotiert. Dabei entsteht ein Rotationskörper, der als Säule gedacht ist.

(a) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = 1$

(b) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = \infty$

(c) Wir gross muss $x_0$ sein, damit das Volumen des Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = x_0$ gleich $\frac{\pi}{4}$ ist?

— ENDE —

Haute école spécialisée bernoise, école d'ingénieurs Bienne 10. séptembre 2001

## 2.35 Examen de diplôme préalable 2 en mathématiques 2001

**Classe B2**

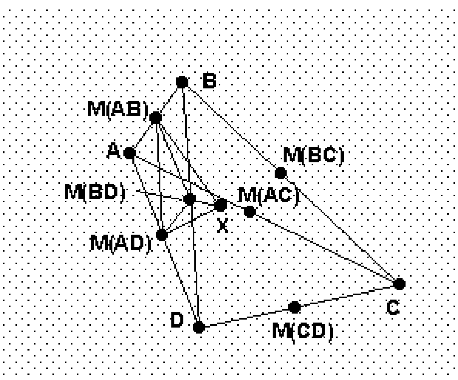
*Bonne chance !*

**Aufgabe 1** **(12 points)**

Soit donné un tétraèdre $T(ABCD)$ avec les sommets $A, B, C, D$.
$A = A(1,1,1),\ \ B = B(-1,2,3),\ \ C = C(5,4,7),\ \ D = D(3,8,11)$. Le volume est $V$.
Nous spécifions par $M(AB)$ le point au milieu de l'arrête $\overline{AB}$, par $M(AC)$ le point au milieu de l'arrête $\overline{AC}$ etc.. Le poit $X$ est calculé par $\overrightarrow{OX}= \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$.
Les 3 points, chacun au milieu d'une arrête, forment avec $X$ de nouveau un tétraèdre, ce qui est possible de 4 manières:
$T_1(X, M(AB), M(AD), M(BD)),\ \ T_2(X, M(AC), M(AD), M(CD)),$
$T_3(X, M(AB), M(AC), M(BC)),\ \ T_4(X, M(BC), M(BD), M(CD)).$
En outre 3 centres d'arrêtes forment un tétraèdre avec le sommet en commun ce qui est aussi possible de 4 manières:
$E_1(A, M(AB), M(AC), M(AD)),\ \ E_2(B, M(AB), M(BC), M(BD)),$
$E_3(C, M(AC), M(BC), M(CD)),\ \ E_4(D, M(AD), M(BD), M(CD)).$

(a) Calculer le volume $V_1$ qui reste si l'on découpe du tétraèdre $T$ les tétraèdres plus petits $T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4. \leadsto\ V : V_1 = ?$

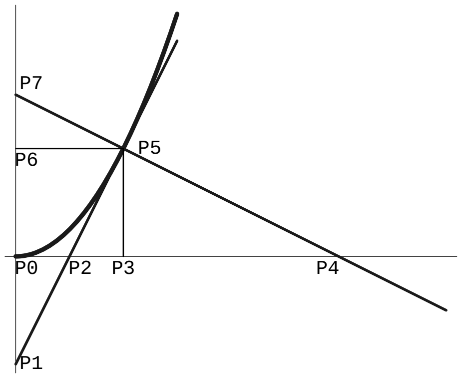
(b) Calculer le volume $V_2$ qui reste si l'on découpe du tétraèdre $T$ les autres tétraèdres plus petits $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4. \leadsto\ V : V_2 = ?$




L'esquisse à côté montre $T$ avec $T_1$.

**Aufgabe 2** **(12 points)**

L'esquisse montre une fonction $f(x) = a\,x^3,\;\; x \geq 0$. A $P_5(x_0, y = a\,x_0^3)$ on a donné la tangente et la normale. Les points $P_0 \ldots P_7$ ainsi définis marquent des surfaces triangulaires resp. des surfaces dont une ligne de bord est "l'arc de parabôle".
On nomme les surfaces de la façon suivante (faire une esquisse!):
$(P_0P_5P_6P_0) \rightsquigarrow A_1$, $(P_0P_3P_5P_0) \rightsquigarrow A_2$, $(P_0P_1P_2P_0) \rightsquigarrow A_3$,
$(P_2P_3P_5P_2) \rightsquigarrow A_4$, $(P_6P_5P_7P_6) \rightsquigarrow A_5$, $(P_3P_4P_5P_3) \rightsquigarrow A_6$.
Calculer les rapports des surfaces suivantes. Examiner comme il faut choisir $n$ afin que le rapport respectif soit indépendant de $x_0$. Examiner aussi l'influence de $a$.




(a) $A_1 : A_2$

(b) $A_4 : A_2$

(c) $A_4 : A_3$

(d) $A_4 : A_5$

(e) $A_4 : A_6$

(f) $(A_4 \cdot A_4) : (A_5 \cdot A_6)$

**Aufgabe 3** **(12 points)**

(a) Un gâteau rond au contenu $A = 2$ soit dédoublé. Un des morceaux au contenu $A_0$ qui sont crées à cette occasion soit encore partagé en deux. A cette occasion deux nouveaux morceaux plus petits au contenu $A_1$ sont crées. Un d'entre eux est aussi partagé en deux. A cette occasion deux nouveaux morceaux plus petits au contenu $A_2$ sont crées. Un d'entre eux est aussi partagé etc., à ce qu'il y ait théoriquement une série infinie de pièces.

Ecrivez la série $A = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ ainsi obtenue de façon correcte avec des nombres. De quel type de série s'agit–il?

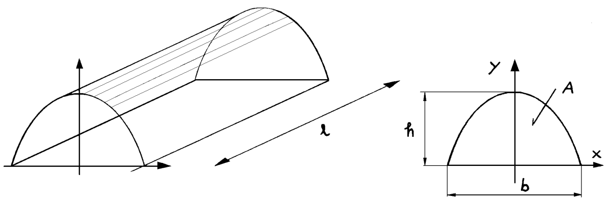
(b) Dans un diagramme, on dessine la fonction constante $A_0$ sur l'intervalle $(0, 1]$, ensuite on dessine la fonction constante $A_1$ sur l'intervalle$(1, 2]$, puis la fonction constante $A_2$ sur l'intervalle $(2, 3]$ etc.. Ainsi on obtient une fonction dont le graphe a la forme d' un escalier qu'on peut aussi interpréter comme diagramme de bâton. Dessiner le diagramme et calculer le contenu sous la courbe, c.-à.-d. le contenu de tout les bâtons.

(c) Dessiner dans le diagramme fait sur $(0, \infty)$ encore la fonction $f(x) = (\dfrac{1}{2})^{x-1}$. Calculer le contenu de la surface entre les bâtons et la courbe de $f$.

(d) Un gâteau rond au contenu $A = 3$ soit divisé en trois parties. Un des morceaux au contenu $B_0$ qui sont crées à cette occasion soit mangé, un deuxième soit de nouveau divisé en trois parties. A cette occasion trois nouveaux morceaux plus petits au contenu $B_1$ sont crées. Un d'entre eux soit mangé, un deuxième soit de nouveau divisé en trois parties. A cette occasion, trois nouveaux morceaux plus petits au contenu $B_2$ sont crées. Un d'entre eux soit mangé, un autre à son tour divisé en trois parties etc., jusqu'à ce il y ait théoriquement une série infinie de pièces, bien qu'une quantité de pièces infinie ait été mangé.

Ecriver la série $B_0 + B_1 + B_2 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k$ des pièces non mangées ainsi obtenue de façon correcte avec des nombres et calculer la somme exacte.

**Aufgabe 4** **(12 points)**




La fonction $f(x) = a\,x^4 + h$ avec $f(0) = h$ et $f(-\frac{b}{2}) = f(\frac{b}{2}) = 0$ décrit la coupe transversale d'un tunnel d'après le croquis ci–contre.
Il est $h = 3.5\,m,\;\; b = 6.5\,m$ et $l = 20\,km$.

(a) Calculer $f(x)$. Faire une esquisse exacte du profil du tunnel.

(b) Calculer le volume à enlever lors de la construction du tunnel.

(c) Comment changer la hauteur $h$, si $a$ reste le même, afin que le volume à enlever soit double? (Attention: Si $h$ est changé, $b$ est aussi changé!)

**Aufgabe 5** **(12 points)**

Nous connaissons la dérivée $f\,'(x) = \dfrac{x^3}{4} - 3\,x$ d'une fonction inconnue $f(x)$, dont nous savons cependant qu'il est $f(0) = 5$.

(a) Calculer $f(x)$. Faire une esquisse de $f(x)$ sur $I = [-5, 5]$.

(b) Calculer les places de valeur extrêmes de $f(x)$ où la tangente est horizontale.

(c) Calculer les zéros de $f(x)$.

(d) Calculer $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

**Aufgabe 6** **(12 points)**

Les problèmes partiels suivants sont indépendants. Ils donnent le même nombre de points. Tous les pas intermédiaires de la solution sont à retenir par écrit sur la feuille de solution.

(a) Intégrer à la main: $\int\limits_{1}^{\pi} x \cdot \cos(x)\,dx = \,?$

(b) Pour quelles valeurs de $x \in [0, \pi]$ la courbe de $x \cdot \cos(x)$ a la pente 1?

(c) Differencier à la main: $\dfrac{d}{d\,x}(x \cdot e^x - e^{x^2}) = \,? \qquad x = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \,?$

(d) Chercher à la main une fonction antidérivée à: $f(x) = x \cdot \sin(x^2) - \cos(2\,x) + \dfrac{2}{3\,x}$

**Aufgabe 7** **(12 points)**

Le graphe de la fonction $f(x) = e^{-x}$ pivote autour de l'axe $x$. Il se forme un corps de révolution qu'on peut imaginer en tant que colonne.

(a) Calculer le volume du corps de révolution entre $x = 0$ et $x = 1$

(b) Calculer le volume du corps de révolution entre $x = 0$ et $x = \infty$

(c) Comment ext–ce qu'il faut choisir $x_0$ afin que le volume du corps de révolution entre $x = 0$ et $x = x_0$ devienne égal à $\dfrac{\pi}{4}$?

— FIN —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 10. September 2002

## 2.36 Vordiplomprüfung 1 in Algebra 2002

**Klasse E1a**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Ein Würfel steht mit einem Eckpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Seine Raumdiagonale durch diesen Eckepunkt fällt mit der $z$–Achse zusammen, sodass ein weiterer Eckpunkt auf der positiven $z$–Achse liegt. Eine weitere Raumdiagonale liegt in der $(x,z)$–Ebene und schneidet die negative $x$–Achse. Berechne die Eckpunkte.
*Hinweis: Rechne zuerst mit der Kantenlänge* 1.
• *Un cube est placé dans un système de coordonnées de façon qu'il touche l'origine avec un de ses sommets. Sa diagonale par le centre et ce sommet coïncide avec l'axe z de façon qu'un autre sommet se trouve sur l'axe z positive. Une autre diagonale par le centre est placée dans le plan $(x,z)$ et passe par l'axe x négative. Calculer les sommets.*
*Indication: Calculer d'abord avec une arête de longueur* 1.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Sei $d, h > 0$. Durch $P_1(0/0/0)$, $P_2(-1/0/0)$, $P_3(-\frac{1}{2}/d/0)$, $P_4(x_1/y_1/h)$ ist ein reguläres Tetraeder gegeben.
• *Soit $d, h > 0$. Par $P_1(0/0/0)$, $P_2(-1/0/0)$, $P_3(-\frac{1}{2}/d/0)$, $P_4(x_1/y_1/h)$ on a donné un tétraèdre régulier.*

(a) Berechne $x_1$, $y_1$, $d$ und $h$.
• *Calculer $x_1$, $y_1$, $d$ et $h$.*

(b) Zeige die Berechnung des Seiten- resp. Flächenwinkels des Tetraeders mit Vektoren.
• *Montrer le calcul de l'angle entre deux plans de surface du tétraèdre avec des vecteurs.*

(c) Zeige die Berechnung des Kantenwinkels des Tetraeders mit Vektoren. (Winkel zwischen einer Kante und der durchstossenen Seite).
• *Montrer le calcul de l'angle entre une arête et le plan de surface du tétraèdre qu'il transperce (avec des vecteurs).*

(d) Entscheide, ob es mit einer Anzahl regulärer Tetraeder durch Zusammenleimen längs einer Kante gelingt, einen konvexen Körper zu bauen.
• *Décider si on arrive à construiere un corps convexe en colant un nombre de tétraèdres réguliers le long d'une arête.*

(e) Berechne das Volumen des Tetraeders.
• *Calculer le volume du tétraèdre*

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Von einer Matrix $M$ kennt man die Eigenvektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3,$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.
• *D'une matrice $M$ on connaît les vecteurs propres $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3,$ et les valeurs propres correspondantes $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.*

**Geg.:** • **Donné:** $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

(a) Berechne $M$ exakt.
• *Calculer $M$ de façon exacte.*

(b) Berechne das Bild von $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$.
• *Calculer l'image de $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$.*

(c) Berechne das Urbild von $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$. Fortsetzung $\rightsquigarrow$
• *Calculer l'originale de $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$.*

(d) Berechne das Bild von $\lambda_1^2 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2^2 \cdot \vec{x}_2 + \lambda_3^2 \cdot \vec{x}_3$.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Sei • *Soit* $h(z) = -\dfrac{(-z+1)\,(z+1)}{(\bar{z}-1)\,(\bar{z}+1)}$

(a) Berechne $h(i)$.
• *Calculer $h(i)$.*

(b) Berechne $h(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}})$.
• *Calculer $h(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}})$.*

(c) Untersuche, für welche Punkte $\in \mathbb{C}$ die Gleichung $\Im(h(z)) = 0$ richtig ist.
• *Calculer les points $\in \mathbb{C}$ pour lesquels l'équation $\Im(h(z)) = 0$ est correcte.*
$\Im \rightsquigarrow$ Imaginäranteil • *Partie imaginaire...*

(d) Skizziere $h(i-1),\ h(i-2),\ (h(i-1))^2,\ (h(i-2))^2$.
• *Faire l'esquisse de $h(i-1),\ h(i-2),\ (h(i-1))^2,\ (h(i-2))^2$.*

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Ebenen: • *Soient donnés les plans:*

$$\Phi_1:\ 4\,x - 2\,y + 5\,z - 6 = 0,\ \ \Phi_2:\ 2\,x + 3\,y + 4\,z + 2 = 0,\ \ \Phi_3:\ -x + y - 8\,z + 7 = 0$$

(a) Berechne den Schnittpunkt $S$.
• *Calculer le point d'intersection $S$.*

(b) Sei • *Soit* $\Phi_4(q): \ -6\,x + 9\,y - q\,2\,z - 2 = 0$

Berechne $q$ so, dass $\Phi_4(q)$ durch $S$ geht.
• *Calculer $q$ de façon que $\Phi_4(q)$ passe par $S$.*

(c) Für welche(s) $q$ ist der Abstand zwischen $\Phi_4(q)$ und $S$ gleich 1?
• *Comment est–ce qu'il faut choisir $q$ pour que la distance entre $\Phi_4(q)$ et $S$ soit 1?*

(d) Für welches $q$ ist der Abstand zwischen $\Phi_4(q)$ und $S$ gleich 10?
• *Comment est–ce qu'il faut choisir $q$ pour que la distance entre $\Phi_4(q)$ et $S$ soit 10?*

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

(a) Vereinfache $(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})$ so weit wie möglich.
• *Simplifier $(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})$ tant que possible.*

(b) Sei • *Soit* $|\vec{a}| = 6, \ |\vec{b}| = 18, \ \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 12$

Berechne den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
• *Calculer l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.*

(c) Berechne mit dem letzten Resultat $|(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})|$.
• *Calculer à l'aide du dernier résultat $|(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})|$.*

(d) Berechne $|(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})|$ für $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = k$.
• *Calculer $|(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})|$ pour $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = k$.*

— ENDE —

Haute école spécialisée bernoise, école d'ingénieurs Bienne 10. séptembre 2002

## 2.37 Examen de diplôme préalable 1 en algèbre 2002

**Classe E1A**

*Bonne chance !*

**Aufgabe 1** **(12 points)**

Ein Würfel steht mit einem Eckpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Seine Raumdiagonale durch diesen Eckepunkt fällt mit der $z$–Achse zusammen, sodass ein weiterer Eckpunkt auf der positiven $z$–Achse liegt. Eine weitere Raumdiagonale liegt in der $(x, z)$–Ebene und schneidet die negative $x$–Achse. Berechne die Eckpunkte.
*Hinweis: Rechne zuerst mit der Kantenlänge* 1. • *Un cube est placé dans un système de coordonnées de façon qu'il touche l'origine avec un de ses sommets. Sa diagonale par le centre et ce sommet coïncide avec l'axe $z$ de façon qu'un autre sommet se trouve sur l'axe $z$ positive. Une autre diagonale par le centre est placée dans le plan $(x, z)$ et passe par l'axe $x$ négative. Calculer les sommets.*
*Indication: Travailler d'abord avec une arête de longueur* 1.

**Aufgabe 2** **(12 points)**

Sei $d, h > 0$. Durch $P_1(0/0/0)$, $P_2(-1/0/0)$, $P_3(-\frac{1}{2}/d/0)$, $P_4(x_1/y_1/h)$ ist ein reguläres Tetraeder gegeben. • *Soit $d, h > 0$. Par $P_1(0/0/0)$, $P_2(-1/0/0)$, $P_3(-\frac{1}{2}/d/0)$, $P_4(x_1/y_1/h)$ on a donné un tétraèdre régulier.*

(a) Berechne $x_1$, $y_1$, $d$ und $h$. • *Calculer $x_1$, $y_1$, $d$ et $h$.*

(b) Zeige die Berechnung des Seiten- resp. Flächenwinkels des Tetraeders mit Vektoren. • *Montrer le calcul de l'angle entre deux plans de surface du tétraèdre avec des vecteurs.*

(c) Zeige die Berechnung des Kantenwinkels des Tetraeders mit Vektoren (Winkel zwischen einer Kante und der durchstossenen Seite). • *Montrer le calcul de l'angle entre une arête et le plan de surface du tétraèdre qu'il transperce (avec des vecteurs).*

(d) Entscheide, ob es mit einer Anzahl regulärer Tetraeder durch Zusammenleimen längs einer Kante gelingt, einen konvexen Körper zu bauen. • *Décider si on arrive à construiere un corps convexe en colant un nombre de tétraèdres réguliers le long d'une arête.*

(e) Berechne das Volumen des Tetraeders. • *Calculer le volume du tétraèdre*

**Aufgabe 3** **(12 points)**

Von einer Matrix $M$ kennt man die Eigenvektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3,$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$. • *D'une matrice $M$ on connaît les vecteurs propres $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3,$ et les valeurs propres correspondantes $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.*

**Geg.:** • **Donné:** $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

(a) Berechne $M$ exakt. • *Calculer $M$ de façon exacte.*

(b) Berechne das Bild von $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$. • *Calculer l'image de $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$.*

(c) Berechne das Urbild von $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$. • *Calculer l'original de $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$.*

(d) Berechne das Bild von $\lambda_1^2 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2^2 \cdot \vec{x}_2 + \lambda_3^2 \cdot \vec{x}_3$. • *Calculer l'image de $\lambda_1^2 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2^2 \cdot \vec{x}_2 + \lambda_3^2 \cdot \vec{x}_3$.*

**Aufgabe 4** **(12 points)**

Sei • *Soit* $\quad h(z) = -\dfrac{(-z+1)\,(z+1)}{(\bar{z}-1)\,(\bar{z}+1)}$

(a) Berechne $h(i)$. • *Calculer $h(i)$.*

(b) Berechne $h(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}})$. • *Calculer $h(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}})$.*

(c) Untersuche, für welche Punkte $\in \mathbb{C}$ die Gleichung $\Im(h(z)) = 0$ richtig ist. • *Calculer les points $\in \mathbb{C}$ pour lesquels l'équation $\Im(h(z)) = 0$ est correcte.*
$\Im \rightsquigarrow$ Imaginäranteil • *Partie imaginaire...*

(d) Skizziere $h(i-1),\ h(i-2),\ (h(i-1))^2,\ (h(i-2))^2$. • *Faire l'esquisse de $h(i-1),\ h(i-2),\ (h(i-1))^2,\ (h(i-2))^2$.*

**Aufgabe 5** **(12 points)**

Gegeben sind die Ebenen: • *Soient donnés les plans:*

$$\Phi_1 :\ 4\,x - 2\,y + 5\,z - 6 = 0,\ \ \Phi_2 :\ 2\,x + 3\,y + 4\,z + 2 = 0,\ \ \Phi_3 :\ -x + y - 8\,z + 7 = 0$$

(a) Berechne den Schnittpunkt $S$. • *Calculer le point d'intersection $S$.*

(b) Sei • *Soit* $\Phi_4(q) :\ -6\,x + 9\,y - q\,2\,z - 2 = 0$

Berechne $q$ so, dass $\Phi_4(q)$ durch $S$ geht. • *Calculer $q$ de façon que $\Phi_4(q)$ passe par $S$.*

(c) Für welches $q$ ist der Abstand zwischen $\Phi_4(q)$ und $S$ gleich 1? • *Comment est–ce qu'il faut choisir $q$ pour que la distance entre $\Phi_4(q)$ et $S$ soit 1?*

(d) Für welche(s) $q$ ist der Abstand zwischen $\Phi_4(q)$ und $S$ gleich 10? • *Comment est–ce qu'il faut choisir $q$ pour que la distance entre $\Phi_4(q)$ et $S$ soit 10?*

**Aufgabe 6** **(12 points)**

(a) Vereinfache $(5\,\vec{a}+2\,\vec{b})\times(3\,\vec{a}-7\,\vec{b})$ so weit wie möglich. • *Simplifier* $(5\,\vec{a}+2\,\vec{b})\times(3\,\vec{a}-7\,\vec{b})$ *tant que possible.*

(b) Sei • *Soit* $|\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=18,\ \langle\vec{a},\vec{b}\rangle=12$

Berechne den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. • *Calculer l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.*

(c) Berechne mit dem letzten Resultat $|(5\,\vec{a}+2\,\vec{b})\times(3\,\vec{a}-7\,\vec{b})|$. • *Calculer à l'aide du dernier résultat* $|(5\,\vec{a}+2\,\vec{b})\times(3\,\vec{a}-7\,\vec{b})|$.

(d) Berechne $|(5\,\vec{a}+2\,\vec{b})\times(3\,\vec{a}-7\,\vec{b})|$ für $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=k$. • *Calculer* $|(5\,\vec{a}+2\,\vec{b})\times(3\,\vec{a}-7\,\vec{b})|$ *pour* $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=k$.

— Fin —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 9. September 2002

## 2.38 Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2002 Klasse B2

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(15 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte: • *Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:*

(a) $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x - 2$

  i. $f'(x) = ?$

  ii. $f'(x)|_{x=1} = ?$

  iii. $f''(x) = ?$

(b) $\int\limits_{-1}^{1} 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x - 2\, dx = ?$

(c) $f(x) = \cos(\cos(x)) - \sin(ln(x)),\ \ f'(x) = ?$

(d) $f(x) = \cos(x)\sin(x) - \tan(x) + \dfrac{\cos(x)}{(x+4)},\ \ f'(x) = ?$

(e) $f(x) = \dfrac{e}{x^4} - \dfrac{\pi}{x^2} + r\, e^{-x}$

  i. $\int\limits_{\pi}^{\infty} f(x)\, dx = ?$

  ii. $\int\limits_{\pi}^{\infty} f(x)\, dx = \dfrac{e}{3\,\pi^3},\ \ r = ?$

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Durch die Punkte $P_1(-20/1),\ \ P_2(0/4),\ \ P_3(20/1)$ soll eine Cosinus–Funktion

$$f(x) = a + 3\,\cos(b\,x)$$

gelegt werden. Durch Rotation des Graphen um die $x$–Achse entsteht eine in der Mitte nach aussen gewölbte (konvexe) Säule zwischen $x_1 = -20$ und $x_2 = 20$. • *On aimerait mettre une fonction*

$$f(x) = a + 3\,\cos(b\,x)$$

*en cosinus par les points* $P_1(-20/1),\ \ P_2(0/4),\ \ P_3(20/1)$. *Par révolution autour de l'axe* $x$ *on obtient une colonne convexe entre* $x_1 = -20$ *et* $x_2 = 20$.

(a) Berechne $a$ und $b$. • *Calculer* $a$ *et* $b$.

(b) Berechne das Volumen der Säule. • *Calculer le volume de la colonne.*

**Aufgabe 3** **(15 Punkte)**

Eine Polynomfunktion vom Grad 3 geht durch die Punkte $x_1 = 0,\ \ x_2 = 4,\ \ x_3 = 5,\ \ y = 0.$ An der Stelle $x = 2$ ist $f(x) = 2.$
*Hinweis: Setze* $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. • *Une fonction polynomiale du degré* 3 *passe par les points* $x_1 = 0,\ \ x_2 = 4,\ \ x_3 = 5,\ \ y = 0$. *A la place* $x = 2$ *il est* $f(x) = 2$.
*Indication: Mettre* $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Falls $f(x)$ nicht berechnet werden kann, so wähle $f(x) = x^3 - 9\,x^2 + 20\,x$. • *Si* $f(x)$ *ne peut pas être calculée, choisissez* $f(x) = x^3 - 9\,x^2 + 20\,x$.

(a) Berechne $f(x)$ und skizziere den Graphen. • *Calculer* $f(x)$ *et faire une esquisse du graphe.*

(b) Berechne die Tangentensteigungen an den Stellen $x = 0$ und $x = 4$. • *Calculer les pentes des tangentes aux places* $x = 0$ *et* $x = 4$.

(c) Die Tangenten an den Stellen $x = 0$ und $x = 4$ bilden mit der $x$-Achse zusammen ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt. • *Les tangentes aux places* $x = 0$ *et* $x = 4$ *forment un triangle avec l'axe* $x$. *Calculer la surface.*

(d) Berechne die $x$–Koordinate eines weiteren Punktes, in dem die Steigung gleich ist wie für $x = 4$. • *Calculer la coordonnée* $x$ *d'un autre point dans lequel la pente est égale à la pente à* $x = 4$.

(e) Untersuche rechnerisch, ob die Dreiecksfläche grösser oder kleiner ist als die Fläche unter der Kurve von $f(x)$ zwischen $x = 0$ et $x = 4$. • *Decider par le calcul si la surface du triangle est plus grande ou plus petite que la surface sous la courbe de* $f(x)$ *entre* $x = 0$ *et* $x = 4$.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Sei • *Soit* $\qquad f(x) = e^{\cos(x)}$

(a) Skizziere den Graphen der Funktion $f(x)$ möglichst exakt. • *Donner l'esquisse du graphique de la fonction* $f(x)$ *de façon aussi exacte que possible.*

(b) Berechne die Punkte mit horizontaler Tangente exakt. • *Calculer de façon exacte les points où la tangente est horizontale.*

(c) Berechne die beiden ersten Wendepunkte (wo die zweite Ableitung null ist) links und rechts von der $y$–Achse möglichst genau. • *Calculer de façon aussi exacte que possible les deux points d'inflexion (deuxième dérivée égale zéro) à gauche et à droite de l'axe* $y$.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

$$f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + 1$$

Von $P_1(-1/f(-1))$ wird eine Sehne zu $P_2(2/f(2))$ gezogen. Suche auf der Kurve zwischen $P_1$ und $P_2$ einen Punkt $P_3$, sodass der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ maximal wird. (Mache dazu eine Skizze.) • *De $P_1(-1/f(-1))$ on tire une corde à $P_2(2/f(2))$. Trouver sur la courbe entre $P_1$ et $P_2$ un point $P_3$ de façon que la surface du triangle $P_1P_2P_3$ soit maximale. (Faire une esquisse.)*

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Seien $d, h > 0$. Durch $P_1(0/0/0)$, $P_2(1/0/0)$, $P_3(\frac{1}{2}/d/0)$, $P_4(x_1/y_1/h)$ ist ein reguläres Tetraeder gegeben. • *Soyent $d, h > 0$. Par $P_1(0/0/0)$, $P_2(1/0/0)$, $P_3(\frac{1}{2}/d/0)$, $P_4(x_1/y_1/h)$ on a donné un tétraèdre régulier.*

(a) Berechne $x_1$, $y_1$, $d$ und $h$. • *Calculer $x_1$, $y_1$, $d$ et $h$.*

(b) Zeige die Berechnung des Seiten- oder Flächenwinkels des Tetraeders. • *Montrer le calcul de l'angle entre deux plans de surface du tétraèdre.*

(c) Zeige die Berechnung des Kantenwinkels des Tetraeders (Winkel zwischen einer Kante und der durchstossenen Seite resp. Fläche). • *Montrer le calcul de l'angle entre une arête et le plan de surface du tétraèdre qu'il transperce.*

(d) Das Tetraeder wird um die $x$–Achse um $+25^o$ gedreht. Berechne die neuen Koordinaten der Eckpunkte. • *On tourne le tétraèdre autour de l'axe $x$ de $+25^o$. Calculer les nouveaux sommets du tétraèdre.*

— ENDE —

Haute école spécialisée bernoise, école d'ingénieurs Bienne 9. séptembre 2002

## 2.39 Examen de diplôme préalable 2 en mathématiques 2002

**Classe B2**

*Bonne chance !*

**Aufgabe 1** **(15 points)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte: • *Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:*

(a) $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x - 2$

  i. $f'(x) = \,?$

  ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$

  iii. $f''(x) = \,?$

(b) $\int\limits_{-1}^{1} 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x - 2\, dx = \,?$

(c) $f(x) = \cos(\cos(x)) - \sin(ln(x)),\;\; f'(x) = \,?$

(d) $f(x) = \cos(x)\sin(x) - \tan(x) + \dfrac{\cos(x)}{(x+4)},\;\; f'(x) = \,?$

(e) $f(x) = \dfrac{e}{x^4} - \dfrac{\pi}{x^2} + r\, e^{-x}$

  i. $\int\limits_{\pi}^{\infty} f(x)\, dx = \,?$

  ii. $\int\limits_{\pi}^{\infty} f(x)\, dx = \dfrac{e}{3\,\pi^3},\;\; r = \,?$

**Aufgabe 2** **(12 points)**

Durch die Punkte $P_1(-20/1),\;\; P_2(0/4),\;\; P_3(20/1)$ soll eine Cosinus–Funktion

$$f(x) = a + 3\,\cos(b\,x)$$

gelegt werden. Durch Rotation des Graphen um die $x$–Achse entsteht eine in der Mitte nach aussen gewölbte (konvexe) Säule zwischen $x_1 = -20$ und $x_2 = 20$. • *On aimerait mettre une fonction*

$$f(x) = a + 3\,\cos(b\,x)$$

*en cosinus par les points* $P_1(-20/1),\;\; P_2(0/4),\;\; P_3(20/1)$. *Par révolution autour de l'axe* $x$ *on obtient une colonne convexe entre* $x_1 = -20$ *et* $x_2 = 20$.

(a) Berechne $a$ und $b$. • *Calculer* $a$ *et* $b$.

(b) Berechne das Volumen der Säule. • *Calculer le volume de la colonne.*

**Aufgabe 3** **(15 points)**

Eine Polynomfunktion vom Grad 3 geht durch die Punkte $x_1 = 0,\ \ x_2 = 4,\ \ x_3 = 5,\ \ y = 0$. An der Stelle $x = 2$ ist $f(x) = 2$.
*Hinweis: Setze* $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. • *Une fonction polynomiale du degré* 3 *passe par les points* $x_1 = 0,\ \ x_2 = 4,\ \ x_3 = 5,\ \ y = 0$. *A la place* $x = 2$ *il est* $f(x) = 2$.
*Indication: Mettre* $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Falls $f(x)$ nicht berechnet werden kann, so wähle $f(x) = x^3 - 9\,x^2 + 20\,x$. • *Si* $f(x)$ *ne peut pas être calculée, choisissez* $f(x) = x^3 - 9\,x^2 + 20\,x$.

(a) Berechne $f(x)$ und skizziere den Graphen. • *Calculer* $f(x)$ *et faire une esquisse du graphe.*

(b) Berechne die Tangentensteigungen an den Stellen $x = 0$ und $x = 4$. • *Calculer les pentes des tangentes aux places* $x = 0$ *et* $x = 4$.

(c) Die Tangenten an den Stellen $x = 0$ und $x = 4$ bilden mit der $x$-Achse zusammen ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt. • *Les tangentes aux places* $x = 0$ *et* $x = 4$ *forment un triangle avec l'axe* $x$. *Calculer la surface.*

(d) Berechne die $x$–Koordinate eines weiteren Punktes, in dem die Steigung gleich ist wie für $x = 4$. • *Calculer la coordonnée* $x$ *d'un autre point dans lequel la pente est égale à la pente à* $x = 4$.

(e) Untersuche rechnerisch, ob die Dreiecksfläche grösser oder kleiner ist als die Fläche unter der Kurve von $f(x)$ zwischen $x = 0$ et $x = 4$. • *Decider par le calcul si la surface du triangle est plus grande ou plus petite que la surface sous la courbe de* $f(x)$ *entre* $x = 0$ *et* $x = 4$.

**Aufgabe 4** **(12 points)**

Sei • *Soit* $\quad f(x) = e^{\cos(x)}$

(a) Skizziere den Graphen der Funktion $f(x)$ möglichst exakt. • *Donner l'esquisse du graphique de la fonction* $f(x)$ *de façon aussi exacte que possible.*

(b) Berechne die Punkte mit horizontaler Tangente exakt. • *Calculer de façon exacte les points où la tangente est horizontale.*

(c) Berechne die beiden ersten Wendepunkte (wo die zweite Ableitung null ist) links und rechts von der $y$–Achse möglichst genau. • *Calculer de façon aussi exacte que possible les deux points d'inflexion (deuxième dérivée égale zéro) à gauche et à droite de l'axe* $y$.

**Aufgabe 5** **(12 points)**

$$f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + 1$$

Von $P_1(-1/f(-1))$ wird eine Sehne zu $P_2(2/f(2))$ gezogen. Suche auf der Kurve zwischen $P_1$ und $P_2$ einen Punkt $P_3$, sodass der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ maximal wird. (Mache dazu eine Skizze.) • *De* $P_1(-1/f(-1))$ *on tire une corde à* $P_2(2/f(2))$. *Trouver sur la courbe entre* $P_1$ *et* $P_2$ *un point* $P_3$ *de façon que la surface du triangle* $P_1P_2P_3$ *soit maximale. (Faire une esquisse.)*

**Aufgabe 6** **(12 points)**

Seien $d, h > 0$. Durch $P_1(0/0/0)$, $P_2(1/0/0)$, $P_3(\frac{1}{2}/d/0)$, $P_4(x_1/y_1/h)$ ist ein reguläres Tetraeder gegeben. • *Soyent* $d, h > 0$. *Par* $P_1(0/0/0)$, $P_2(1/0/0)$, $P_3(\frac{1}{2}/d/0)$, $P_4(x_1/y_1/h)$ *on a donné un tétraèdre régulier.*

(a) Berechne $x_1$, $y_1$, $d$ und $h$. • *Calculer* $x_1$, $y_1$, $d$ *et* $h$.

(b) Zeige die Berechnung des Seiten- oder Flächenwinkels des Tetraeders. • *Montrer le calcul de l'angle entre deux plans de surface du tétraèdre.*

(c) Zeige die Berechnung des Kantenwinkels des Tetraeders (Winkel zwischen einer Kante und der durchstossenen resp. Fläche). • *Montrer le calcul de l'angle entre une arête et le plan de surface du tétraèdre qu'il transperce.*

(d) Das Tetraeder wird um die $x$–Achse um $+25^o$ gedreht. Berechne die neuen Koordinaten der Eckpunkte. • *On tourne le tétraèdre autour de l'axe* $x$ *de* $+25^o$. *Calculer les nouveaux sommets du tétraèdre.*

— Fin —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 9. September 2003

## 2.40 Vordiplomprüfung 1 in Algebra 2003

**Klasse E1a**

*Viel Glück !*

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Betrachte die rekursiv definierte Folge:

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = 1,\ \ a_3 = 1,\ \ a_n = a_{n-1} + 2\, a_{n-2} - a_{n-3}$$

Die Folgeglieder lassen sich wie folgt mit Hilfe einer Matrixmultiplikation gewinnen:

$$\vec{u}_n = \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = M \cdot \vec{u}_{n-1}$$

Setzen wir $b_{n-1,n} := \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, $b_{n-2,n} := \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots$, so können wir nach einer Streckung von $\vec{u}_n$ und $\vec{u}_{n-1}$ mit $a_n^{-1}$ schreiben:

$$\vec{v}_n = \begin{pmatrix} b_{n-2,n} \\ b_{n-1,n} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{n-3,n} \\ b_{n-2,n} \\ b_{n-1,n} \end{pmatrix} = M \cdot \vec{w}_n$$

(a) Berechne in einer Tabelle $a_1, \ldots, a_{20}$ sowie $v_{18}$, $v_{19}$, $v_{20}$ und $w_{18}$, $w_{19}$, $w_{20}$ numerisch. Was stellt man fest?

(b) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von $M$.

(c) Wir nehmen einmal an, dass die Werte $b_{n-k,n}$ für $n \to \infty$ konvergieren. (Eine genaue Untersuchung der Konvergenzfrage überspringen wir hier.) Dann können wir für grosse $n$ schliessen:

$$b_{n-2,n-1} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \approx b_{n-1,n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \ \Rightarrow\ \frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} = b_{n-2,n-1} \cdot b_{n-1,n} \approx b_{n-1,n}^2$$

Zeige entsprechend $b_{n-3,n} \approx b_{n-1,n}^3$. Leite daraus eine Beziehung zwischen $\vec{v}_n$ und $\vec{w}_n$ her. Welchen Zusammenhang mit den Eigenwerten und Eigenvektoren lässt sich jetzt vermuten?

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben seien der Eigenvektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\frac{1}{2}$ sowie der Eigenvektor $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2 zu einer Matrix $M$.

(a) Komponiere die Matrix $M$.

(b) Sei $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechne die Vektoren $\vec{v_1} = M \cdot \vec{v_0}$, $\vec{v_2} = (M \cdot M) \cdot \vec{v_0} = M \cdot \vec{v_1}$, $\vec{v_3} = ((M \cdot M) \cdot M) \cdot \vec{v_0} = M \cdot \vec{v_2}$, $\vec{v_4} = \ldots = M \cdot \vec{v_3}$.

(c) Trage $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{v_0}$, $\ldots$, $\vec{v_3}$ in eine Skizze ein. Was stellt man fest?

(d) Gegeben ist die Matrixgleichung $X \cdot (M - E) = X - E$. Lässt sich aus dieser Gleichung $X$ berechnen? (Die Antwort ist zu begründen.)

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ u+1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 2 \\ -u \end{pmatrix}.$$

Damit bilden wir die Matix $M = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4})$

(a) Berechne $\det(M)$ von Hand.

(b) Löse das Gleichungssystem $M \cdot \vec{x} = \vec{v}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$.

(c) Für welches $u$ hat das obige Gleichungssystem keine eindeutige Lösung? Untersuche, ob in einem solchen Fall unentlich viele Lösungen oder gar keine Lösung vorliegt.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Sei $\quad z_1 = 3 - i,\ \ z_2 = 3 + i,\ \ z_3 = 4 + i.$

(a) Berechne die Lösungen der Gleichung $x^4 = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \bar{z}_3$.

(b) Berechne die Lösungen der Gleichung $1 = x^4 \cdot \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \bar{z}_3$.

(c) Trage alle gefundenen Lösungen in eine Skizze ein, die auch den Einheitskreis enthält.

(d) Was ist über die Abstände der Lösungen vom Ursprung und ihre gegenseitigen Beziehungen zu sagen?

(e) Was ist über die Winkel der Lösungen im Polarkoordinatensystem und ihre gegenseitigen Beziehungen zu sagen?

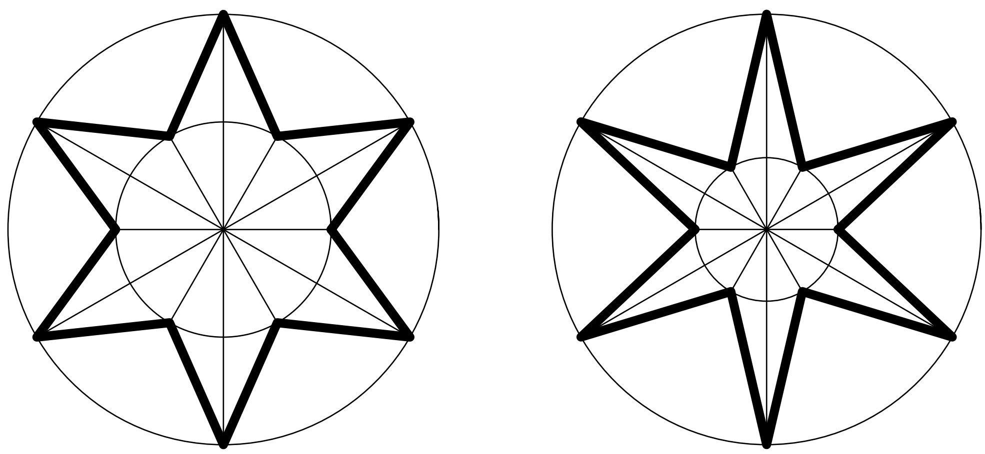
**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

(a) Untersuche mit der Methode der vollständigen Induktion die folgende Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

Die folgende bekannte Formel darf dabei verwendet werden: $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

(b)

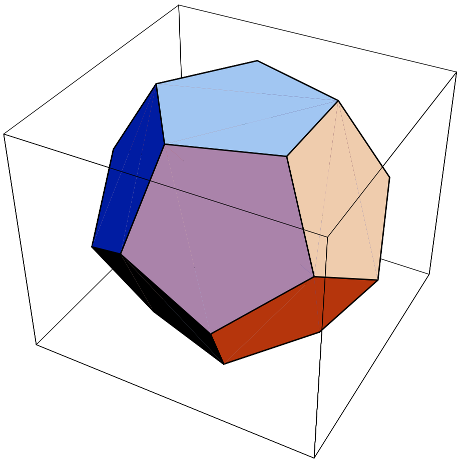


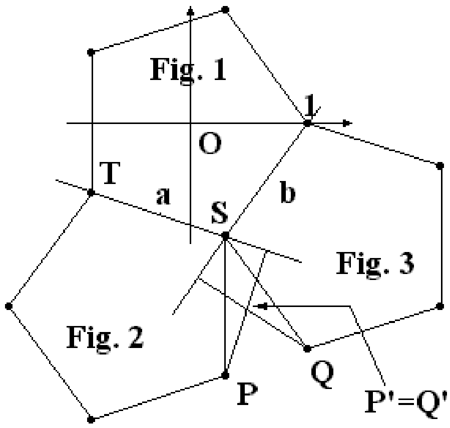
Berechnung mit Hilfe des Flächenprodukts:

i. Radien: $r_1 = 1,\ \ r_2 = 2$
$\rightsquigarrow$ Flächeninhalt des Sterns = ?

ii. Radien: $r_1 = a,\ \ r_2 = b$
$\rightsquigarrow$ Flächeninhalt des Sterns = ?

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**






Ein Dodekaeder (vgl. Bild links) liegt mit einer Fläche in der $(x, y)$-Grundebene so im Koordinatensystem, wie das Bild rechts (Fig. 1) zeigt, wo ein Teil einer Abwicklung wiedergegeben ist. Wir nehmen an, dass der Umkreisradius von Fig. 1 gleich 1 sei.
Um das Dodekaeder zu gewinnen, werden die gezeigten Flächen Fig. 2 um die Kante $a$ und Fig. 2 um die Kante $b$ so hochgeklappt, bis sich die entsprechenden Kanten mit den Punkten $P$ und $Q$ decken. Die beiden Punkte wandern dabei in je einer erstprojizierenden Ebene $\Phi_P$ und $\Phi_Q$ nach oben $\Rightarrow$ $P' = Q'$.

(a) Berechne die Koordinaten der Punkte $S$ und $T$ sowie der Punkte $P$ und $Q$.

(b) Berechne die Kantenlänge des Dodekaeders mit dem Flächenumkreisradius 1.

(c) Berechne den Punkt $P' = Q'$.

(d) Berechne den Winkel zwischen zwei aneinanderstossenden Dodekaederflächen.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 8. September 2003

## 2.41 Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2003 Klasse B2

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden 6 Aufgaben:**

**Aufgabe 1** **(15 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte: • *Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:*

(a) $f(x) = 2\,x^4 + 5\,x^0 - 4\,x^2 + x - \dfrac{1}{x}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$

iii. $f''(x) = \,?$

(b) $f(x) = 2\,x^4 + 5\,x^0 - 4\,x^2 + x - \dfrac{1}{x}$

i. $\int f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_1^2 f(x)\,dx = \,?$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{cos(\frac{x}{2} - 1)^2}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $\int f(x)\,dx = \,?$

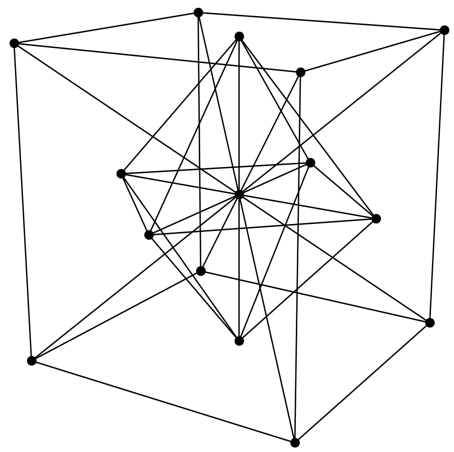
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x-1)\,(x+1)}$

i. $\int\limits_3^5 f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_3^\infty f(x)\,dx = \,?$

(e) $f(x) = 4\,\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}} \leadsto \int\limits_\pi^e f(x)\,dx = \,?$

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**



Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge $s = 1$ mit eingeschriebenem Oktaeder (vgl. Abbildung).

(a) Leite eine Formel für den Winkel $\alpha$ zwischen zwei Raumdiagonalen des Würfels her und berechne den Winkel.

(b) Im Würfel ist ein Oktaeder derart eingeschrieben, dass die Oktaederecken mit den Mittelpunkten der Würfelseitenflächen zusammenfallen (vgl. Abbildung oben). Leite eine Formel für den Winkel $\beta$ zwischen zwei benachbarten Oktaederseitenflächen her und berechne den Winkel.

(c) Suche eine Beziehung zwischen $\alpha$ und $\beta$. Was ist der Zusammenhang zur Dualität von Würfel und Oktaeder?

(d) Leite folgende Verhältnisse exakt her:

i. Inhalt des Volumens des Würfels : Inhalt des Volumens des Oktaeders ?

ii. Inhalt einer Seitenfläche des Würfels : Inhalt einer Seitenfläche des Oktaeders ?

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = (x-a)\cdot x^2$.

(a) Skizziere die Funktion für $a = 1 \rightsquigarrow f_1(x)$.

(b) Berechne für beliebiges $a$ den Funktionswert für $x = a$. Berechne an dieser Stelle dann die Ableitung $f_a'(x)$ sowie den Steigungswinkel der Tangente.

(c) Wie muss $a$ gewählt werden, so dass der Steigungswinkel der Tangente für $x = a$ im Bogenmass gleich $\pi/4$ ist?

(d) Berechne für beliebiges $a$ die Lage eines allfälligen relativen Minimums von $(x_1, f_a(x_1))$.

(e) Berechne für beliebiges $a$ den Flächeninhalt $A$ unter der Kurve von $f_a(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = a$.

(f) Was ist bemerkenswert am Verhältnis $A : f_a(x_1)$ ?

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Wir betrachten die Funktionen $g_a(x) = a - x^2$ und $h_a(x) = a - x^4,\ \ a > 0$.

(a) Berechne die Nullstellen von $g_a(x)$ und $h_a(x)$ und skizziere die Graphen für ein beliebig gewähltes $a$. (Interessant für die Skizze wäre z.B. die Wahl $a = 16$.)

(b) Die Graphen von $g_a$ und $h_a$ werden zwischen ihren jeweiligen Nullstellen um die $x$–Achse rotiert. Berechne die beiden entstehenden Volumeninhalte $V_g$ und $V_h$ der Rotationskörper.

(c) Berechne $a = a_0$ so, dass $V_g = V_h$ gilt.

(d) Berechne das Verhältnis der beiden rotierten Flächeninhalte unter den Kurven von $g_a$ und $h_a$.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Wir betrachten $f(x, a, b) = x^2 + a\,x + b$ und dazu

$$\vec{v}_1(x, a, b) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, a, b) \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2(x, a, b) = \begin{pmatrix} x + 1 \\ f(x + 1, a, b) \end{pmatrix}.$$

(a) Skizziere $f(x, 1, 1)$ sowie $\vec{v}_1(-0.5, 1, 1)$ und $\vec{v}_2(-0.5, 1, 1)$.

(b) Berechne das Skalarprodukt $s(x, a, b) := \langle \vec{v}_1(x, a, b), \vec{v}_2(x, a, b) \rangle$.

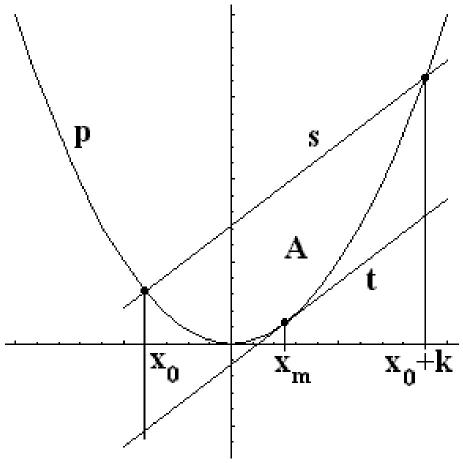
(c) Skizziere den Graphen von $s(x, 1, 1)$.

(d) Suche mit Hilfe der Differentialrechnung allfällige Extrema und Wendepunkte von $s(x, 1, 1)$.

(e) Unteruche, ob es einen Wert $x$ so gibt, dass $\vec{v}_1(x, 1, 1) \perp \vec{v}_2(x, 1, 1)$ gilt.

(f) Unteruche, ob es einen Wert $x$ so gibt, dass $\vec{v}_1(x, a, 0) \perp \vec{v}_2(x, a, 0)$ gilt.

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**




Gegeben ist die Funktion $p(x) = a\,x^2$ sowie die Werte $x_0$ und $k$ (vgl. Abbildung). Durch die Punkte $P_1(x_0/p(x_0))$ und $P_2((x_0+k)/p(x_0+k))$ wird die Gerade $s$ ($\rightsquigarrow$ Sehne $\overline{P_1P_2}$) gelegt. Diese hat die Steigung $m = m(x_0)$, welche von der Wahl von $x_0$ abhängt.

Sei $t$ diejenige Tangente an die Parabel $p$, die die gleiche Steigung $m = m(x_0)$ hat wie $s(x)$.

(a) Berechne die Funktionsgleichung der Sehne $s(x) = m\,x + b = m(x_0)\,x + b(x_0)$.

(b) Berechne die Koordinaten des Punktes $P_3(x_m/p(x_m))$ desjenigen Punktes, in dem die Tangente die gleiche Steigung $m = m(x_0)$ wie die Sehne $s$ hat.

(c) Berechne die Funktionsgleichung der Tangente $t(x) = m\,x + c = m(x_0)\,x + c(x_0)$.

(d) Berechne den Inhalt der eingeschlossenen Fläche $A$ zwischen der Kurve $p$ und der Sehne $s$ (von $x_0$ bis $x_0 + k$). Untersuche, wie der berechnete Flächeninhalt ändert, wenn $x_0$ verändert wird.

(e) Berechne den Inhalt der eingeschlossenen Fläche zwischen der Sehne $s$ und der Tangente $t$ (Trapezfläche $T$ von $x_0$ bis $x_0 + k$). Untersuche, wie der berechnete Flächeninhalt ändert, wenn $x_0$ verändert wird.

(f) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte von $T$ und $A$. Untersuche, wie das berechnete Verhältnis ändert, wenn $x_0$ verändert wird.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik Biel,

23. September 2004

## 2.42 Modulprüfung in Mathematik 2004 — Klasse I1a

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden 4 Aufgaben:**

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte: • *Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:*

(a) $f(x) = 6\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x^1 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$

iii. $f'(x)|_{x=1} =$ *Steigung der Kurve* $\Rightarrow$ *Steigungswinkel* $\alpha = \,?$

iv. $\alpha = \dfrac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; x \approx \,?$

v. $f''(x) = \,?$

(b) $f(x) = (e^x + \cos(x))^x + \dfrac{((\sin(\frac{x}{3} - 3))^2)}{(ln(x) - x^2)}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=1.0} = \,?$

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ in einem Koordinatensystem mit folgenden Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ (0;0) & (1;1) & (2;0) & (3;1) & (4;-1) & (6;0) & (7;3) \end{pmatrix}$$

$P_1, P_2, P_3$ sind durch eine Polynomkurve 3. Grades $f_1(x)$ verbunden. Ebenso $P_3, P_4, P_5$ durch $f_2(x)$ und $P_5, P_6, P_7$ durch $f_3(x)$. In den Punkten $P_3$ und $P_5$ stimmen die Tangenten der benachbarten Kurven überein. In $P_1$ ist die Tangentensteigung der Kurve gleich 0.

(a) Berechne die drei Polynomkurven $f_1(x), f_2(x)$ und $f_3(x)$.
$(f_1(x) = a_1\,x^3 + b_1\,x^2 + c_1\,x + d_1 = \,?$ u.s.w..)

(b) Berechne die Steigungen in $P_3$, $P_5$ und $P_7$.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktionskurve $C$ von $f(x) = e^x$. Durch die Punkte $Q_1(-1; f(-1))$ und $Q_2(1; f(1))$ wird die Sehne $s$ gezogen. Diese Sehne wird soweit parallel nach unten veschoben, bis sie zur Tangente $t$ wird. (Mache eine Skizze.)

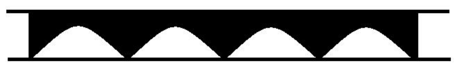
(a) Berechne den Berührungspunkt $T(x_0; t(x_0))$ von $t$ an $C$ $(t(x_0) = f(x_0))$.

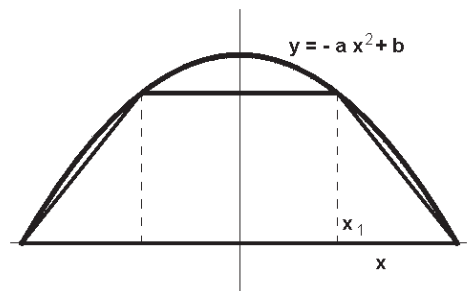
(b) Berechne den Schnittpunkt $A$ von $t$ mit der $x$–Achse.

(c) Sei $n$ die Normale zu $t$ in $T$. Berechne den Schnittpunkt $B$ von $n$ mit der $x$–Achse.

(d) Berechne den Inhalt des Dreiecks $\triangle ABT$.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**






In Ixtown steht eine Stadtbahnbrücke mit parabelförmigen Brückenbögen. Unter einem solchen Parabelbogen soll eine trapezförmige Halle für die Computergrufti–Messe gebaut werden. Die Wänden und Decke der Halle sind ebene Flächen. Stirnseitig ist die Halle vertikal bündig zur Brücke und verglast. (Vgl. nebenstehende Skizze). Für die Parabel nehmen wir folgende Funktion an:

$$y = f(x) = -a\,x^2 + b$$

Die gemessenen Werte für $a$ und $b$ sind aus der Bogenhöhe 20 $Meter$ und der Bogenbreite auf Bodenniveau 40 $Meter$ zu bestimmen.

(a) $a,\ b\ = ?$

(b) Berechne die $x$–Koordinate $x_1$ des rechten oberen Punktes des Trapezes, so dass die einfallende Lichtmenge maximal ist ($\rightsquigarrow$ grösstmöglicher Stirnflächeninhalt, $\rightsquigarrow$ $x_1 = ?$ Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(c) Berechne näherungsweise das ungenutzte Restvolumen zwischen Brücke und Halle im Bogen, in dem die Halle steht. (Die Brückenbreite $s$ ist gleich 20 $Meter$.)

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

**Zusatz:**

(a) $a_1 = 1,\;\; a_2 = -1,\;\; a_3 = 2,\;\; a_4 = 12,\;\; a_n = \alpha\, n^3 + \beta\, n^2 + \gamma\, n + \delta$

i. $a_5 = ?$

ii. $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = ?$

iii. $s_{100} \approx ?$

iv. $\dfrac{s_{1000}}{s_{999}} \approx ?$

(b) $b_1 = 1,\;\; a_n = (n+1)(b_{n-1} - 1) \leadsto\;\; b_{50} \approx ?$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^2 - e}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}} \cdot \dfrac{\cos(n^2) + n^2 - 2\,n + 2}{3\,n^3 + 4\,n^2 + 2\,n - 1} \cdot (n+1) = ?$

— ENDE —

Haute école spécialisée bernoise, haute école technique et informatique Bienne
23. séptembre 2004

## 2.43 Examen de module en analyse et math. p. ord. 2004 I1c

*Bonne chance !*

**Résoudre les 4 problèmes suivants:**

**Aufgabe 1** **(12 points)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte: • *Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:*

(a) $f(x) = 6\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x^1 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$

iii. • $f'(x)|_{x=1} =$ *pente de la courbe* $\Rightarrow$ *angle de montée* $\alpha = \,?$

iv. $\alpha = \dfrac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; x \approx \,?$

v. $f''(x) = \,?$

(b) $f(x) = (e^x + \cos(x))^x + \dfrac{((\sin(\frac{x}{3} - 3))^2)}{(ln(x) - x^2)}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=1.0} = \,?$

**Aufgabe 2** **(12 points)**

Gegeben sind die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ in einem Koordinatensystem mit folgenden Koordinaten: • *Soyent donnés les points* $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ *dans un système de coordonnées avec les coordonnées suivantes:*

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ (0;0) & (1;1) & (2;0) & (3;1) & (4;-1) & (6;0) & (7;3) \end{pmatrix}$$

$P_1, P_2, P_3$ sind durch eine Polynomkurve 3. Grades $f_1(x)$ verbunden. Ebenso $P_3, P_4, P_5$ durch $f_2(x)$ und $P_5, P_6, P_7$ durch $f_3(x)$. In den Punkten $P_3$ und $P_5$ stimmen die Tangenten der benachbarten Kurven überein. In $P_1$ ist die Tangentensteigung der Kurve gleich 0.
• $P_1, P_2, P_3$ *sont liées par une courbe polynomiale du degrée 3* $f_1(x)$. *Ainsi* $P_3, P_4, P_5$ *par* $f_2(x)$ *et* $P_5, P_6, P_7$ *par* $f_3(x)$. *Dans les points* $P_3$ *et* $P_5$ *les tangentes sont identiques avec celles des courbes voisines. Dans* $P_1$ *la montée de tangente est* 0.

(a) Berechne die drei Polynomkurven $f_1(x), f_2(x)$ und $f_3(x)$. ($f_1(x) = a_1\,x^3 + b_1\,x^2 + c_1\,x + d_1 = \,?$ u.s.w..) • *Calculer les trois courbes polynômiales* $f_1(x), f_2(x)$ *et* $f_3(x)$. *(*$f_1(x) = a_1\,x^3 + b_1\,x^2 + c_1\,x + d_1 = \,?$ *etc.)*

(b) Berechne die Steigungen in $P_3$, $P_5$ und $P_7$. • *Claculer les pentes dans* $P_3$, $P_5$ *et* $P_7$.

**Aufgabe 3** **(12 points)**

Gegeben ist die Funktionskurve $C$ von $f(x) = e^x$. Durch die Punkte $Q_1(-1; f(-1))$ und $Q_2(1; f(1))$ wird die Sehne $s$ gezogen. Diese Sehne wird soweit parallel nach unten veschoben, bis sie zur Tangente $t$ wird. (Mache eine Skizze.)

• *Soit donnée la courbe de fonction $C$ de $f(x) = e^x$. On tire la corde $s$ par les points $Q_1(-1; f(-1))$ et $Q_2(1; f(1))$. Cette corde soit déplacée en bas jusqu'à ce qu'elle devienne la tangente $t$. (Faire une esquisse.)*

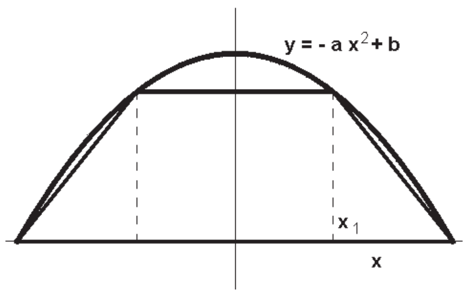
(a) Berechne den Berührungspunkt $T(x_0; t(x_0))$ von $t$ an $C$ $(t(x_0) = f(x_0))$. • *Calculer le point de contact $T(x_0; t(x_0))$ de $t$ à $C$ $(t(x_0) = f(x_0))$.*

(b) Berechne den Schnittpunkt $A$ von $t$ mit der $x$–Achse. • *Calculer le point d'intersection $A$ de $t$ avec l'axe $x$.*

(c) Sei $n$ die Normale zu $t$ in $T$. Berechne den Schnittpunkt $B$ von $n$ mit der $x$–Achse. • *Soit $n$ la normale à $t$ dans $T$. Calculer le point d'intersection $B$ de $n$ avec l'axe $x$.*

(d) Berechne den Inhalt des Dreiecks $\triangle ABT$. • *Calculer le contenu du triangle $\triangle ABT$.*

**Aufgabe 4** **(12 points)**




In Ixtown steht eine Stadtbahnbrücke mit parabelförmigen Brückenbögen. Unter einem solchen Parabelbogen soll eine trapezförmige Halle für die Computergrufti–Messe gebaut werden. Die Wänden und Decke der Halle sind ebene Flächen. Stirnseitig ist die Halle vertikal bündig zur Brücke und verglast. (Vgl. nebenstehende Skizze). Für die Parabel nehmen wir folgende Funktion an: • *A Ixtown, on trouve un pont de chemin de fer métropolitain avec les arcs de pont en forme parabolique. Sous un tel arc parabolique, un hall en forme d'un trapèze doit être pour bâti pour le foire des "Grufti d'ordinateour". Les parois et le plafond du hall sont des surfaces plates. Les parois de devant et de derière sont verticales et planes avec le pont. (Voir croquis ci-contre.) Pour la parabole on prend la fonction suivante:*

$$y = f(x) = -a\,x^2 + b$$

Die gemessenen Werte für $a$ und $b$ sind aus der Bogenhöhe 20 $Meter$ und der Bogenbreite auf Bodenniveau 40 $Meter$ zu bestimmen. • *Les valeurs mesurées pour a et b sont à calculer à partir de la hauteur de l'arc (*20 *mètres) et la largeur de l'arc au niveau du sol (*40 *mètres).*

(a) $a, \ b \ = ?$

(b) Berechne die $x$–Koordinate $x_1$ des rechten oberen Punktes des Trapezes, so dass die einfallende Lichtmenge maximal ist ($\rightsquigarrow$ grösstmöglicher Stirnflächeninhalt, $\rightsquigarrow$ $x_1 = ?$. Der Lösungsweg muss sichtbar sein.) • *Calculer la coordonnée $x = x_1$ du point supérieur à droite du trapèze, pour que la quantité de lumière incidente soit maximale ($\rightsquigarrow$ surface de front maximale, , $\rightsquigarrow$ $x_1 = ?$ Le voie de résolution doit être visible.)*

(c) Berechne näherungsweise das ungenutzte Restvolumen zwischen Brücke und Halle im Bogen, in dem die Halle steht. (Die Brückenbreite $s$ ist gleich 20 $Meter$.) • *Calculer approximativement le volume de reste inutilisé dans l'arc entre le pont et le hall. (L'arc dans lequel le hall est situé... La largeur du pont $s$ est égale à* 20 *mètres.)*

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

**Supplément:**

(a) $a_1 = 1,\ \ a_2 = -1,\ \ a_3 = 2,\ \ a_4 = 12,\ \ a_n = \alpha\, n^3 + \beta\, n^2 + \gamma\, n + \delta$

i. $a_5 = \,?$

ii. $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \,?$

iii. $s_{100} \approx \,?$

iv. $\dfrac{s_{1000}}{s_{999}} \approx \,?$

(b) $b_1 = 1,\ \ a_n = (n+1)(b_{n-1} - 1) \rightsquigarrow\ \ b_{50} \approx \,?$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^2 - e}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}} \cdot \dfrac{\cos(n^2) + n^2 - 2\,n + 2}{3\,n^3 + 4\,n^2 + 2\,n - 1} \cdot (n+1) = \,?$

— Fin —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz Biel und Burgdorf,
6. September 2004

## 2.44 Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2004 Klasse AV02–1

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden 6 Aufgaben:**

**Aufgabe 1** **(15 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte: • *Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:*

(a) $f(x) = 4\,x^4 + 5\,x^5 - 6\,x^6 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$

iii. $f'(x)|_{x=1} =$ *Steigung der Kurve* $\Rightarrow$ *Steigungswinkel* $\alpha = \,?$

iv. $f''(x) = \,?$

(b) $f(x) = 4\,x^4 + 5\,x^5 - 6\,x^6 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $\int f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_1^2 f(x)\,dx = \,?$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(\frac{x}{3} - 3)^2}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $\int f(x)\,dx = \,?$

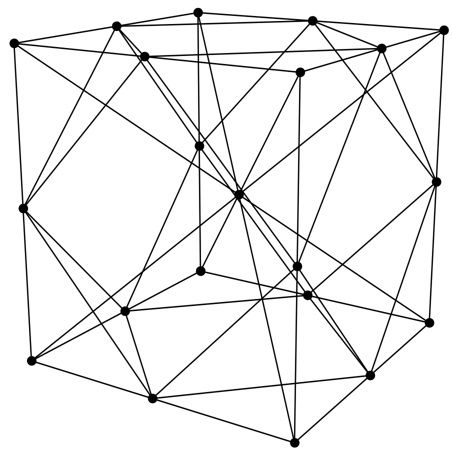
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x+2)\,(x-2)}$

i. $\int\limits_3^5 f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_3^\infty f(x)\,dx = \,?$

(e) $f(x) = 7\ln(x) - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}} \rightsquigarrow \int\limits_1^e f(x)\,dx = \,?$

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**



Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge $s = 1$. Durch die Verbindung benachbarter Kantenmittelpunkte entsteht an jeder Ecke nach aussen je ein nicht reguläres Tetraeder (vgl. Abbildung).

(a) Berechne das Volumen eines Tetraeders an einer Würfelecke. (Die Herleitung der Formel wird bewertet).

(b) Berechne das Volumen des Restkörpers, welcher durch wegschneiden der Tetraeder vom Würfel entsteht.

(c) Berechne die Oberfläche dieses Restkörpers.
(Die Herleitung der Formel wird bewertet).

(d) Um welche Körperart handelt es sich beim Restkörper?

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Hans und Max wollen sich ein Bild von der Umgebung machen, in der sie eine Überbauung am Rande einer Stadt planen wollen. Max startet vom Hotel aus zur Stadterkundung zu Fuss mit etwa gleichmässiger Geschwindigkeit in flachem Gelände. 50 Minuten später startet Hans vom Hotel aus zur selben Tour, ebenfalls mit etwa gleichmässiger Geschwindigkeit. Nach 12 $km$ holt Hans Max ein (nach der bis jetzt zurückgelegten Strecke $s_1$). Nach weiteren 50 Minuten ist Hans 1 $km$ weiter als Max.

(a) Skizziere die Funktionen für $s_{Max}(t) = v_{Max} \cdot t$ und $s_{Hans}(t) = v_{Hans} \cdot t$ soweit es die Angaben schon erlauben.

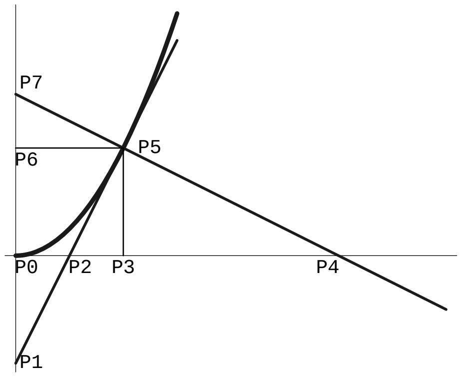
(b) Berechne $v_{Max}$ und $v_{Hans}$.

(c) Mit welcher Geschwindigkeit $v_{Hans,2}$ müsste Hans gehen, um Max schon auf halber Strecke $s_1$ einholen zu können? (Kommentar zu $v_{Hans,2} : v_{Hans}$?)

(d) Wir ersetzen Hans und Max durch quaderförmige Becken $A$ und $B$. Statt Geschwindigkeit haben wir dann Sinkgeschwindigkeit bei auslaufendem Wasser. An Stelle von $km$ müssen wir jetzt die Sinkhöhe in $cm$ verrechnen. Wie gross wäre dann $v_A$ und $v_B$?

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

In der Skizze sehen wir die Funktion $f(x) = a\,x^2,\ x \geq 0$. In $P_5(x_0, y = a\,x_0^2)$ sind die Tangente und die Normale gezeichnet. Es entstehen Punkte $P_0 \ldots P_7$, welche Dreiecksflächen resp. Flächen definieren, deren eine Begrenzungslinie der Parabelbogen oder die gezeichneten Geradenstücke sind.
Wir verwenden folgende Bezeichnungen für die Flächen(mache eine Skizze!):



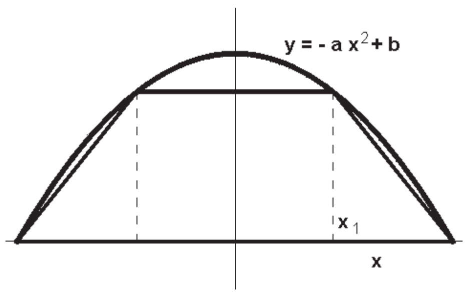

$(P_0P_5P_6P_0) \rightsquigarrow\ A_1,$
$(P_0P_3P_5P_0) \rightsquigarrow\ A_2,$
$(P_0P_1P_2P_5P_0) \rightsquigarrow\ A_3,$
$(P_0P_5P_7P_6P_0) \rightsquigarrow\ A_4.$

(a) Berechne die folgenden Verhältnisse der Flächeninhalte ($P_3 = P_3(x_0, 0)$).
  i. $A_1 : A_2 = ?$
  ii. $A_4 : A_3 = ?$

(b) Untersuche den Einfluss von $a$ auf die Flächenverhältnisse.

(c) Gibt es ein $x_0$, für das $\overrightarrow{P_1P_4} \perp \overrightarrow{P_2P_7}$ ist? (Hinweis: Skalarprodukt.)

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**




In einer Stadt steht eine Stadtbahnbrücke mit parabelförmigen Brückenbögen. Unter einem solchen Parabelbogen soll eine trapezförmige Halle gebaut werden mit ebenen Wänden und ebener Decke (vgl. nebenstehende Skizze). Für die Parabel nehmen wir folgende Funktion an:

$$y = f(x) = -a\,x^2 + b$$

Die gemessenen Werte für $a$ und $b$ sind aus der Bogenhöhe 10 $Meter$ und der Bogenbreite auf Bodenniveau 20 $Meter$ zu bestimmen. Vorne und hinten (Stirnseiten) sind die Wände vertikal und bündig zur Brücke. Die Stirnseiten der Halle werden verglast.

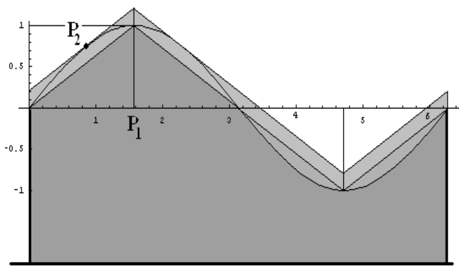
(a) $a,\ b\ = ?$

(b) Berechne die $x$–Koordinate $x_1$ des rechten oberen Punktes des Trapezes, so dass die einfallende Lichtmenge maximal ist (grösstmöglicher Stirnflächeninhalt) $\leadsto$ $x_1 = ?$ (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(c) Berechne das ungenutzte Restvolumen zwischen Brücke und Halle im Bogen, in dem die Halle steht. (Die Brückenbreite $h$ ist als Parameter einzusetzen.)

**Aufgabe 6** **(12 Punkte)**

Nebenstehende Skizze zeigt ein Haus von der Seite. Das aus drei Pultdächern zusammengesetzte Dach ist um eine Sinuslinie in einem Koordinatensystem wie folgt konstuiert: Die Sehne durch die Punkte $(0; 0)$ und $(\frac{\pi}{2}; 1)$ wird parallel nach oben verschoben, sodass eine Tangente an die Sinuslinie im Punkte $P_2$ des Giebelgesims entsteht (vgl. nebenstehende Skizze). $P_1$ hat die Koordinaten $(\frac{\pi}{2}; 0)$.




(a) Berechne die Stirnfläche des Giebelgesims im gegebenen Koordinatensystem.

(b) Jedes der drei Stücke des Gesims soll je aus einem Kupferblech gefertigt werden. Die drei Stücke werden bei der Montage mit Kunststoff verbunden. Berechne die totale Länge und die Breite des zu bestellenden rechteckigen Blechbandes, wenn das Band der Länge nach in drei Stücke geteilt wird. Dabei wird kein Verschnitt berechnet, ausser an den Enden. (Mache dazu eine Skizze.)

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik Biel,
26. September 2005

## 2.45 Modulprüfung in Mathematik 2005 Klasse I1a

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden 4 Aufgaben:**

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte: • *Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:*

(a) $f(x) = -2\,\dfrac{6\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x^1 + x^0}{-x^2 + 2x + 1}$

i. $f'(x) = ?$

ii. $f'(x)|_{x=0} = ?$

iii. $f'(x)|_{x=0} =$ Steigung der Kurve $\Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha = ?$

iv. Etwaige reelle Lösungen: $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$

(b) $f(x) = (\sin(x)\,e^x - \cos(e^{-x})) - \dfrac{x^3}{x+1}$

i. $f'(x)|_{x=1.0} = ?$

ii. $f''(x) = ?$

iii. $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = ?$

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Kurve von $f(t) = -2\,e^{-t^2} + 1$ und im 4. Quadranten auf dieser Kurve ein Punkt $P = (x; y)$, d.h. $t = x$, $f(t) = y$. Wie gross muss $x$ sein, damit das durch $(x; y)$, $(0; 0)$, $(-x; f(-x))$ gegebene Dreieck maximalen Inhalt $A(x)$ hat? (Der Inhalt wird als positiv erklärt.)

(a) Skizziere $A(x)$.

(b) Berechne $A'(x)$ und verwende den Newton-Algorithmus um den Punkt $P = (x; y)$ im 4. Quadranten zu finden, für den $A(x)$ maximal wird (Frage mit der nächsten Frage verbunden!).

(c) Man starte den Newton-Algorithmus mit $x_1 = 0,5$. Nach wievielen Schritten ändert sich der Wert an der 3. Stelle hinter dem Dezimalpunkt nicht mehr?

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionskurven von $f_1(x) = a\,(x+3)(x+2)(x-4)$ sowie $f_2(x) = b+x^2$. An der Stelle $x = -2$ sollen die beiden Kurven einen gemeinsamen Punkt $S_1$ sowie auch eine gemeinsame Tangente haben. (Mache eine Skizze.)

(a) Berechne $a$ und $b$.

(b) Berechne einen zweiten Schnittpunkt $S_2$ der beiden Kurven ($|x_2| \rightarrow min.$).

(c) Durch den Wendepunkt $W$ von $f_1$ sowie durch $S_1$ und $S_2$ wird eine Polynomkurve $f_3(x)$ gelegt, sodass die Tangenten von $f_2$ und $f_3$ in $S_2$ übereinstimmen. Berechne die Steigung von $f_3$ in $S_2$. ($pgrad \rightarrow min.$)

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Gegeben sind 5 Punkte in einem Koordinatensystem:

$$P_1 = (3; -6), P_2 = (-3; -6), P_3 = (-3; 5), P_4 = (0; 6), P_5 = (3; 4)$$

Durch die Punkte soll ein nicht degenerierter Kegelschnitt gelegt werden (Ellipse, Parabel oder Hyperbel). Für die Kegelschnittgleichung soll folgender Ansatz gemacht werden:

$$f(x, y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0, \;\; f = 1$$

(a) Berechne die Parameter $a, b, c, d, e$ und setze diese in $f(x, y)$ ein.

(b) Berechne aus $f(x, y) = 0$ die Funktionen $y_k(x)$ (vermutlich zwei Möglichkeiten $k = 1$ und $k = 2$).

(c) Skizziere die Kurven $y_k(x)$.

(d) Berechne im Falle einer Ellipse $u = x_{max}$, im Falle der Hyperbel $u = x_{min}$ des höher liegenden Hyperbelasts.

(e) Entscheide exakt, ob $u > -0.5$ richtig ist!

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

**Zusatz:**

(a) $a_n = n^4, \ \ n \in \mathbb{N}$

i. $\Rightarrow \ b_n = a_{n+1} - a_n = ?$

ii. $c_n = b_{n+1} - b_n = ?$

iii. $c_{9'000} = ?$

(b) In Nasewo–Schilda steht ein 105 Meter hoher Turm mit einem quadratischen Grundriss von 8 mal 8 Metern. Auf einer Seite ist ein Eingang angebracht, welcher so breit wie der Turm, aber nur 4 Meter hoch ist. Vor dem Turm ist der Marktplatz. Dieser verläuft exakt horizontal, fast 250 Meter weit in alle Richtungen. Im Turm soll nun an der hintern Wand der grösste ebene Spiegel der Welt aufgestellt werden, so breit wie die Wand wohlverstanden. Wie hoch kann dieser Spiegel maximal sein, wenn er durch den Eingang geschoben werden muss und rechteckig sein soll?

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik Biel,
26. September 2005

## 2.46 Modulprüfung in Mathematik 2005 Klasse I1c

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden 4 Aufgaben:**

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte: • *Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:*

(a) $f(x) = -2\,\dfrac{6\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x^1 + x^0}{x^2 - 2x + 1}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=0} = \,?$

iii. $f'(x)|_{x=0} =$ Steigung der Kurve $\Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha = \,?$

iv. Etwaige reelle Lösungen: $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \,?$

(b) $f(x) = (\sin(x)\,e^x - \cos(e^{-x})) - \dfrac{x^3}{x+1}$

i. $f'(x)|_{x=1.0} = \,?$

ii. $f''(x) = \,?$

iii. $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = \,?$

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Kurve von $f(t) = 2\,e^{-t^2} - 1$ und im 1. Quadranten auf dieser Kurve ein Punkt $P = (x; y)$, d.h. $t = x$, $f(t) = y$. Wie gross muss $x$ sein, damit das durch $(x; y)$, $(0; 0)$, $(-x; f(-x))$ gegebene Dreieck maximalen Inhalt $A(x)$ hat?

(a) Skizziere $A(x)$.

(b) Berechne $A'(x)$ und verwende den Newton-Algorithmus um den Punkt $P = (x; y)$ im 1. Quadranten zu finden, für den $A(x)$ maximal wird (Frage mit der nächsten Frage verbunden!).

(c) Man starte den Newton-Algorithmus mit $x_1 = 0,5$. Nach wievielen Schritten ändert sich der Wert an der 3. Stelle hinter dem Dezimalpunkt nicht mehr?

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionskurven von $f_1(x) = a\,(x-3)(x-2)(x+4)$ sowie $f_2(x) = b+x^2$. An der Stelle $x = 2$ sollen die beiden Kurven einen gemeinsamen Punkt $S_1$ sowie auch eine gemeinsame Tangente haben. (Mache eine Skizze.)

(a) Berechne $a$ und $b$.

(b) Berechne einen zweiten Schnittpunkt $S_2$ der beiden Kurven ($|x_2| \to min.$).

(c) Durch den Wendepunkt $W$ von $f_1$ sowie durch $S_1$ und $S_2$ wird eine Polynomkurve $f_3(x)$ gelegt, sodass die Tangenten von $f_2$ und $f_3$ in $S_2$ übereinstimmen. Berechne die Steigung von $f_3$ in $S_2$. (*pgrad* $\to$ *min.*)

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Gegeben sind 5 Punkte in einem Koordinatensystem:

$$P_1 = (3;6), P_2 = (-3;6), P_3 = (-3;-5), P_4 = (0;-6), P_5 = (3;-4)$$

Durch die Punkte soll ein nicht degenerierter Kegelschnitt gelegt werden (Ellipse, Parabel oder Hyperbel). Für die Kegelschnittgleichung soll folgender Ansatz gemacht werden:

$$f(x,y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0, \;\; f = 1$$

(a) Berechne die Parameter $a, b, c, d, e$ und setze diese in $f(x,y)$ ein.

(b) Berechne aus $f(x,y) = 0$ die Funktionen $y_k(x)$ (vermutlich zwei Möglichkeiten $k = 1$ und $k = 2$).

(c) Skizziere die Kurven $y_k(x)$.

(d) Berechne im Falle einer Ellipse $u = x_{max}$, im Falle der Hyperbel $u = x_{min}$ des höher liegenden Hyperbelasts.

(e) Entscheide exakt, ob $u > -0.5$ richtig ist!

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

**Zusatz:**

(a) $a_n = n^4, \; n \in \mathbb{N}$

i. $\Rightarrow \; b_n = a_{n+1} - a_n = ?$

ii. $c_n = b_{n+1} - b_n = ?$

iii. $c_{10'000} = ?$

(b) In Nasewo–Schilda steht ein 95 Meter hoher Turm mit einem quadratischen Grundriss von 6 mal 6 Metern. Auf einer Seite ist ein Eingang angebracht, welcher so breit wie der Turm, aber nur 3 Meter hoch ist. Vor dem Turm ist der Marktplatz. Dieser verläuft exakt horizontal, fast 200 Meter weit in alle Richtungen. Im Turm soll nun an der hintern Wand der grösste ebene Spiegel der Welt aufgestellt werden, so breit wie die Wand wohlverstanden. Wie hoch kann dieser Spiegel maximal sein, wenn er durch den Eingang geschoben werden muss und rechteckig sein soll?

— ENDE —

Haute école spécialisée bernoise, haute école technique et informatique Bienne

26. séptembre 2005

## 2.47 Examen de module en analyse et math. p. ord. 2005 I1c

*Bonne chance !*

**Résoudre les 4 problèmes suivants:**

**Aufgabe 1** **(12 Punkte • *points*)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte: • *Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:*

(a) $f(x) = -2\,\dfrac{6\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x^1 + x^0}{x^2 - 2x + 1}$

i. $f'(x) = ?$

ii. $f'(x)|_{x=0} = ?$

iii. $f'(x)|_{x=0} =$ Steigung der Kurve $\Rightarrow$ Steigungswinkel • *Pente de la courbe* $\Rightarrow$ *angle d'inclinaison* $\alpha = ?$

iv. Etwaige reelle Lösungen: • *Solution réelle possible* $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$

(b) $f(x) = (\sin(x)\,e^x - \cos(e^{-x})) - \dfrac{x^3}{x+1}$

i. $f'(x)|_{x=1.0} = ?$

ii. $f''(x) = ?$

iii. $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = ?$

**Aufgabe 2** **(12 Punkte • *points*)**

Gegeben ist die Kurve von $f(t) = 2\,e^{-t^2} - 1$ und im 1. Quadranten auf dieser Kurve ein Punkt $P = (x; y)$, d.h. $t = x,\ \ f(t) = y$. Wie gross muss $x$ sein, damit das durch $(x; y),\ (0; 0),\ (-x; f(-x))$ gegebene Dreieck maximalen Inhalt $A(x)$ hat?

• *Soit donnée la courbe de* $f(t) = 2\,e^{-t^2} - 1$ *et dans le premier quadrant un point* $P = (x; y)$ *sur cette courbe, ç.v.d.* $t = x,\ \ f(t) = y$*. Quelle est la mesure de* $x$ *afin que le triangle donné par* $(x; y),\ (0; 0),\ (-x; f(-x))$ *ait une surface maximale* $A(x)$*?*

(a) Skizziere • *Faire une esquisse de* $A(x)$*.*

(b) Berechne $A'(x)$ und verwende den Newton-Algorithmus um den Punkt $P = (x; y)$ im 1. Quadranten zu finden, für den $A(x)$ maximal wird (Frage mit der nächsten Frage verbunden!). • *Calculer* $A'(x)$ *et utiliser l'algorithme de Newton pour trouver le point* $P = (x; y)$ *dans le premier quadrant, pour lequel* $A(x)$ *devient maximal (la question est liée à la question suivante!).*

(c) Man starte den Newton-Algorithmus mit $x_1 = 0,5$. In nach wievielen Schritten ändert sich der Wert an der 3. Stelle hinter dem Dezimalpunkt nicht mehr? • *On commence l'algorithme de Newton avec* $x_1 = 0,5$*. Après combien d'étapes la valeur à la troisième place après le point décimal ne chanche plus?*

**Aufgabe 3** **(12 Punkte • *points*)**

Gegeben ist die Funktionskurven von $f_1(x) = a\,(x-3)(x-2)(x+4)$ sowie $f_2(x) = b + x^2$. An der Stelle $x = 2$sollen die beiden Kurven einen gemeinsamen Punkt $S_1$ sowie auch eine gemeinsame Tangente haben. (Mache eine Skizze.) • *Soient données les courbes de fonction de $f_1(x) = a\,(x-3)(x-2)(x+4)$ ainsi que $f_2(x) = b + x^2$. A la place $x = 2$ les deux courbes doivent avoir un point commun $S_1$ ainsi qu'une tangente commune. (Faire une esquisse.)*

(a) Berechne $a$ und $b$. • *Calculer $a$ et $b$.*

(b) Berechne einen zweiten Schnittpunkt $S_2$ der beiden Kurven ($|x_2| \to min.$). • *Calculer un deuxième point d'intersection $S_2$ des deux courbes ($|x_2| \to min.$).*

(c) Durch den Wendepunkt $W$ von $f_1$ sowie durch $S_1$ und $S_2$ wird eine Polynomkurve $f_3(x)$ gelegt, sodass die Tangenten von $f_2$ und $f_3$ in $S_2$ übereinstimmen. Berechne die Steigung von $f_3$ in $S_2$. (pgrad $\to$ *min.*) • *On place une courbe polynomiale $f_3(x)$ par le point d'inflexion $W$ de $f_1$ et par $S_1$ et $S_2$ de façon que les tangentes de $f_2$ et $f_3$ soient les mêmes en $S_2$. Calculer la pente de $f_3$ à $S_2$. (pgrad $\to$ min.)*

**Aufgabe 4** **(12 Punkte • *points*)**

Gegeben sind 5 Punkte in einem Koordinatensystem: • *Soient donnés 5 points dans un système de coordonnées*

$$P_1 = (3;6), P_2 = (-3;6), P_3 = (-3;-5), P_4 = (0;-6), P_5 = (3;-4)$$

Durch die Punkte soll ein nicht degenerierter Kegelschnitt gelegt werden (Ellipse, Parabel oder Hyperbel). Für die Kegelschnittgleichung soll folgender Ansatz gemacht werden: • *Par les points on dessine une section conique non dégénérée (ellipse, parabole, hyperbole). Pour l'équation de la section conique on essaye l'approche suivante:*

$$f(x,y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0, \quad f = 1$$

(a) Berechne die Parameter $a, b, c, d, e$ und setze diese in $f(x,y)$ ein. • *Calculer les paramètres $a, b, c, d, e$ et les insérer dans $f(x,y)$.*

(b) Berechne aus $f(x,y) = 0$ die Funktionen $y_k(x)$ (vermutlich zwei Möglichkeiten $k = 1$ und $k = 2$). • *Calculer de $f(x,y) = 0$ les fonctions $y_k(x)$ (probablement deux possibilités $k = 1$ et $k = 2$).*

(c) Skizziere die Kurven $y_k(x)$. • *Esquisse des courbes $y_k(x)$.*

(d) Berechne im Falle einer Ellipse $u = x_{max}$, im Falle der Hyperbel $u = x_{min}$ des höher liegenden Hyperbelasts. • *Calculer dans le cas de l'ellipse $u = x_{max}$, dans le cas de l'hyperbole $u = x_{min}$ du bras de l'hyperbole qui es situé le plus haut.*

(e) Entscheide exakt, ob $u > -0.5$ richtig ist! • *Décider de façon exacte si $u > -0.5$ est juste!*

**Aufgabe 5** **(12 Punkte • *points*)**

**Zusatz: • Adjonction:**

(a) $a_n = n^4, \;\; n \in \mathbb{N}$

i. $\Rightarrow \;\; b_n = a_{n+1} - a_n = ?$

ii. $c_n = b_{n+1} - b_n = ?$

iii. $c_{10'000} = ?$

(b) In Nasewo–Schilda steht ein 95 Meter hoher Turm mit einem quadratischen Grundriss von 6 mal 6 Metern. Auf einer Seite ist ein Eingang angebracht, welcher so breit wie der Turm, aber nur 3 Meter hoch ist. Vor dem Turm ist der Marktplatz. Dieser verläuft exakt horizontal, fast 200 Meter weit in alle Richtungen. Im Turm soll nun an der hintern Wand der grösste ebene Spiegel der Welt aufgestellt werden, so breit wie die Wand wohlverstanden. Wie hoch kann dieser Spiegel maximal sein, wenn er durch den Eingang geschoben werden muss und rechteckig sein soll? • *A Nasewo–Schilda il y a une tour d'une hauteur de 95 mètres, avec un plan carré de 6 sur 6 mètres. D'un côté, on trouve l' entrée qui est aussi large que la tour, mais seulement d'une hauteur de 3 mètres. Devant la tour s'étend la place du marché. Celle-ci a un niveau exactement horizontal et est vaste de presque 200 mètres dans toutes les directions. Dans la tour, au mur du fond, il faut maintenant installer le miroir plat le plus grand du monde entier, aussi large que le mur, bien compris. Combien haut est-ce que ce miroir peut être au maximum s'il doit être porté par l'entrée et s'il est de forme rectangulaire?*

— ENDE • *FIN* —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

13. März 2006

## 2.48 Modulprüfung in Mathematik 2006 M+E 05 / M+E 1

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden 4 Aufgaben:** (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Sei $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

(a) Berechne $P^2 := P \cdot P,\ \ P^3 := P \cdot P^2,\ \ P^4 := P \cdot P^3$. Schliesse daraus allgemein auf eine Formel für $P^n$.

(b) Berechne $Q := P^{-1},\ \ \beta \neq 0$. Setze zur Vereinfachung $q := \dfrac{1}{\beta}$. Berechne damit wie oben $Q^2 := Q \cdot Q,\ \ Q^3 := Q \cdot Q^2,\ \ \ldots$. Schliesse daraus allgemein auf eine Formel für $Q^n$.

(c) Bestimme eine obere Dreiecksmatrix $R = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$ (wenn möglich mit positiv besetzten Zellen), für die $R \cdot R^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$ gilt.

**Aufgabe 2** **(15 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Gleichung $A \cdot \vec{a} = \vec{b}$ oder $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ \gamma \end{pmatrix}$

i. Berechne $\alpha$ für den Fall, dass $\gamma = 5$ gilt.

ii. Wähle nun umgekehrt $\alpha = 5$ und berechne für diesen Fall jetzt $\gamma$

iii. Untersuche, für welche $\alpha$ die Matrix $A$ keine Inverse hat.

(b) i. Gegeben ist die Gleichung

$$B \cdot \vec{k}(t) = \vec{m}(t) \text{ oder } \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4\,t \\ t \\ 7\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist definiert $\vec{k}(t) = \begin{pmatrix} -4\,t \\ t \\ 7\,t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ eine Gerade. Berechne das Bild dieser Gerade, d.h. berechne den Vektor $\vec{m}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Was ist am Resultat auffallend?

ii. Benütze den Gauss-Algorithmus, um $B$ in eine Dreiecksmatrix zu verwandeln, in der unterhalb der Hauptdiagonalen nur noch die Zahl 0 vorkommt. Wieviele linear unabhängige Zeilen kommen in dieser Dreiecksmatrix vor? Und was bedeutet das für die Dimension der Lösungsmenge von $B \cdot \vec{x} = \vec{b}$?

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Gleichung in $\mathbb{C}$: $z^6 = i$.

(a) Stelle alle Lösungen mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion dar.
*(Hinweis: Form $z = e^{i\,\varphi \cdots}$.)*

(b) Stelle die Lösungen mit Hilfe einer Skizze dar und entscheide, wieviele Lösungen im 1. Quadranten liegen.

(c) Berechne die Summe aller möglichen verschiedenen Lösungen: $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = ?$

(d) Sei $z_1$ diejenige Lösung $e^{i\,\varphi \cdots}$ mit dem kleinsten positiven $\varphi$ im Exponenten. Berechne $z_1^5$, $\dfrac{1}{z_1}$, $\bar{z}_1$ sowie $z_1 + \dfrac{1}{z_1}$ numerisch. Was fällt auf?

**Aufgabe 4** **(15 Punkte)**

Die folgenden Probleme sind voneinander unabhängig:

(a) i. Sei $z = a + i$, $a \in \mathbb{R}$. Gegeben ist die Gleichung: $z + \dfrac{1}{z} = 0$. Untersuche, für welche $a \in \mathbb{R}$ diese Gleichung eine Lösung hat. Berechne allenfalls $a$ und $z$ exakt.

ii. Ersetze nun die Gleichung $z + \dfrac{1}{z} = 0$ durch $z + \dfrac{r}{z} = 0$ mit $r \in \mathbb{R}$. Untersuche, für welche $r \in \mathbb{R}$ diese Gleichung allenfalls jetzt auch eine reelle Lösung $z \in \mathbb{R}$ hat.

(b) Gegeben sind im Raum 4 Punkte $P_1(4, 1, -1)$, $P_2(3, -4, 8)$ und $Q_1(5, 15, 2)$, $Q_2(8, -11, z)$. Diese Punkte sollen durch Stangen verbunden werden, die jeweils über die Punkte hinaus weiterlaufen. Die Stangen können für die Rechnung als unendlich dünn, d.h. als Geraden angenommen.

i. Bestimme $z$ so, dass sich die Stangen (Geraden) berühren.
*Hinweis: Das Spatprodukt könnte hier nützlich sein — und wie immer bei geometrischen Problemen könnte auch eine Skizze Nutzen bringen.*

ii. Berechne den Berührungspunkt $S$.

iii. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle P_1 Q_1 S$.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,

24. Februar 2006

## 2.49 Modulprüfung in Mathematik 2006 Klasse B 05 / B1

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden 4 Aufgaben:**

**Aufgabe 1** **(18 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte: • *Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:*

(a) $f(x) = x^2 + 0.5\,\sin(x)$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$

iii. $f'(x)|_{x=1} =$ Steigung der Kurve $\Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha = \,?$

iv. $f''(x)|_{x=1} = \,?$

(b) $f(x) = \left(\sqrt[4]{\left(x^{3/4} - 3\right)^3}\right)^5 \rightsquigarrow f'(x) = \,?$

(c) $f(x) = -4\,x^2 \sin\left(2 - 3\,x^2\right) \rightsquigarrow f'(x) = \,?$

(d) $f(x) = \dfrac{x\,ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1-x} \rightsquigarrow f'(x) = \,?$

(e) $f(x) = 4\,e^{-x} \cos\left(2 - e^x\right) \rightsquigarrow f'(x) = \,?$

(f) $f(x) = x^2 + a\,\sin(x) + \dfrac{2}{x} \rightsquigarrow \int\limits_1^{e^2} f(x)\,dx = \,?$

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben sind zwei Kurve durch $f_1(x) = x^5$ und $f_2(x) = x^{1/5}$ über dem Intervall $I = [0, 1]$. $f_1$ und $f_2$ schliessen über $I$ eine Fläche $A_0$ ein. Die damit gegebene Figur sei ebenfalls mit $A_0$ bezeichnet.

(a) Skizziere die Figur $A_0$.

(b) Zwischen die beiden gegebenen Kurven $f_1$ und $f_2$ wird nun eine dritte Kurve $f_3(x) = x^a$ gelegt mit $a > 0$.
Bestimme $a$ so, dass $f_3$ die Figur $A_0$ in zwei inhaltsgleiche Teilfiguren $A_1$ (oben) und $A_2$ (unten) zerlegt. (Zeichne darauf $f_3$ in der Skizze ein.)

(c) Wie in der letzten Teilaufgabe wird nun zwischen die beiden gegebenen Kurven $f_1$ und $f_2$ eine weitere Kurve $f_4(x) = x^a$ gelegt mit $a > 0$.
Bestimme diesmal $a$ so, dass $f_4$ die Figur $A_0$ in zwei Teilfiguren $A_3$ (oben) und $A_4$ (unten) zerlegt, deren Flächeninhalte sich wie $\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$ verhalten (goldener Schnitt).
(Zeichne darauf $f_4$ ebenfalls in die Skizze ein.)

**Aufgabe 3** **(15 Punkte)**

Gegeben sind zwei Funktionen $f(x) = e^{-x}\left(x^2 - 1\right)$ und $p(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Bestimme die Parameter $a, b, c$ von $p$ so, dass $p(x)$ dieselben Nullestellen hat wie $f(x)$. Zudem soll $p(x)$ für $x = -1$ die gleiche Tangentensteigung haben wie $f(x)$. (Skizziere jetzt die beiden Kurven!)

(b) Bestimme das Verhältnis der beiden Flächeninhalte $A_f$ und $A_p$ zwischen der $x$–Achse und den Kurven $f(x)$ bzw. $p(x)$ bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$.

(c) Anhand der Skizze könnte man glauben, dass die Kurve $f(x)$ für $x = 0$ einen Wendepunkt hat. Untersuche, ob diese Vermutung stimmt. (Das Resultat ist zu belegen.)

(d) Die Parabel $p(x)$ wird um die $x$–Achse rotiert. Berechne das Rotationsvolumen bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$.

(e) Berechne numerisch anngenähert die Bogenlängen von $f$ und $p$ bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$. Was ist das Verhältnis der grösseren zur kleineren Länge?

**Aufgabe 4** **(15 Punkte)**

Die Funktion $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + dx + e}$ soll als Näherungsmodell der geometrischen Form eines Hügels dienen. Die Hügelkurve soll nun so in ein Koordinatensystem eingepasst werden, dass bei $x = -2$ und bei $x = 2$ je eine Nullstelle liegt und die Kurve dazu bei $x = 0$ ein Maximum besitzt. Bei $x = -1$ gibt es ferner eine Tangente mit der Steigung 1. Bei $x = 1$ hat die Tangente die Steigung $-1$. Zudem ist $f(0) = 2$.

(a) Berechne die Parameter $a, b, c, d, e$.
*Hinweis:* Man kann die Rechnung enorm vereinfachen, wenn man berücksichtigt, dass die gegebenen Werte auf eine gerade Funktion führen müssen und daher gewisse Parameter 0 sein müssen!
Skizziere die Kurve!

(b) Berechne jetzt die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$.

(c) Stelle die Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe mit dem Mittelpunkt $x = 0$ dar.
*Hinweis:* Wenn man die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$ betrachtet, so kann man darin als wesentlicher Teil eine geometrische Reihe entdecken.

(d) Berechne mit Hilfe des Hinweises in der letzten Teilaufgabe den Konvergenzradius der gewonnenen Potenzreihe.

(e) Verwende als Näherung nur das Taylorpolynom vom Grade 4. Was sind dann die gemachten Fehler an der Stelle $x = 0.5$ und $x = 0.9$?

**Aufgabe 5** **(8 Punkte)**

**Zusatz:** (Falls eine der regulären Aufgaben nicht gelöst werden kann.)

(a) Suche die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \arctan(x)$ mit $x_0 = 0$. Verwende nur die Glieder bis $n = 10$. Ausgehend von der Tatsache, dass $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ist, kann man mit dem gewonnenen Taylorpolynom die Zahl $\pi$ annähern. Berechne diese Näherung und entscheide, wieviele Stellen mit den Taschenrechner so exakt berechnet werden können.

(b) Auf dem Lumpenberg bei Riesenschluren am Äquator steht ein 100 Meter hoher und oben offener Turm, gleich einem Kamin, mit einem inneren quadratischen Grundriss von 10 mal 10 Metern. Auf einer Seite ist ein Eingang angebracht, welcher so breit wie der Turm, aber nur 2 Meter hoch ist. Der Eingang ist so tief gehalte, damit sich die Riesen beim Eintritt vor der Kunst im Turm verneigen müssen. Vor dem Turm ist der Parkplatz. Dieser verläuft exakt horizontal, fast 250 Meter weit in alle Richtungen. Links und rechts des Turms steht je im Abstand von 5 $m$ vom Turm eine 20 $m$ hohe Tanne. Im Turm soll nun an der hintern Wand der grösste ebene Spiegel der Welt angebracht werden, so breit wie die Wand wohlverstanden. Damit soll nach der Meinung der dort lebenden Riesen die Sonne in den Turm gelockt werden. Der Spielgel soll sie spiegeln und dann unten wieder herauszulocken. Im Innern des Turms ragen in der Mitte der linken und rechten Seitenwand 1 Meter über dem Boden je ein Bolzen von 3 $cm$ Durchmesser 50 $cm$ in den Raum hinein. Wie breit und hoch kann dieser Spiegel aus einem Stück maximal sein, wenn er durch den Eingang geschoben werden muss und maximalen Flächeninhalt haben soll? (Mache dir erst eine Skizze! Die Spiegeldicke soll man vernachlässigen.) Und wie weit wird es maximal gelingen, die Sonne herauszuspiegeln (Wanddicke des Turms 70 $cm$.)

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,

27. Juni 2006

## 2.50 Modulprüfung in Mathematik 2006 Klasse B 05 / B1

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden 4 Aufgaben:**

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie die Gleichung $A \cdot X \cdot B = M$.

(a) i. Berechne die Determinanten von $A, B, M$.
   ii. Was kann man im Falle, wo die Determinante von $A$ ungleich 0 ist, über die Determinante von $X$ sagen?
   iii. Wann ist die Determinante von $A$ gleich 0?

(b) Berechne $X$ allgemein in den Fällen, wo die Determinante von $A$ ungleich 0 ist. Stelle dann das Resultat explizit dar für $a = 3$

(c) Was gilt für die Lösung $X$ im Falle, wo die Determinante von $A$ gleich 0 ist? (*Hinweis:* Vergleiche $A \cdot X$ und $M \cdot B^{-1}$ elementweise.)

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Ein horizontal in eine Wand eingemauerter Träger mit quadratischem Querschnitt $d \cdot d$ und der Länge $L$ ist mit einer konstanten Streckenlast sowie dazu mit einer Gegenkraft am freien Ende belastet. Weiter kennt man die Formel $y''(x) = -\dfrac{m(x)}{E \cdot I}$, wobei $I$ das axiale Trägheitsmoment und $E$ das Elastizitätsmodul ist.

(a) Berechne aus dem angegebenen Zusammenhang eine nicht numerische Formel für die Biegelinie, wenn man ein Koordinatensystem mit den Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ und positivem $x$ sowie $y$ nach unten annimmt mit dem Ursprung an der Mauer.
*Hinweis:* Für das von der Streckenlast herrührende Moment ist $-q_1\,(L-x)^2,\ q_1 = \dfrac{q}{2}$, zu setzen und für das von der Gegenkraft herrührende Moment $+F_1\,(L-x)$.

(b) Es soll jetzt gelten: $d = 6\ cm,\ \ L = 4\ m,\ \ E = 210000 N/mm^2$. Die Streckenlast rührt von einer totalen Masse von 800 $kg$ her. Die Gegenkraft beträgt 500 $N$. Berechne mit diesen Angaben die maximale Auslenkung und skizziere die Biegelinie.

(c) Berechne nun die Tangentensteigung am Ende des gebogenen Balkens in Altgrad.

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

(a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie die Faktoren $k_1 = 1,\ \ k_2 = 4,\ \ k_3 = -2$

i. Berechne die Matrix $M$, welche $\vec{v_1}$ in $k_1 \cdot \vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ in $k_2 \cdot \vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$ in $k_3 \cdot \vec{v_3}$ abbildet.

ii. Was sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $M$?

(b) Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} -8 & \frac{9}{2} \\ -24 & 13 \end{pmatrix}$
sowie die Gerade $g:\ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i. Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren. Entscheide, ob die Abbildung eine Fixgerade hat, auf der die Punkt alle in sich selbst übergehen.

ii. Untersuche, ob es einen Wert $t_0$ gibt, für den $\vec{v}(t_0) = M \cdot \vec{v}(t_0)$ gilt. Berechne allenfalls $\vec{v}(t_0)$.

iii. Berechne die Bilder $M \cdot \vec{v}(0)$ zu $\vec{v}(0)$ und $M \cdot \vec{v}(1)$ zu $\vec{v}(1)$. Damit ist die Bildgerade $g_M$ resp. $M \cdot \vec{v}(t)$ bestimmt. Untersuche nun, ob die Vektoren $M \cdot \vec{v}(0) - \vec{v}(0)$ sowie $M \cdot \vec{v}(1) - \vec{v}(1)$ oder allgemein $M \cdot \vec{v}(t) - \vec{v}(t)$ etwas mit den Eigenvektoren zu tun haben.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie die Gerade
$g:\ \vec{v}_g(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \rightsquigarrow$ Projektionsrichtung, $\{\lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{b}\} \rightsquigarrow$ Ebene.

(a) Projiziere die Gerade $g$ auf die durch den Ursprung und die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definierte Ebene $\Phi$, indem du die Punkte resp. Vektoren $\overrightarrow{OP_1} = \vec{v}_g(0)$ und $\overrightarrow{OP_2} = \vec{v}_g(1)$ auf $\Phi$ projizierst $\rightsquigarrow$ Gerade $g\,'$, Punkte $P_1\,'$, $P_2\,'$. (Nur die beiden Punkte sind zu berechnen.)

(b) Drehe anschliessend die Gerade $g$ mit Hilfe der gewonnenen Punkte um $+30^o$ um die $z$–Achse $\rightsquigarrow$ (Gerade $g\,''$, Punkte $P_1\,''$, $P_2\,''$). (Nur die beiden Punkte sind zu drehen.)

(c) Berechne und vergleiche die Abstände von $g, g\,'$ und $g\,''$ vom Ursprung.

(d) $P_1\,', P_2\,', P_1\,'', P_2\,''$ spannen ein Tetraeder auf. Berechne das Volumen.

**Aufgabe 5** **(6 Punkte)**

**Zusatz:** (Falls eine der regulären Aufgaben nicht gelöst werden kann.)

Sei $M = \begin{pmatrix} -16 & 17 & -16 \\ -48 & 58 & -64 \\ -24 & 31 & -36 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne das Polynom $p(\lambda) = \det(M - \lambda E)$.

(b) Ersetzt anschliessend alle Koeffizienten $a_k$ durch $(a_k \cdot E)$ sowie $\lambda$ durch $M$. Dabei ist $\lambda^3$ durch $M \cdot M \cdot M := M^3$ und $\lambda^2$ durch $= M \cdot M \ = M^2$ zu ersetzen. Berechne den entstehenden Ausdruck. (*Hinweis:* Es muss eine spezielle Matrix herauskommen.)

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,

15. September 2006

## 2.51 Vordiplomprüfung in Mathematik 2006 Klasse B 04 / B2

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden Aufgaben:**

**Aufgabe 1** **(15 Punkte)**

Gegeben ist $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}\, e^{(\frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{2})}$, $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Diese Funktion $f$ kann man auch als Funktion $h(r,\varphi)$ auffassen. Es gilt dann $h(r,\varphi) = \sqrt{r^2}\, e^{(\frac{-\sqrt{r^2}}{2})}$, $\sqrt{r^2} = |r|$. Daher können wir die Funktionsfläche (Graph) in $\mathbb{R}^2$ auch als Rotationsfläche verstehen.

(a) Skizziere den Graphen für $x, y \in [-2, 2]$ oder $r \in [0, 2]$. (Wenn $r$ statt $x, y$ benutzt wird, zeigt der Graph eine Rotationsfläche. Dann werden die Ecken abgeschnitten, was hier nichts ausmacht.)

(b) Untersuche die Frage, was bei $x = y = r = 0$ für eine Situation passiert: Hat man eine Spitze oder hat man eine gewöhnliche Tangente in Richtung $x$ sowie $y$ (oder alternativ in Richtung $r$)? (Bestimme zur Beantwortung der Frage die Ableitungen und davon den Grenzwert für $x, y$ resp. $r \to 0$.)

(c) Bestimme die maximale Höhe der Fläche für $r \in [0, 2]$.

(d) Bestimme den Gradienten der Funktion für $x = y = 1$.

(e) Bestimme approximativ den Flächeninhalt über der Region $[1 \le x \le 2] \times [1 \le y \le 2]$.

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

(a) Gegeben ist die komplexe Zahl $w = 3 - i$. Berechne diejenige Lösung $z_k$ von $(z-w)^5 = 6 - 9\,i$, welche vom Ursprung den kürzesten Abstand hat.

(b) Sei $w_0 = w$, $w_1 = \frac{1}{|w|}w$, $w_2 = \frac{1}{|w|}\bar{w}$, $w_3 = \frac{1}{w}$. Berechne $w_1, w_2, w_3$ und untersuche die gegenseitige Lage und Grösse der beiden Strecken $\overline{w_0 w_2}$ und $\overline{w_1 w_3}$.
*Hinweis: Berechne jeweils die Differenz der involvierten komplexen Zahlen. Normiere diese Differenz.*

(c) Erstelle eine genaue Skizze der komplexen Ebene mit den Zahlen $w_0, w_1, w_2, w_3$. Zeichne als Referenzfigur den Einheitskreis in die Skizze ein. Was stellt man fest?

(d) Welches geometrische Gesetz im Zusammenhang mit dem Übergang von $w$ zu $\frac{1}{w}$ kann hier vermutet werden?

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

(a) Berechne von Hand die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) + y''(x) = \cos(x)$$

und erläutere dabei die Lösungsmethode.

(b) Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) - y'(x) + y''(x) = \cos(x).$$

(c) Berechne die spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) - y'(x) + y''(x) = \cos(x)$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 0,\;\; y'(0) = 0$.

(d) Skizziere die eben gefundene spezielle Lösung für $x \in [0, 12]$.

(e) Berechne approximativ den Funktionswert der gefundenen speziellen Lösung bei $x \approx 2.75558$.

**Aufgabe 4** **(12 Punkte)**

(a) Bestimme die Potenzreihenentwicklungen $p_s(x)$ von $\sin(x)$ und $p_c(x)$ von $\cos(x)$ bis und mit zu den Gliedern der Ordnung 10 (Polynome vom Grad $\leq 10$). *Das Zentrum der Entwicklung für alle Teilaufgaben ist* $x_0 = 0$.

(b) Bestimme graphisch approximativ das Intervall auf der $x$–Achse mit Zentrum 0, in dem $|p_s(x) - \sin(x)| \leq 0.01$ gilt.

(c) Differenziere $p_s(x)$ nach $x$. Wie weicht das Resultat von $p_c(x)$ ab und wieso?

(d) Bestimme mit Hilfe von $p_s(x)$ und $p_c(x)$ die Potenzreihenentwicklung $p_{s+c}(x)$ von $\sin(x) + \cos(x)$ bis und mit zu Gliedern der Ordnung 10. Bestimme ebenfalls die Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ bis und mit zu Gliedern der Ordnung 10. Vergleiche das Resultat mit $p_{s+c}(x)$. Was kann man daraus ersehen?

(e) In der Nähe von $x = 0$ ist $\frac{p_s(x)}{x}$ eine Näherungsformel für $\frac{\sin(x)}{x}$. Skizziere die beiden Funktionen in einem Diagramm mit dem Ausschnitt $x \in [-1, 1]$ und $y \in [0, 1]$. Kann man die beiden Kurven im Diagramm unterscheiden?

(f) Ermittle aus den Resultaten eine Näherungsformel für eine Stammfunktion von $\frac{\sin(x)}{x}$, welche für $x \in [-1, 1]$ anwendbar sein soll.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

Eine Matrix $M$ bildet den Vektor $\vec{e}_1$ in den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ab, den Vektor $\vec{e}_2$ in den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{e}_3$ in den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\left(\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ etc..}\right)$

(a) Berechne $M$.

(b) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sowie die normierten Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ der Matrix $M$.

(c) Berechne das Produkt der Eigenwerte und vergleiche dieses Produkt mit der Determinante von $M$. Was könnte man vermuten?

(d) Berechne das charakteristische Polynom von $M$ und vergleiche die Koeffizienten mit dem Produkt der Eigenwerte sowie der Summe der Eigenwerte.

(e) Berechne das Bild des Vektors $\frac{1}{\lambda_1}\vec{x}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\vec{x}_2 + \frac{1}{\lambda_3}\vec{x}_3$ bei der Abbildung mit $M$. Was fällt auf am Resultat?

**Aufgabe 6** **(15 Punkte)**

Gegeben ist eine Ebene $\Phi$ durch die Punkte $P_1(0,0,4)$, $P_2(0,6,0)$, $P_3(3,0,0)$. Der Punkt $Q_1(2,8,0)$ wird an $\Phi$ gespiegelt. Der gespiegelte Punkt ist $Q_2$. Berechne

(a) den Spiegelpunkt $Q_2$ sowie den Mittelpunkt der Kugel, welche $Q_1$ als Nordpol und $Q_2$ als Südpol hat,

(b) das Volumen des Körpers $P_1P_2P_3Q_2$,

(c) den Flächeninhalt $P_1P_2P_3$,

(d) den Winkel $\angle(Q_1P_1Q_2)$,

(e) den Abstand der Kugelachse $Q_1Q_2$ vom Ursprung.

**Aufgabe 7** Die folgenden beiden elementaren Aufgaben sind unabhängig. **(Je 6 Punkte)**

(a) Ein Brückenbogen hat die schöne Form einer Sinuslinie $f(x) = sin(x)$, $x \in [0, \pi]$. Berechne den Flächeninhalt des grössten Trapezes, das man zwischen diese Sinuslinie und die $x$–Achse einpassen kann und ebenso den Inhalt der Fläche zwischen Trapez und Sinuslinie.

(b) Ein Feuerwehrmagazin hat eine Höhe von 10 $m$. Darin werden die Schläuche zum Trocknen aufgehängt. Der Grundriss ist $4 \times 4$ $m^2$. Die Eingangstür vorne hat eine Höhe von 2.50 $m$. Nun will man eine Leiter maximaler Länge bestellen, welche von vorne gerade noch zur Tür hinein geschoben und hochgestellt werden kann. Wie lang darf diese Leiter höchstens sein? (Der Weg von vorne verläuft rechtwinklig zur Wand mit der Tür und ist gerade genügend breit, sodass die Leiter bequem transportiert werden kann.)

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

27. August 2007

## 2.52 Modulprüfung in Analysis 2007 M+E 06 / M+E 1

*Viel Glück !*

**Löse 7 der folgenden Aufgaben:** (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

**Aufgabe 1** **(15 Punkte)**

Gegeben ist eine Schraubenlinie

$$C_1 : \ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} r\,\cos(t) \\ r\,\sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad r = 1, \ \ t \in I = [0, 4\,\pi].$$

Diese Schraubenlinie windet sich um einen senkrecht stehenden Zylinder mit Radius 1. Weiter ist eine zweite Kurve mit einer anderen, nicht mehr konstanten Steigung gegeben:

$$C_2 : \ \vec{w}(t) = \begin{pmatrix} r\,\cos(t) \\ r\,\sin(t) \\ t + (\frac{t}{10})^2 \end{pmatrix}, \quad r = 1, \ \ t \in I = [0, 4\,\pi].$$

(a) Zeige die beiden Schraubenlinien in einer einzigen Skizze.

(b) Berechne die Richtungsvektoren der beiden Kurven für $t_1 = 0$. Berechne auch den Winkel zwischen diesen beiden Richtungsvektoren. Was fällt auf?

(c) Berechne die Richtungsvektoren der beiden Kurven für $t_2 = 4\,\pi$ sowie den Winkel zwischen diesen beiden Richtungsvektoren.

(d) Berechne die beiden Kurvenlängen numerisch.

(e) Berechne das Kurvenintegral $\int\limits_{C_1} \langle \vec{v}\,'(t), \vec{w}\,'(t)\rangle \, ds, \ \ ds = |\frac{d\vec{v}}{dt}|\, dt = |\vec{v}\,'(t)|\, dt.$

**Aufgabe 2** **(12 Punkte)**

Gegeben sei $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y), \ \ (x, y) \in D_f = [-\pi, \pi]^2.$

(a) Berechne die Lage allfälliger Extrema in $D_f$.

(b) Überprüfe die Identität $f(x, y) = 2\,\sin(x + \frac{\pi}{4})\,\sin(y + \frac{\pi}{4})$

(c) Skizziere den Graphen und die Höhenlinienkarte.

(d) In der Grundebene ist die das Kurvengebilde $h(x, y) = \sin(x + y) - \cos(x - y) = 0$ gegeben. Suche für $x, y \geq 0$ allfällige Extrema auf der Funktionsfläche $f$, für die $h(x, y) = 0$ gilt.

**Aufgabe 3** **(15 Punkte)**

Ein Bauteil eines Apparates wird begrenzt durch

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \ \ (x, y) \in [-5, 5]^2, \ \ z \leq 50.$$

(a) Skizziere die Bauteilform. Benutze $k_1, k_2, k_3, k_4$ als Bezeichnungen für die gebogenen Kanten. Trage diese an den seitlichen senkrechten ebenen Flächen in der Skizze ein.

(b) Berechne den Volumeninhalt des Bauteils.

(c) Berechne die Längen der Bögen $k_i$, an denen Kabel angebracht werden sollen.

(d) Berechne approximativ den Inhalt des krummen Teils der Oberfläche (Funktionsfläche von $f$).

(e) Berechne den Inhalt des krummen Teils der Oberfläche $f(x, y)$, welcher infolge eines nachträglich angebrachten Bohrlochs mit Radius 2 auftritt (Oberflächenverlust, Bohrlochachse gleich $z$–Achse).

**Aufgabe 4** **(15 Punkte)**

(a) Suche die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \sin(x)$ mit Zentrum $x_0 = 2\,\pi$ bis und mit den Gliedern der Ordnung 10 (Approximation mit Polynomgrad 10).

(b) Suche damit die entsprechende Approximation $u(t)$ der Funktion $\sin(\frac{1}{t})$, indem du die Variable $x$ durch $\frac{1}{t}$ ersetzest.

(c) Vergleiche die Plots von $u(t)$ und $\sin(\frac{1}{t})$ für $t \in I = [0.1, 0.4]$.

(d) Durch einen genauen graphischen Vergleich kann man vermutlich ablesen, dass die grösste Abweichung zwischen $u(t)$ und $\sin(\frac{1}{t})$ in $I$ bei $t_1 = 0.4$ liegen muss. Kontrolliere diese Vermutung und berechne die auf $\sin(\frac{1}{t})$ bezogene grösste prozentuale Abweichung.

(e) Ermittle mittels $\int\limits_{0.1}^{x} u(t)\,dt$ eine Näherungsformel für das Integral $\int\limits_{0.1}^{x} \sin(\frac{1}{t})\,dt$ für $t \in [0.1,\ 0.4]$ und extrahiere daraus diejenigen Terme, in denen die Koeffizienten einen Betrag grösser als 0.1 besitzen. (Nur diese werden bewertet.)

**Aufgabe 5** **(9 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung (Anfangswertsproblem 1. Ordnung)

$$12y'(x) - 16\frac{x}{y(x)} = 0, \;\; y(0) = 1.$$

(a) Skizziere das Richtungsfeld.

(b) Berechne die Lösung der Differentialgleichung bei der gegebenen Anfangsbedingung und zeichne die Lösung $y(x)$ ins Richtungsfeld ein.

(c) Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y(x)}{x}$ und ergründe damit, um welche Art Wachstum es sich bei $y(x)$ annähernd handelt.

**Aufgabe 6** **(15 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$y'' + 2\,y' + y \;\; = \;\; e^{-t}$$

(a) Löse zuerst die homogene Differentialgleichung .

(b) Löse die inhomogene Differentialgleichung. Versuche dazu den Ansatz $y(t) = a \cdot t^2 \cdot e^{-t}$

(c) Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Tangente? Skizziere diese Kurve(n) über dem Definitionsbereich $D = [-2, 2]$.

(d) Bestimme für diese Kurve(n) die vorhandenen Extremwertstellen. Die vorhandenen Integrationskonstanten sind dabei Parameter. Wieviele Extremwertstellen hat eine Kurve maximal?

(e) Bestimme für diese Kurve(n) mit $y(-1) = \dfrac{e}{2}, \;\; y(0) = 1$ die Kurvenlängen zwischen $t = -1$ und $t = 1$. Eine numerische Näherung genügt.

**Aufgabe 7** **(15 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung (Anfangswertsproblem 2. Ordnung)

$$y''(x) + 3\,y'(x) - 4\,y(x) = 1, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

(a) Berechne die Lösung der homogenen Differentialgleichung bei den gegebenen Anfangsbedingungen.

(b) Skizziere die homogene Lösung über dem Intervall $I = [-1.5, \; 4]$.

(c) Berechne die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bei den gegebenen Anfangsbedingungen.

(d) Skizziere die inhomogene Lösung über dem Intervall $I = [-1.5, \; 4]$.

(e) Vergleiche den Verlauf der homogenen und der inhomogenen Lösung: Skizzere die Differenzfunktion $d(x) = y_{inh}(x) - y_{hom}(x)$ über dem angegebenen Intervall. Was fällt auf beim Vergleich der Kurvenform von $d(x), \;\; y_{inh}(x)$ und $y_{hom}(x)$?

**Aufgabe 8** **(15 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben werden unabhängig voneinander gleich bewertet:

(a) Integriere von Hand die Reihe $S(x)$ über dem Intervall $[0,\ t]$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k$$

Beurteile die Konvergenz der erhaltenen Reihe $S_1(t)$ durch Vergleich mit einer bekannten Majorante.

(b) Untersuche von Hand, ob die folgende Identität gültig ist:

$$\cos(x) \equiv \int (1 - \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2)\, dx + C$$

Kann man daraus schliessen, dass $\cos(x)$ zwei verschiedene Ableitungen besitzt?

(c) Zeige oder widerlege von Hand:

$$e^x (x - n) = \int (-n + x + 1)\, e^x\, dx + C$$

(d)

$$w(x, n) := \frac{\partial \left( ln\,(x\sqrt{x}) - ln\left(x\sqrt{x-n}\right)\right)}{\partial x}$$

i. Berechne $w(x, n)$ von Hand, $x \in D_{w,n}$.

ii. Berechne anschliessend daraus den Grenzwert $\lim\limits_{x \to n} w^{-1}(x, n)$ sowie

iii. den Grenzwert $\lim\limits_{x \to n^2} w^{-1}(x, n)$ .

(e) Sei $sinE(n) := (e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin(\frac{x}{\sqrt{2}}))$ und $cosE(x) := (e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos(\frac{x}{\sqrt{2}}))$.
Untersuche von Hand, ob die folgenden Formeln richtig sind:

$$\iint sinE(x)\, dx\, dx = -cosE(x) + C_1\, x + C_2, \quad \iint cosE(x)\, dx\, dx = sinE(x) + C_1\, x + C_2$$

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,

31. August 2007

## 2.53 Modulprüfung in Mathematik 2007 Klasse B 06 / B1

*Viel Glück !*

**Löse die folgenden Aufgaben:**

**Aufgabe 1** **(15 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben werden unabhängig voneinander gleich bewertet:

(a) Differenziere von Hand und ermittle das Polynom und die Zahl:

$$S(x)\,' = (\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k}\, x^k)\,' = \text{„Polynom“} =\Big|_{x=1} \text{„Zahl“} = \,?$$

(b) Untersuche von Hand, ob die folgende Identität gültig ist:

$$(\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2)_x\,' = \frac{d}{d\,x}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \equiv \cos(x)$$

(c) Zeige von Hand mittels partieller Integration:

$$\int (-k + x + 1)\, e^x\, dx = e^x (x - k) + C$$

(d)

$$u(x,k) := \frac{\partial\left(ln\,(x\sqrt{x}) - ln\left(x\sqrt{x-k}\right)\right)}{\partial x}$$

i. Berechne $u(x,k)$ von Hand, $x \in D_{u,k}$.

ii. Berechne anschliessend daraus $\lim\limits_{x\to k} u^{-1}(x,k)$ sowie

iii. $\lim\limits_{x\to k^2} u^{-1}(x,k)$ .

(e) Sei $eSin(x) := e^x\, \sin(x)$ und $eCos(x) := e^x\, \cos(x)$.
Untersuche von Hand, ob die folgenden Formeln richtig sind:

$$\int\int eSin(x)\, dx\, dx = -\frac{1}{2} eCos(x) + C_1\, x + C_2, \quad \int\int eCos(x)\, dx\, dx = \frac{1}{2} eSin(x) + C_1\, x + C_2$$

**Aufgabe 2** **(15 Punkte)**

Durch die Punkte $A(2;0)$, $B(7;1)$ und $C(5;4)$ wird ein Dreieck $D_1 = \triangle(A,B,C)$ sowie eine Gerade $g = \overline{AB}$ bestimmt.

(a) Berechne den Schwerpunkt $S$ von $D$ und damit den Abstand der Schwerlinie durch $S$ und $B$ vom Ursprung.

(b) Berechne mit Hilfe des Flächenprodukts oder des Vektorprodukts den Flächeninhalt $F$ von $D$.

(c) Das Dreieck $D$ wird um den Ursprung um $\alpha = 30^o$ im Gegenuhrzeigersinn gedreht. Bestimme die Drehmatrix und berechne damit die neue Lage des Schwerpunkts $S_1$.

(d) Das Dreieck $D$ wird an der Geraden $g$ gespiegelt. Dadurch erhält man das gespiegelte Dreieck $D_2 = \triangle(A_2, B_2, C_2)$. Berechne die Lage der gespiegelten Punkte $S_2$ sowie $C_2$.

(e) Das Dreieck $D_2$ wird in Richtung der $x$–Achse um den Faktor 2 gestreckt. Die $y$–Koordinaten bleiben dabei unangetastet. Der dadurch erhaltene Schwerpunkt $S_3$ des gestreckten Dreiecks $D_3$ wird an $g$ zurückgespiegelt. Berechne die Koordinaten des so erhaltenen Punktes $S_4$.

**Aufgabe 3** **(15 Punkte)**

Ein Architekt plant ein Gebäude mit rechteckigem Grundriss und einem Zeltdach oder Turmdach (Pyramidendach). Die Dachecken sollen dabei exakt auf die Aussenfläche einer imaginativen Halbkugel zu liegen kommen, bei der der Kugelmittelpunkt mit der Mitte des Gebäudegrundrisses zusammenfällt. Der Kugelradius beträgt 4 *nee* (<u>n</u>archibirische <u>E</u>rz–<u>E</u>llen; die Einheiten können bei den Rechnungen weggelassen werden).
Wir bezeichnen die Gebäudelänge mit $a$, die Breite mit $b$ und die Höhe bis zur Dachtraufe (Regenrinne) mit $h$. Infolge des Konzepts fällt die Spitze des Pyramidendachs mit dem höchsten Punkt der Halbkugel zusammen (Höhe 4 *nee*).

(a) Berechne $h$ als Funktion von $a$ und $b$.

(b) Berechne darauf Gebäudevolumen $V$ als Funktion von $a$ und $b$.

(c) Bestimme $a$ und $b$ so, dass das Gebäudevolumen maximal gross wird.

(d) Für die nächste Überlegung verändern wir die Betrachtungsweise. Wir nehmen an, dass das Gebäudevolumen $V$ konstant $= 20\ nee^3$ sei und dass das Gebäude nicht mehr in eine Halbkugel passen müsse, dass aber die Form mit Pyramidendach sowie Gesamthöhe $H = r = 4\ nee$ bestehen bleiben. Berechne bei dem gegebenen Volumen und dem gegebenen $r$ die Länge $h$ als Funktion von $a$ und $b$.

(e) Bestimme bei dem gegebenem Volumen $a$ und $b$ so, dass jetzt die Gebäudeoberfläche $F(a, b)$ minimal wird. ($h$ folgt hier aus $a$ und $b$ und muss daher nicht bestimmt werden.)
*Hinweis:* Falls die notwendigen Ableitungen und damit die Gleichungen zur Bestimmung von $a$ und $b$ etwas komplex werden, kann das Minimum auch graphisch approximativ bestimmt werden, indem man den Graphen $F(a, b)$ und in diesem geeignete Schnitte betrachtet. Symmetrieüberlegungen und Vermutungen können dabei hilfreich sein.

**Aufgabe 4** **(15 Punkte)**

Ein turmartiges Gebäude hat die Form

$$f(x,y) = 50 - x^2 - y^2, \ \ (x,y) \in [-5,\ 5]^2, \ \ f(x,y) \geq 0.$$

(a) Skizziere die Gebäudeform. Trage $k_1, k_2, k_3, k_4$ als Bezeichnungen für die gebogenen Kanten an den seitlichen senkrechten ebenen Flächen ein.

(b) Berechne den Volumeninhalt des Gebäudes.

(c) Berechne die Längen der Bögen $k_i$.

(d) Berechne den Inhalt einer der vier kongruenten seitlichen senkrechten Flächen.

(e) Berechne approximativ den Inhalt der krummen Dachfläche.

**Aufgabe 5** **(12 Punkte)**

**Zusatzaufgabe:**

(a) Gegeben seien die beiden Funktionen
und
$f : (x,a) \longmapsto f(x,a) = a\, x^n, \ \ n \in \mathbb{N}$
$h : (x,b) \longmapsto h(x,b) = 2 - b\, x^2$.
Für $x = 2$ gilt $f(x) = h(x)$.

i. Berechne daraus $b = b(a)$ und damit $h(x, b(a)) = h_1(x,a)$

ii. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen $f$ und $h$ über dem Intervall $[0,\ 2]$.

iii. Entscheide, für welche $n$ die Ableitung des Flächeninhalts als Funktion von $a$ gleich 0 sein kann (Bedingung für ein Extremum).

(b) Berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen von

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i. Für welche $a \in \mathbb{R}$ existieren zwei verschiedene Eigenwerte?

ii. Sei $a = 5$. Was ist das Bild der Geraden $\vec{v}(t) = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(3-\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}$?

iii. Wir bilden mittels $A$ den Vektor $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(3-\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}$ ab, $a = 5$. Berechne das Bild der $y$–Koordinate dieses Vektors. Was ist das Bemerkenswerte an diesem Bild?

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

31. Januar 2008

## 2.54 Modulprüfung in Mathematik 2008 / Alg+Geo M+E 07 / M+E 1

### Teil 1: Ohne Hilfsmittel, Zeitrahmen 30 Minuten, dann Abgabe

*Viel Glück !*

**Löse die nachfolgenden Kurzaufgaben.** (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

*Hinweis:* Erwartet wird, dass man in der gegebenen Zeit ca. 3/4 der Teilaufgaben richtig lösen kann. Es können auch mehr sein. Wähle daher mit Bedacht diejenigen Aufgaben, die du am schnellsten lösen kannst.

**Probl. 1 Angaben:**

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$z_1 = 3 + 2\,i, \;\; z_2 = 1 - i$$

(a) **(3 Punkte)**

Berechne $\det(M_1)$

(b) **(3 Punkte)**

Berechne $\det(M_2)$

(c) **(3 Punkte)**

Berechne $\det(M_1 \cdot M_2)$

(d) **(3 Punkte)**

Berechne $M_1 \cdot M_2$

(e) **(3 Punkte)**

Berechne $M_2 \cdot M_1$

(f) **(3 Punkte)**

Löse $M_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{b}_1$ (Gauss!)

(g) **(3 Punkte)**

Löse $M_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{b}_2$

(h) **(3 Punkte)**

Löse $(M_2 \cdot M_1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\vec{b}_2^T \cdot M_2^T)^T$

(i) **(3 Punkte)**

Berechne $M_3^{-1}$

(j) **(3 Punkte)**

Berechne $\dfrac{1}{z_1\, z_2}$

(k) **(3 Punkte)**

Berechne $\dfrac{1}{\bar{z}_1\, \bar{z}_2}$

(l) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl?

```
4*(1:5)+10
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(m) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl?

```
rem(70,12)
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(n) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für die folgende Befehlsequenz?

```
g=j+3; imag(g)*conj(g)
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(o) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für die folgende Befehlsequenz?

```
a=[1 2 3 4];b=[a',2*a']
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(p) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für die folgende Befehlsequenz?

```
a=[1 2 3 4];b=[a',2*a'];b*b'
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

31. Januar 2008

## Modulprüfung in Mathematik 2008 M+E 07 / M+E 1

### Teil 2: Zeitrahmen 90 Minuten

*Viel Glück !*

**Löse die nachfolgenden Aufgaben.** (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

**Probl. 2** **(18 Punkte)**

Eine Ebene $\Phi$ ist gegeben durch den Normalenvektor $\vec{n}$, $\vec{n}^T = (2, 5, 1)$. Die Ebene geht zudem durch den Punkt $P_0(1, 1, -1)$. Weiter kennt man die Punkte $P_1(2, 0, 2)$ und $P_2(3, 2, 1)$.

(a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle P_0 P_1 P_2$

(b) Bestimme die Hess'sche Normalform von $\Phi$.

(c) Untersuche, welcher der Punkte $P_1, P_2$ in $\Phi$ liegt.

(d) Bestimme allenfalls den Abstand von $P_2$ zu $\Phi$.

(e) Bestimme den Schnittpunkt $S$ der Gerade $g = \overline{OP_2}$ mit $\Phi$.

(f) Man drehe die Gerade $g$ um die $z$–Achse um den Winkel $\varphi$. Die gedrehte Gerade nennen wir $g_\varphi$. Bestimme $\varphi$ so, dass der Abstand von $S_\varphi = g_\varphi \cap \Phi$ zu $O$ minimal ist. (Skizze!)

**Probl. 3** **(18 Punkte)**

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $A \cdot A$ und $B \cdot B$. Versuche daraus allgemeine Gesetze für derartige $n \times n$–Matrizen abzulesen.

(b) Berechne $A \cdot A \cdot A$ und $B \cdot B \cdot B$. Versuche daraus allgemeine Gesetze für entsprechende $n \times n$–Matrizen abzulesen.

(c) Berechne $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A \cdot B \cdot B$ und $A \cdot A \cdot A \cdot B \cdot B \cdot B$. Versuche daraus allgemeine Gesetze für entsprechende $n \times n$–Matrizen abzulesen.

(d) Berechne $A^{-1} \cdot B^{-1}$ und $B^{-1} \cdot A^{-1}$. Ist die Formel $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ hier richtig?

(e) Löse die Gleichung (d.h. berechne $X$):

$$A \cdot B \cdot A = B \cdot X \cdot B$$

(f) Löse die Gleichung (d.h. berechne $X$):

$$(B^{-1} - A^{-1}) \cdot X = A + B$$

**Probl. 4** **(20 Punkte)**

(a) i. Berechne die 3. komplexen Einheitswurzeln $z_1, z_2$ und $z_3$ exakt. D.h. bestimme die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$. Skizziere die Löungen in einem Diagramm in $\mathbb{C}$.

ii. Sei $w_i = z_i + k,\ \ k = const.$ Berechne das Polynom $p(z) = (z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)$.

iii. Setze $k = 2$ und berechne das Polynom $p(z) = (z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)$ für dieses spezielle $k$. Trage $w_1, w_2, w_3$ ebenfalls in das Diagramm ein.

iv. Setze $k = 2 + 4\,i$ und berechne das Polynom $p(z) = (z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)$ für dieses spezielle $k$. Trage $w_1, w_2, w_3$ ebenfalls in das Diagramm ein.

v. Worin unterscheiden sich die Koeffizienten bezüglich ihrer Zahlenart, wenn man einerseits $k = 2$ und andererseits $k = 2 + 4\,i$ setzt?

(b) i. Berechne die Partialbruchzerlegung von $q(x) = \dfrac{4\,x^4 + 3\,x^3 + 2\,x^2 + x}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{d(x)}{n(x)}$

ii. Die Nullstellen von $n(x) = (x-1)(x^2+1) = x^3 - x^2 + x - 1$ definieren in $\mathbb{C}$ ein Dreieck $\triangle_1$. Berechne diese Nullstellen und skizziere das Dreieck $\triangle_1$.

iii. Berechne das Vehältnis von Dreiecksinhalt zu Umfang.

iv. Berechne die Inversen der vorhin berechneten Nullstellen. Diese definieren wieder Dreieck $\triangle_2$. Was ist das Verhältnis des Inhalts von $\triangle_1$ zu Inhalt von $\triangle_2$?

v. Zwei der eben berechneten Nullstellen haben einen nicht negativen Imaginäranteil. Wenn man zu diesen Nullstellen $k = 2$ addiert, erhält man die Zahlen $w_1$ und $w_2$. Durch $w_1$ und $w_2$ geht eine Gerade (in die Skizze eintragen!). Diese Gerade kann man um den Ursprung um einen positiven Winkel $\varphi$ soweit drehen, dass das Bild parallel zur reellen Achse zu liegen kommt. Berechne den dazu notwendigen Winkel $\varphi$.

**Probl. 5 Zusatzaufgabe (wenn alle andern Aufgaben gelöst sind)** **(9 Punkte)**

(a) An den Stelle 10 und $-10$ auf der $x$–, der $y$– und $z$–Achse eines kartesischen Koordinatensystems wird je ein Punkt gesetzt. Diese Punkte bestimmen ein Oktaeder. In dieses Oktaeder wird achsenparallel der grösste mögliche Würfel hineingesetzt. Bei diesem Würfel wird eine Ecke $P_0$ ausgewählt. Von $P_0$ aus werden drei Strahlen durch die Mittelpunkte $P_1$, $P_2\,P_3$ der drei zu $P_0$ gegenüberliegenden Würfelseiten gezogen. $P_0$, $P_1$, $P_2\,P_3$ bilden ein nichtreguläres Tetraeder. Wieviele Prozent des Würfelvolumens werden vom Tetraeder eingenommen?

(b) Wieviele Prozent der Würfeloberfläche macht die Tetraederoberfläche aus?

(c) Sei $k_1$ das Verhältnis vom gesamten Würfelvolumen zum Tetraedervolumen, $k_2$ das Verhältnis der Würfeloberfläche zur Tetraederoberfläche. Berechne $k_1 : k_2$.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, 1. Februar 2008

## 2.55 Modulprüfung in Math. 1 08 / 2. J. / Analysis 3 Mp 06 / Mp2

*Viel Glück !*

**Löse folgende Aufgaben!** (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

*Hinweis:* Nach den bisherigen Erfahrungen war in 120 Minuten ein erreichbares Maximum von ca. 50 Punkten möglich. Wähle daher deine Aufgaben mit grossem Bedacht aus.

**Probl. 1** **(12 Punkte)**

Sei
$$\vec{v}(r,u,t) = \begin{pmatrix} x(r,u,t) \\ y(r,u,t) \\ z(r,u,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r\,\cos(u)+5)\,\sin(t) \\ (r\,\cos(u)+5)\,\cos(t) \\ r\,\sin(u) \end{pmatrix},$$
$u \in [0,\ 2\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],\ \ r \in [0,\ 1]$.

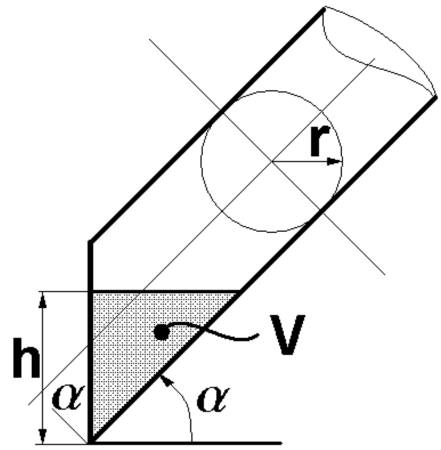
(a) Skizziere den durch $\vec{v}$ und $u \in [0,\ 2\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],\ \ r = 1$ parametrisierten Körper.

(b) Berechne die Jacobi–Determinante (Funktionaldeterminante)
$$\det(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,u,t)}) = \det(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}).$$

(c) Bekanntlich gilt $dV = \left|\det(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,u,t)})\right|\, dr\, du\, dt$. Berechne damit das Volumen des Körpers $|V_r| = |V_1| = \int\limits_{V_1} dV,\ \ u \in [0,\ 2\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],\ \ r \in [0,\ 1]$.

(d) Berechne damit das Volumen des Körpers $|V_2| = \int\limits_{V_2} dV,\ \ u \in [0,\ 2\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],$ $r \in [0,\ 2]$. Wie gross ist damit der Faktor $k$ in der Gleichung $|V_2| = k \cdot |V_1|$?

**Probl. 2** **(6 Punkte)**




Ein rundes Rohr mit dem Radius $r$ ist stirnseitig (links in nebenstehender Skizze) transparent durch ein Sichtglas verschlossen. Auf diesem Sichtglas soll eine Skala angebracht werden, auf welcher das jeweils im Rohr vorhandene Flüssigkeitsvolumen ablesbar ist.

(a) Berechne das Volumen $V(h, \alpha, r)$ allgemein.

(b) Berechne das Volumen $V(h, \alpha, r)$ für $r = 5\,cm$ und $\alpha = 40^o$ sowie $h = 8\,cm$.

**Probl. 3** **(24 Punkte)**

Berechne die Laplace–Transformierten resp. die Rücktransformierten der nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \cosh(t) + \sinh(2\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$

(b) $f(t) = e^t - 2\,e^t \sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$

(c) $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$

(d) $f(t) = \delta(t) + 1 + t + t^2 + t^3 \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$

(e) $Y(s) = \dfrac{s}{s^2-1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$

(f) $Y(s) = \dfrac{10s}{4\,s^2-4} + \dfrac{5}{s^2+s+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$

(g) $Y(s) = \dfrac{4\,s}{8\,s^3+8} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$

(h) $Y(s) = \dfrac{3}{s^4+s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$

**Probl. 4** **(12 Punkte)**

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$4\,y''(t) - 2\,y'(t) + y(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2),\;\; y(0) = 1,\;\; y'(0) = 1$$

(a) Berechne die Laplace–Transformierte der Gleichung.

(b) Berechne die Lösung $y_0(t)$ durch Rücktransformation. Bezeichne dabei z.B. den Einheitssprung an der Stelle 2 mit $u(t-2)$.

(c) Skizziere die Lösung für $t \in [0,\; 3\,\pi]$.

(d) Skizziere die Lösung für $t \in [0,\; 12\,\pi]$.

**Probl. 5** **(18 Punkte)**

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} {y_2}''(t) + a\,y_2(t) - b\,y_2(t) + b\,y_1(t) &= 0 \\ {y_1}''(t) + a\,y_1(t) - b\,y_1(t) + b\,y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System stellt bekanntlich ein Modell von zwei gekoppelten Pendeln dar.
Nimm als Anfangswerte: $y_1(0) = 1,\;\; {y_1}'(0) = 0,\;\; y_2(0) = 0,\;\; {y_2}'(0) = 0$

(a) Berechne die Laplace–Transformierte der Gleichungen.

(b) Löse das entstehende Gleichungssystem auf der Bildseite.

(c) Berechne die Rücktransformierten Funktionen.

(d) Skizziere die Funktionen für $a = 10$ und $b = 1$.

(e) Untersuche den Einfluss von $a$ und $b$: Skizziere die Funktionen für $a = 5$ und $b = 1$. Was stellt man fest?

(f) Skizziere die Funktionen für $a = 5$ und $b = 2$. Was stellt man fest?

**Probl. 6** **(9 Punkte)**

(a) Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{3}\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{1}{7}\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

i. Finde eine nicht konstante Lösung der Gleichung (mit Parameter).

ii. Finde eine Lösung mit der Anfangsbedingung $f(0,y) = e^{7\,y} + 1$.

(b) Gegeben ist die Kurve $y(x) = a\,\cosh(\frac{x}{a})$. Berechne die Krümmung für $x = 0$ und interpretiere den Parameter $a$.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,

08. 09. 2008

## 2.56 Modulprüfung in Mathematik 2008 Klasse B 07 / B1

*Viel Glück !*

**Erwartet werden die Lösungen von 4 Aufgaben aus der folgenden Serie.**
**Alle Teilaufgaben geben gleichviele Punkte.**

**Probl. 1** **(24 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x+1)\,\ln(\frac{x+1}{2}) - 1.$$

i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen.
ii. Bestimme die allfälligen reellen Nullstellen numerisch (4 Stellen genügen).
iii. Bestimme den Steigungswinkel der Tangente für $x = 0$ im Bogenmass.
iv. Untersuche, ob $f(x)$ irgendwo eine horizontale Tangente aufweist und berechne die $x$–Werte der allfällig gefundenen solchen Stellen exakt.

(b)

$$h(t) = \int\limits_{-5}^{t} (4\,x^3 - 2\,x^2 + t\,x - 5)\,dx$$

i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen.
ii. Bestimme die allfälligen reellen Nullstellen numerisch (4 Stellen genügen).
iii. Bestimme den Steigungswinkel der Tangente für $t = 0$ im Bogenmass.
iv. Untersuche, ob $h(t)$ irgendwo eine horizontale Tangente aufweist und berechne die $t$–Werte der allfällig gefundenen solchen Stellen numerisch.

**Probl. 2** **(15 Punkte)**

$$f(x,y) = e^k\,\cos(\frac{x}{\pi}) + \cos(\frac{y}{\pi}),\;\; G = [-1,\,1] \times [-1,\,1]$$

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen für $k = 0$.

(b) Bestimme das exakte Volumen zwischen der $(x, y)$–Ebene und der Funktionsfläche über $G$ in Abhängigkeit von $k$.

(c) Wie gross muss $k$ gewählt werden, damit dieses Volumen auf 1 normiert werden kann?

(d) Bestimme für $k = 0$ die $x$– und die $y$–Koordinate des höchsten Punktes auf der Funktionsfläche, den man erreichen kann, wenn man sich in der Projektion in $G$ längs der Geraden $y = 2\,x - \frac{1}{2}$ bewegt. %

(e) Bestimme das Volumen zwischen der $(x, y)$–Ebene und der Funktionsfläche von $h(x, y) = \cos((x + y)^2 + (x - y)^2)$ über der Kreisscheibe mit Zentrum in $O$ und dem Kreisradius $r = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

**Probl. 3** **(15 Punkte)**

Ein Gebäude $G$ mit viereckigem, aber nicht rechteckigem Grundriss ragt bei den Koordinaten $A_1(0, 0, 0)$, $B_1(2, 0, 0)$, $C_1(3, 4, 0)$ und $D_1(0, 3, 0)$ aus dem Boden. Die Koordinatenzahlen kann man als Dekameter verstehen, wenn einem das die Sache damit vereinfacht. Oben ist ein pultartiges Dach mit den Eckpunkten $A_2(0, 0, \frac{1}{2})$, $B_2(2, 0, \frac{2}{3})$, $C_2(3, 4, 1)$ und $D_2(0, 3, z)$. $\Phi$ sei die ebene Dachfläche.

(a) Erstelle eine saubere Skizze.

(b) Berechne $z$.

(c) Berechne den Inhalt von $\Phi$.

(d) Berechne das Gebäudevolumen $V_G$.

(e) Wie ändert sich $V_G$, wenn man alle Grundrisskoordinaten verdoppelt?.

**Probl. 4** **(12 Punkte)**

Gegeben ist Gerade $g:\ \vec{v} = \vec{0} + t \cdot \vec{x}_1$ mit $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte $P_1(6, -3)$, $P_2(7, 2)$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix $S(g)$ für die Geradenspiegelung an $g$.

(b) Spiegle damit die Punkte, d.h. berechne die Bildpunkte $Q_1$ und $Q_2$.

(c) Berechne den Inhalt des Dreiecks $\triangle OP_1Q_1$.

(d) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix $S(g)$. Welcher interessante Zusammenhang ist hier sichtbar?

**Probl. 5** **(18 Punkte)**

Sei $A = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $A_3 \cdot A_3$ und $B_3 \cdot B_3$. Versuche daraus allgemeine Gesetze für derartige $n \times n$–Matrizen $A_n$ und $B_n$ abzulesen.

Dabei ist $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechne $A_3 \cdot A_3 \cdot A_3$ und $B_3 \cdot B_3 \cdot B_3$. Wie steht es hier mit allgemeinen Gesetzen für entsprechende $n \times n$–Matrizen?

(c) Berechne $A_3 \cdot B_3$, $B_3 \cdot A_3$, $A_3 \cdot A_3 \cdot B_3 \cdot B_3$ und $A_3 \cdot A_3 \cdot A_3 \cdot B_3 \cdot B_3 \cdot B_3$. Ist hier etwas bemerkenswert?

(d) Berechne $A_3^{-1} \cdot B_3^{-1}$ und $B_3^{-1} \cdot A_3^{-1}$. Welche der Formeln $A_3^{-1} \cdot B_3^{-1} = B_3^{-1} \cdot A_3^{-1}$ oder $A_3^{-1} \cdot B_3^{-1} = (B_3^{-1} \cdot A_3^{-1})^T$ ist hier richtig?

(e) Löse die Gleichung (d.h. berechne $X$), falls möglich:

$$A_3 \cdot B_3 \cdot A_3 = B_3 \cdot X \cdot B_3$$

(f) Löse die Gleichung (d.h. berechne $X$), falls möglich:

$$(B_3^{-1} - A_3^{-1}) \cdot X = A_3 + B_3$$

**Probl. 6 (Zusatzaufgabe) (4 Punkte)**

Gesucht ist eine Funktion, mit der man das logistische Wachstum des $CO_2$–Gehalts der Atmosphäre in Prozent modellieren könnte. Bekanntlich wird ja heutzutage sehr über den Anstieg dieses Gehalts diskutiert. Man hat sich entschlossen, eine Funktion aus den folgenden drei Typen auszuwählen und danach die Massstäbe der Achsen sowie die Lage des Graphen an die Gegebenheiten der tatsächlich vorhandenen Jahreszahlen anzupassen. Welchen der Typen würde man wählen, falls überhaupt einer passt? (Begründung!)

(a) $f(t) = e^{2\,t+2}$

(b) $f(t) = 100\, e^{-\frac{2\,\arctan(5-t)}{\pi}-1}$

(c) $f(t) = 100\, e^{\sin\left(\frac{t}{5}\right)-1}$

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

26. Januar 2009

## 2.57 Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2009 M+E 08–09 p / M+E 1p

### Teil 1: Ohne Hilfsmittel, Zeitrahmen 30 Minuten, dann Abgabe

*Viel Glück !*

**Löse die nachfolgenden Kurzaufgaben.** (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

**Probl. 1 Angaben:** Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = -i, \ z_2 = \frac{1}{2} - 2\,i, \ z_3 = 2 - 4\,i$$

(a) **(3 Punkte)**

Zeige von Hand die Berechnung von $\det(A)$

(b) **(3 Punkte)**

Zeige von Hand die Berechnung von $\det(B)$

(c) **(3 Punkte)**

Wie oft kann das Volumen des durch $A$ definierten Spats im Volumen des durch $B$ definierten Spats eingefüllt werden?

(d) **(3 Punkte)**

Zeige von Hand die Berechnung von $A \cdot B$

(e) **(3 Punkte)**

Zeige von Hand die Berechnung von $B \cdot A$

(f) **(3 Punkte)**

Man vermutet, dass $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & u \end{pmatrix}$ gilt.

Überprüfe die Vermutung und berechne allenfalls $u$.

(g) **(3 Punkte)**

Berechne von Hand $A^{-1} \cdot \vec{b}_1$

(h) **(3 Punkte)**

Berechne von Hand $A^{-1} \cdot \vec{b}_2$

(i) **(3 Punkte)**

Berechne von Hand $A^{-1} \cdot \vec{b}_3$

(j) **(3 Punkte)**

Löse von Hand $((A \cdot B^{-1}) \cdot (A^{-1})^T) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{b}_1$

(k) **(3 Punkte)**

Berechne exakt von Hand $\dfrac{\bar{z}_3}{z_2}$

(l) **(3 Punkte)**

Berechne von Hand $(z_2)^2 - z_2 \cdot z_3$

(m) **(3 Punkte)**

Skizziere die Lösungen von $z^4 = z_1$

(n) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl?

```
x=0:0.1:pi;y=2*cos(x);plot(x,y)
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(o) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl?

```
(0:4)*10+12
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(p) **(3 Punkte)**

Was ist der MATLAB-Output für die folgende Befehlsequenz?

```
u=[3,2,1];v=[u',-u',u']
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(q) **(3 Punkte)**

Beschreibe, was Matlab hier für eine Operation ausführt:

```
matpro=v*v'
```

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

26. Januar 2009

# Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2009 M+E 09–09 / M+E 1p

## Teil 2: Zeitrahmen 90 Minuten

*Viel Glück !*

**Löse die nachfolgenden Aufgaben.** (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

**Probl. 2** **(15 Punkte)**

Gegeben ist eine Ebene $\Phi$ durch die Punkte $P_1(1,2,1)$, $P_2(-1,3,1)$ und $P_3(0,-1,2)$. Zudem kennt man einen Punkt $Q(-1,0,8)$. $O$ ist der Urprung.

(a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle OP_1Q$

(b) Berechne den Normalvektor auf $\Phi$ mit der Länge 1.

(c) Von $Q$ wird das Lot auf $\Phi$ gefällt. Berechne den Lotfusspunkt $S$ auf $\Phi$.

(d) Bestimme den Abstand von $Q$ zu $\Phi$.

(e) $Q$ soll um die $x$–Achse um $\pm 30^0$ in die Punkte $U_1$ und $U_2$ gedreht werden. Berechne die neuen Abstände der beiden möglichen Punkte von $\Phi$. Was ist zu sagen betreffend der Vergrösserung und der Verkleinerung der Distanzen bezüglich der neuen Lage?

**Probl. 3** **(24 Punkte)**

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $A \cdot A$.

(b) Berechne $B \cdot B$. Was stellt man fest?

(c) Berechne $A \cdot B$. Was stellt man fest?

(d) Berechne $B \cdot A$. Was stellt man fest?

(e) Berechne $A \cdot A \cdot B \cdot B$.

(f) Seien $\vec{x}_1 = \{1,2,3,4,5\}$, $\vec{x}_2 = \{2,3,4,5,6\}$, $\vec{x}_3 = \{3,4,5,6,7\}, \ldots$.
Berechne $A \cdot \vec{x}_1$, $A \cdot \vec{x}_2$, $A \cdot \vec{x}_3$, $\ldots$. Zeigt sich hier ev. ein allgemeines Gesetz?
(Anmerkung: Probiere allenfals jeweils auch für $A \cdot \vec{x}_k^T$.)

(g) $A_1 = A + 2\,B$. Berechne $A_1^{-1}$, falls möglich.

(h) Löse die Gleichung $A_1 \cdot A_1 + A_1 \cdot \vec{x} = A_1 + A_1^{-1}$, falls möglich.
(Anmerkung: Probiere allenfalls mit $X$ statt $\vec{x}$.)

**Probl. 4** **(18 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Gleichung

$$z^4 = -1 - i$$

i. Skizziere die Löungen in einem Diagramm in der Ebene $\mathbb{C}$ qualitativ. Zeichne zum Vergleich in die Skizze auch den Einheitskreis um den Ursprung ein.

ii. Berechne die Lösungen:

A. Exakt.

B. Numerisch auf 4 Stellen hinter dem Komma genau. (Die 5. Stelle ist gerundet.)

(b) Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion

$$q(x) = \frac{84}{p(x)}, \;\; p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 3\,x - 6$$

i. Berechne die Nullstellen von $p(x)$. *Hinweis: Man kann auch probieren.* Was fällt auf?

ii. Die Nullstellen markieren die Ecken einer geradlinig begrenzten Figur in der komplexen Ebene. Berechne den Inhalt dieser Figur.

iii. Berechne die Partialbruchzerlegung von $q(x)$ in $\mathbb{R}$.

iv. Berechne eine möglichst einfache Form von $f(x) = q(x) - (\dfrac{7}{x-1} - \dfrac{3\,(x+5)}{x^2+3})$.

**Probl. 5 Zusatzaufgabe (wenn alle andern Aufgaben gelöst sind)** **(8 Punkte)**

**Denkaufgabe:** Gegeben ist ein Würfel $W$, der sich in Normallage befindet. Das heisst, das Zentrum liegt im Ursprung und die Ecke $E_1$ hat die Koordinaten $(1; 1; 1)$. Der Würfel ist in eine Kugel $K$ eingeschrieben, deren Zentrum ebenfalls der Ursprung ist.

(a) In $K$ wird ein Oktaeder $O_1$ eingeschrieben. Berechne das Volumenverhältnis vom Oktaeder $O_1$ zum Würfel $W$.

(b) der Kugel $K$ wird ein Oktaeder $O_2$ umgeschrieben. Berechne jetzt ebenfalls das Volumenverhältnis vom Oktaeder $O_2$ zum Würfel $W$.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, 30. Januar 2009

## 2.58 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Statistik 1 Mp 07 / Mp 2

*Viel Glück !*

**Löse folgende Aufgaben!** (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

*Hinweis:* Für eine Aufgabe mit 3 Punkten kann man ca. 5 Minuten rechnen. Vermutlich wird man daher in einer Stunde nur eine Auswahl aus der Serie lösen können. Wähle also mit Bedacht!

**Probl. 1** **(6 Punkte)**

**Die Chance Geld zu verlieren:**

Eine kürzlich gegründete Firma hat schon 448 Kunden in ihrer Kartei, die wöchentlich persönlich vorbeikommen, um technische Waren abzuholen. 45 davon haben eine sehr schlechte Bonität. Sie haben bisher keine Rechnung bezahlt. Pro Viertelstunde kommen ca. 3 Kunden vorbei. Wie gross ist die Chance, dass in der nächsten Viertelstunde der Lehrling an drei solche schlechten Kunden Ware herausgibt? (Bevor der Lehrling instruiert werden kann.)

(a) Wenn angenommen wird, dass jeder Kunde mehrmals vorbeikommt (d.h. mit zurücklegen).

(b) Wenn angenommen wird, dass jeder Kunde nur einmal vorbeikommt (d.h. ohne zurücklegen).

**Probl. 2** **(3 Punkte)**

**Qualitätskontrolle:**

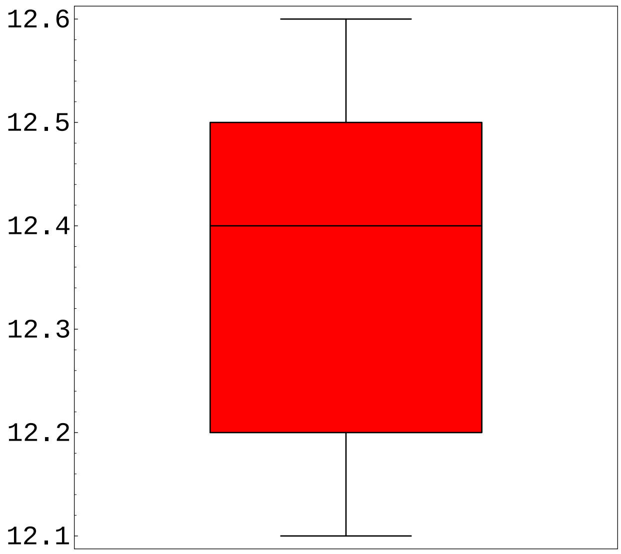
Aus einer Sendung mit 1000 Stücken eines Halbfabrikates werden zu Prüfzwecken 10 Stücke als Stichprobe zufällig herausgegriffen. Falls alle Stücke der Stichprobe gut sind, wird die Sendung akzeptiert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sendung akzeptiert wird, obwohl 12 % aller Stücke der Sendung unbrauchbar sind?

**Probl. 3** **(9 Punkte)**

**Herstellung von Stiften, Stiftdicke in $mm$:**

In der Stichprobe Nummer $S154$ wurde 7 mal der Wert 12.4 gemessen, 12 mal der Wert 12.5, 14 mal der Wert 12.6, 15 mal der Wert 12.7, 11 mal der Wert 12.8 und 5 mal der Wert 12.9. Dazu sind für eine schon früher gemessenen Stichprobe $S094$ die folgenden Daten bekannt:

Stichprobenumfang $N_{S094} = 64$, Mittelwert $\bar{x}_{S094} = 12.3594$, Standardabweichung $s = 0.145535$. Dazu hat man noch einen Box–Whisker–Plot:




(a) Berechne für die Stichprobe $S154$ den Mittelwert und die Standardabweichung.

(b) Stelle für die Stichprobe $S154$ den Box–Whisker–Plot her und entscheide damit qualitativ, ob diese Stichprobe von der Stichprobe $S094$ wesentlich verschieden ist.

(c) Inzwischen ist bekannt geworden, dass in der Stichprobe $S094$ bei der Dateneintragung ein systematischer Fehler vorgekommen ist. Es wurde 5 mal der Wert 12.1 eingetragen. Richtig wäre stattdessen 5 mal der Wert 12.7 gewesen. Berechne damit, falls möglich, den korrigierten Mittelwert und die korrigierte Standardabweichung.

**Probl. 4** **(9 Punkte)**

**Normalverteilter Fehler:**

Bei der Produktion von Gleitlagern mit dem Innen–Nenndurchmesser $5.295\,mm$ ist durch Meßserien ein mittlerer Fehler (Standardfehler) von $0.005\,mm$ festgestellt worden. Da hier wiederum eine Grossserie von $100'000$ Stück geplant ist, soll auf Grund der Erfahrung der Durchmesser durch eine Normalverteilung mit $\sigma = 0.005\,mm$ und $\mu = 5.295\,mm$ beschrieben werden.

(a) Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler des Innendurchmessers eines Lagers grösser als $0.007\,mm$ ist. **(Teilaufgabe mit 6 Punkten)**

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Welle mit dem grössten messbaren Durchmesser von $5.300\,mm$ im gelagerten Bereich klemmen wird.

**Probl. 5** **(6 Punkte)**

**Konfidenzintervall:**

Zur Bestimmung der Streckgrenze einer Stahlsorte A hat man n = 150 Messungen durchgeführt. Daraus konnte man das arithmetische Mittel zu $\bar{x} = 315.0\,N/mm^2$ bestimmen. $\bar{x}$ ist ein geeigneter Punktschätzer für den Mittelwert $\mu$ der Grundgesamtheit. Aus der Erfahrung weiss man, dass das Streumass $\sigma^2$ der Grundgesamhteit ziemlich genau durch den Wert $\sigma^2 = 900(N/mm^2)^2$ gegeben ist. Weiter weiss man aus der Erfahrung, dass die mittlere Streckgrenze mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit eine normalverteilte Zufallsgrösse $\bar{X}$ ist (mit der Normalverteilung $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$). Daraus möchte man Genauigkeitsschranken oder Vertrauensgrenzen für den Mittelwert $\mu$ der Halbjahresproduktion bestimmen. Es ist bei der Firma üblich, in solchen Fällen Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau $\varepsilon =$ resp. $\lambda = 0.99 = 1 - \alpha$ anzugeben. Bestimme das Konfidenzintervall $[c_{\alpha/2}, c_{1-\alpha/2}]$.

**Probl. 6** **(6 Punkte)**

**Hypothesentest:**

Anlässlich der Herstellung von Wellen wird die Qualität geprüft. Zwei Prüfverfahren $V_1$ und $V_2$ werden zur Auswahl vorgeschlagen. Dabei wird die maximale Laufzeit bei der höchsten zulässigen Drehzahl gemessen, unter Verwendung von verschiedenen Lagern je nach Verfahren. Nun macht man einen Versuch mit je 20 Wellen in beiden Verfahren. In 3 Fällen zeigt das Verfahren $V_1$ eine längere Laufzeit als das Verfahren $V_2$. In 17 Fällen ist das Verfahren $V_2$ besser. Eine exakt gleiche Laufzeit bei beiden Verfahren kommt nicht vor.
Zur Sache formulieren wir eine die Hypothese $H_0$: „Die beiden Verfahren sind nicht wesentlich verschieden, d.h. das Resultat beim Verfahren $V_1$ ist praktisch gleich dem Resultat beim Verfahren $V_1$.“ $H_0$ vergleichen wir mit der folgenden Alternativhypothese $H_1$: „Die beiden Verfahren sind wesentlich verschieden.“ Damit ist gemeint, dass das Resultat beim Verfahren $V_1$ ungleich ist dem Resultat beim Verfahren $V_2$. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter Annahme von $H_0$ hier dennoch die gemessene Abweichung der beiden Verfahren auftreten kann. Gelingt es somit, die Hypothese $H_0$ aufrecht zu erhalten, wenn man der Alternative höchstens eine Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\,\%$ zubilligt?

**Probl. 7** **(3 Punkte)**

**Wahrscheinlichkeitsverteilung:**

In einem Lager befinden sich je eine sehr grosse Menge von gemischt eingelagerten älteren Elektromotoren von zwei Liferanten $A$ und $B$. Beide Lieferanten haben etwa gleich viele Geräte geliefert. Um sie zu unterscheiden, muss man eine kleine Etikette ablesen, wozu es gute Augen und viel Licht braucht. Der grosse Raum hat kein Tageslicht und eine schlechte Beleuchtung. Dem Lager werden zufällig 40 Geräte entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass man ein Gerät vom Liferanten $A$ erwischt, ist 0.5. Ebenso für $B$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Staplerfahrer bei einem Lagerbesuch maximal 5 Motoren vom Lieferanten $B$ mitnimmt? — Der Lieferant $B$ hat eben angefragt, ob er zu Prüfzwecken 5 ältere Geräte ausleihen kann.

**Probl. 8** **(12 Punkte)**

**Kontingenztafel oder Kreuztabelle:**

Ein Edelmetall verarbeitendes Unternehmen besitzt 90 gewöhnliche und 10 gepanzerte Lieferwagen, letztere für den Transport von Ware mit sehr hohem Wert. Die beiden Wagentypen kann man von aussen kaum voneinander unterscheiden. Im Mittel machen alle Wagen etwa gleich lange Tagesrouten. Die Firma beschäftigt gleichviele Fahrer und Fahrerinnen, zusammen soviele wie die Lieferwagen, wobei die Fahrer aus Sicherheitsüberlegungen zu vier mal soviel für Sicherheitstransporte in gepanzerten Fahrzeugen eingesetzt werden wie die Fahrerinnen. Die Beschäftigten wissen auf ihren Transporten nicht, was der Inhalt der transportierten verschlossenen Metallkisten ist. Nun studiert man in der Firma mitten im Frieden ein möglicher erster Überfall. Infolge der Struktur der Belegschaft darf angenommen werden, dass niemand von der eigenen Firma am Überfall beteiltigt sein kann. Alle Wagen sind im Einsatz.

(a) Erstelle eine Kreuztabelle (Kontingenztafel) für die Situation an diesem Tag, an dem alle Wagen und Fahrer resp. Fahrerinnen im Einsatz sind.

(b) Was ist die Chance, dass es im Falle eines ersten Überfalles an einem solchen Tag einen Sicherheitstransport trifft?

(c) Was ist die Chance, dass im Falle eines ersten Überfalles ein Sicherheitstransport mit einer Frau am Steuer überfallen wird?

(d) Was ist die Chance, dass im Falle eines ersten Überfalles ein Sicherheitstransport überfallen wird unter der Voraussetzung (resp. der Bedingung), dass eine Frau am Steuer sitzt? (Dies unter der Annahme, dass die Übeltäter gezielt Transporte mit Frauen auswählen.)

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Arch., Bau u. Holz, FB Bau, Burgdorf, 07.09.2009

## 2.59 Modulprüfung in Mathematik 2009 Klasse B 08 / B1

*Viel Glück !*

**Erwartet werden die Lösungen von etwa 4 Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte.**

**Probl. 1** **(18 Punkte)**

(a) **(10 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln(2\,x + e) + \frac{2\,x+2}{x+2}.$$

i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen im Intervall $I_1 = [0,\, 2]$.
ii. Zeichne in die Skizze die Sehne zwischen den Endpunkten des Graphen ein beim gegebenen Intervall $I_1$ und bestimme dazu rechnerisch den Steigungswinkel dieser Sehne im Bogenmass.
iii. Zeiche in die Skizze auch die Tangente bei $x = 1$ ein und bestimme rechnerisch den Steigungswinkel dieser Tangente im Bogenmass.
iv. Bestimme, um wieviele Prozente von der Sehnensteigung die Tangentensteigung grösser oder kleiner ist als die Sehnensteigung.
v. Bestimme rechnerisch einen allfälligen Schnittpunkt der gegebenen Sehne mit der gegebenen Tangente. Zeichne allenfalls eine zweite Skizze, in der der eventuelle Schnittpunkt sichtbar gemacht ist.

(b) **(8 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -|x|^3 + 8 \ \text{ mit } \ y = f(x) \geq 0$$

Zwischen der $x$–Achse und dem Graphen liegt ein achsenparalleles Rechteck mit möglichst grossem Flächeninhalt $F$.

i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen und eines möglichen Rechtecks, wie es etwa zu erwarten ist.
ii. Bestimme rechnerisch den Flächeninhalt $A$ des Funktionsgraphen über der $x$–Achse.
iii. Bestimme die $x$–Koordinaten, welche notwendig sind um das Rechteck eindeutig anzugeben.
iv. Bestimme den Flächeninhalt $F$ des Rechecks und das Verhältnis dieses Inhalts zum Flächeninhalt $A = \int\limits_{y\geq 0} f(x)\,dx$.

**Probl. 2** **(15 Punkte)**

Mit Hilfe der folgenden Funktion wird versucht, die Form der Mantellinie eines gegebenen liegenden Fasses zu modellieren:

$$m(x) = \cos\left(\frac{1}{2 - x^2}\right), \quad I_2 = [-1,\, 1].$$

Hier wird $m(x)$ zur Erzeugung des Modells um die $x$–Achse rotiert.

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen der Mantellinie des Rotationskörpers.

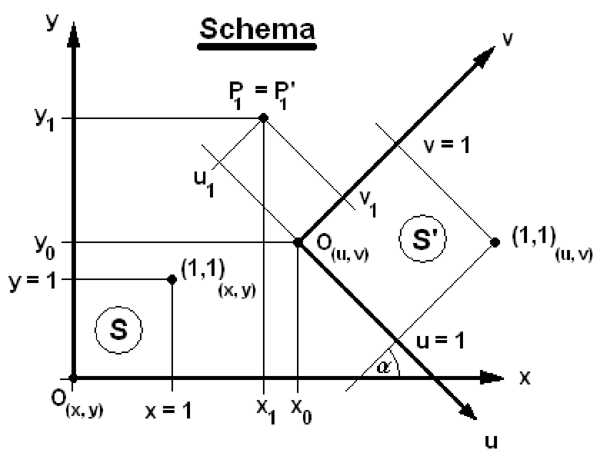
(b) Berechne eine vernünftige numerische Näherung der Länge der durch $m(x)$ über $I_2$ gegebenen Mantellinie.

(c) Berechne eine vernünftige Näherung des Mantelflächeninhalts des Rotationskörpers (ohne die beiden Deckflächen, Rotation von $m$ um die $x$–Achse).

(d) Berechne eine vernünftige Näherung des Volumeninhalts dieses Rotationskörpers.

(e) Wie gross müsste der Radius eines Zylinders mit dem gleichen Volumeninhalt und derselben Höhe wie beim Fass sein? Wieviel Prozent des Maximalradius des Fasses beträgt dieser Zylinderradius?

**Probl. 3** **(15 Punkte)**




Im Viertelkanton Hinterfelden in Strumpfland, einem Viertweltstaat der nicht zur UNO gehört, verwendet man immer noch zwei Koordinatensysteme. Ein altes, noch aus der Kolonialzeit stammendes und anderswo vergessenes $(u,\, v)$–System und ein modernes $(x,\, y)$–System im Metermass. Das $(x,\, y)$–System nennen wir **S** und das $(u,\, v)$–System nennen wir **S '**. Das eine System geht aus dem andern durch Parallelverschiebung und Drehstreckung hervor. Die Einheiten lassen wir vorerst weg.

Wir können somit den Ansatz machen:

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,\, y) \\ v(x,\, y) \end{pmatrix} = \lambda \cdot D_\varphi \cdot (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) = \lambda \cdot D_\varphi \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Dabei sind $u$ und $v$ die Koordinaten eines gegebenen Punktes in **S '** und $x$ und $y$ die Koordinaten desselben Punktes in **S**. $D_\varphi$ ist eine noch zu bestimmende Drehmatrix:

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Die Werte von $\varphi$, $\lambda$, $x_0$ und $y_0$ sollen aus gegebenen Mustermessungen von Punkten in beiden Koordinatensystemen bestimmt werden. Wir kennen die Koordinaten des Ursprunges von $O_{S'}$ im System **S** mit den Werten $x_0$ und $y_0$:
$O_{S',(x,y)} = (x_0,\, y_0) = (44.36,\, 36.85)$. Dabei ist $O_{S,(x,y)} = (0,\, 0)$ (resp. $= (0.00,\, 0.00)$).

Weiter kennt man die Koordinaten des geometrischen Punktes $P_1 = P_1{}'$ im jeweils zugehörigen System. Diese sind speziell vermessen und am Boden durch eine Marke gekennzeichnet worden. Es gilt:
$P_{1,S} = (x_1,\, y_1) = (28.96,\, 43.92))$, $P_{1,S'} = (u_1,\, v_1) = (7.32,\, 12.88))$.

(a) Bestimme $\vec{x}_0$.

(b) Bestimme $\lambda$ und $\varphi$.

(c) Bestimme damit die Transformation $\vec{u} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \lambda \cdot D_\varphi \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$.
Fertige dazu auch eine Skizze an.

(d) Berechne die Bilder der folgenden Punkte
$P_{2,S} = (x_2,\, y_2) = (10.00,\, 20.00)$ und $P_{3,S} = (x_3,\, y_3) = (18.57,\, 24.24)$.

(e) Berechne das Urbild des Punktes $P_{4,S'} = P(u_4,\, v_4) = (28.00,\, 15.00)$.

**Probl. 4** **(24 Punkte)**

Eine Abbildung ist gegeben durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 19 & -4 & -6 \\ 12 & -4 & -6 \\ 16 & -17 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bilde mit $B$ die folgenden Vektoren ab: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Was fällt dabei auf bezüglich der Richtungen der Vektoren?

(b) Untersuche, ob die Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis bildet.

(c) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $B$.

(d) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $B^{-1}$, falls möglich.

(e) Bilde mit $B$ den Vektor $\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2 + \gamma\,\vec{v}_3$ ab.

(f) Konstruiere eine Matrix $C$, welche dieselben Eigenvektoren wie $B$ besitzt, deren Eigenwerte jedoch so geardet sind, dass durch $C$ eine Projektion in Richtung $\vec{v}_3$ auf die Ebene $\Phi = \Phi(O, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ gegeben ist. ($O =$ Ursprung.)

(g) Bilde mit $C$ die Punkte $P_1(1,1,1)$, $P_2(4,4,4)$, $P_3(5,12,20)$ ab.

(h) Berechne die Distanz $d$ von $P_1$ zur Gerade $g(P_2, P_3)$ und die Distanz $d'$ des Bildes $P_1{}'$ zu $g'(P_2{}', P_3{}')$. Um welchen Faktor verkürzt sich die Distanz beim Projizieren?

**Probl. 5** **(14 Punkte)**

Durch die Alpen wird ein $40\,km$ langer Tunnel gegraben, welcher beim Ausbruch einen Querschnitt hat, der durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$q(x) = -\frac{1}{2}\left(e^{3\,x/10} + e^{-3\,x/10}\right) + 10, \;\; q(x) \geq 0.$$

Die zu $q(x)$ gehörigen Masse sind in Metern zu verstehen.

(a) Berechne die Nullstellen von $q(x)$ numerisch und damit den Definitionsbereich $D_q = I_5$ der Randkurve für den Tunnelquerschnitt.

(b) Berechne den Querschnitsflächeninhalt des Tunnels in $m^2$.

(c) Berechne das Ausbruchvolumen in $m^3$, wenn zwei parallele „Röhren“ ausgebrochen werden.

(d) Das Ausbruchvolumen wird draussen in Form von Pyramiden abgelagert, welche die Abmessungen der Cheops–Pyramide haben: Ursprüngliche Höhe $146.6\,m$, mittlere Länge $230.3\,m$. Wieviele solche Pyramiden wird es geben, wenn zwei „Röhren“ ausgebrochen werden? (Zu ganzen Anzahlen runden.)

(e) Ein verrückter Planer möchte mit diesem Material eine Hohlkugel von einem Kilometer Aussendurchmesser formen. Wie gross würde dann die Wandstärke werden, wenn man das Volumen des Bindemittels nicht berücksichtigt?

(f) Entwickle zur vereinfachten Berechnung $q(x)$ in eine Potenzreihe $p(x)$ mit dem Zentrum $x_0 = 0$ bis und mit Gliedern der Ordnung 6.

(g) Studiere den Fehler $|q(x) - p(x)|$ im Intervall $D_q$ graphisch. Für welche $x$ (numerisch) wird der Fehler maximal und wie gross ist dieser Fehler dann?

**Probl. 6** **(12 Punkte)**

(a) Löse die Differentialgleichung $y\,'(x) = \frac{x^2}{2} \cdot y(x), \;\; y(0) = 1$ und berechne $y(1)$.

(b) Der Graph des Polynoms $p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ geht durch die Punkte $P_1(-2; 0), \;\; P_2(0; 1)$ und hat in $P_2$ ein relatives Minimum. In $P_3(-1; p(-1))$ existiert ein lokales relatives Maximum. Berechne, falls möglich, die Koeffizienten und damit den Steigungswinkel der Tangente in $P_1$ in Grad.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf 03.02.2010

## 2.60 Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2010 M 09a / M 1a

### Teil 1: Ohne Hilfsmittel, Zeitrahmen 30 Minuten, anschliessend Abgabe

*Viel Glück !*

**Löse die nachfolgenden Kurzaufgaben.** Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Im Falle einer unlösbaren Aufgabe ist als Resultat „unlösbar" zu schreiben.

**Probl. 1 Angaben:** Gegeben sei

$$A=\begin{pmatrix}-b & b & b\\ a & c & c\\ c & a & c\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b & b & c\\ a & -a & a\\ c & c & b\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}b & b & a\\ a & -b & a\\ -c & c & b\end{pmatrix},\ \vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$z_1=-\frac{1}{2}\,i,\ \ z_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,i,\ \ z_3=3-2\,i$$

(a) Zeige von Hand die Berechnung von $\det(A)$ und untersuche dann, für welche Werte von $a$, $b$, $c$ die Determinante 0 ist. **(3 Punkte)**

(b) Zeige von Hand die Berechnung von $\det(B)$ und untersuche dann, für welche Werte von $a$, $b$, $c$ die Determinante 0 ist. **(3 Punkte)**

(c) Wie gross sind $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(A\cdot B)$ sowie $\det(B\cdot A)$ für $a=1,\ b=0,\ c=-1$? **(3 Punkte)**

(d) Berechne $A\cdot B$ und $B\cdot A$ für $a=1,\ b=0,\ c=-1$. **(3 Punkte)**

(e) Wie gross ist $\det(C)$ und $\det(A\cdot C)$ sowie $\det(B\cdot C)$ für $a=1,\ b=0,\ c=-1$? **(3 Punkte)**

(f) Es soll gelten: $\det(B\cdot C)=16$, wobei $b=0$ und $c=-1$ gesetzt werden. Wie gross muss dann $a\in\mathbb{R}$ sein? **(3 Punkte)**

(g) Löse für $a=1,\ b=0,\ c=-1$ die Gleichung $C\cdot\vec{x}=\vec{b}_1$. **(3 Punkte)**

(h) Berechne die Inverse der Matrix $G=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. **(3 Punkte)**

(i) Löse mit $G$ von oben die Gleichung $G^{-1}\cdot(E-X^T+G)\cdot G=G\cdot G$. **(3 Punkte)**

(j) Berechne exakt von Hand $\bar{z}_1\cdot z_2^{-1}$. **(3 Punkte)**

(k) Skizziere die Lösungen von $z^6=z_1$. **(3 Punkte)**

(l) Berechne von Hand $\dfrac{(z_2)^2+z_2}{z_3}$. **(3 Punkte)**

**Probl. 2 Angaben:** Gegeben sind die unten folgenden Matlab–Befehle.

(a) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
x=0:0.1:pi;y=sin(x);plot(x,y)
```

(Bitte Output so darstellen, wie er etwa auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(b) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
x=3; y=2; clear; y=3; z=(x*y)^(1/2)
```

(Output sinngemäss so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(c) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
exp(1) - log10(10)
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(d) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
((0:5)-5)*5
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(e) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
u=[2*3,4,sqrt(25)]; v=[u' (4+u)' 2*u']
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(f) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
v*v
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf 03.02.2010

# Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2010 M 09a / M 1a

## Teil 2: Zeitrahmen 90 Minuten

*Viel Glück !*

**Löse die nachfolgenden Aufgaben.** Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.
Im Falle einer unlösbaren Aufgabe ist als Resultat „unlösbar“ zu schreiben.

**Probl. 3** **(15 Punkte)**

Gegeben sind vier Punkte im Raum: $P_1 = P_1(2; -1; 0)$, $P_2 = P_2(3; 4; 0)$, $P_3 = P_3(1; 6; 0)$, $Q = Q(1; 5; 7)$. Berechne die folgenden Masse numerisch auf 4 signifikante Stellen genau:

(a) Berechne den Mittelpunkt $M$ des Kreises, auf dem $P_1$, $P_2$ und $P_3$ liegen.

(b) Berechne den gespiegelten Punkt $M'$ von $M$ bezüglich der Geraden $g = g(P_1, P_2)$.

(c) Berechne damit den Winkel $\angle(M, P_3, M')$.

(d) Berechne das Volumen des (nicht regulären) Tetraeders, das durch die Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $Q$ gebildet wird.

(e) Berechne den Abstand der Punkte $M$ und $P_3$ von der Geraden $g$.

**Probl. 4** **(9 Punkte)**

Gegeben sind $p(x) = \dfrac{-4\,x^5 - 8\,x^4 - 9\,x^3 - 5\,x^2 + x - 1}{x^2\,(x+1)}$
und $q(x) = \dfrac{-4\,x^4 - 4\,x^3 - x^2 - x + 4}{(x-1)\,(x+1)}$.

(a) Bestimme die Partialbruchzerlegung von $p(x)$.

(b) Bestimme die Partialbruchzerlegung von $q(x)$.

(c) Bestimme damit die Partialbruchzerlegung von $p(x) - q(x)$.
Untersuche damit die Frage: Worin unterscheidet sich die Partialbruchzerlegung von $(p(x) - q(x))$ von den Zerlegungen von $p(x)$ und $q(x)$?

**Probl. 5** **(9 Punkte)**

Gegeben sind die 8–ten Einheitswurzeln $z_k = e^{k\,i\,\frac{2\pi}{8}}$, $k = 1, 2, 3, \ldots 8$. Diese Zahlen sind bekanntlich die Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ in $\mathbb{C}$.

(a) Skizziere die Zahlen $u_k = -z_k, k = 1, 2, 3, \ldots 8$, so exakt wie möglich in einem Diagramm. Von welcher Gleichung sind diese Zahlen $u_k$ die Lösungen?

(b) Berechne numerisch die Zahlen $w_j = \sum\limits_{k=1}^{j} z_k$, $j = 1, 2, 3, \ldots 8$. Skizziere diese Zahlen in einem Diagramm.

(c) Was kann man anhand des Diagramms nun zur speziellen Lage der Zahlen $w_j$ vermuten? Begründung? (*Hinweis:* Beachte die genaue Skizze der entstehenden Figur!)

**Probl. 6** **(15 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $A \cdot A$ und $A \cdot A \cdot A$. Was fällt am Resultat auf?

(b) Berechne $B \cdot B$ und $B \cdot B \cdot B$. Was fällt am Resultat auf?

(c) Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Was stellt man fest?

(d) Löse die Gleichung $A \cdot B \cdot A + A = X \cdot B \cdot B + B$.

(e) Seien $\vec{x}_1 = \vec{0}$ ($\vec{x}_2 = (1, -1, 0, 1, -1)^T$). Berechne $A \cdot \vec{x}_1$ und $A \cdot \vec{x}_2$. Was stellt man fest?

**Probl. 7** **(6 Punkte)**

Gegeben ist eine Kugel $K_1$ mit dem Mittelpunkt im Ursprung ($M_1 = O$) und einem Radius $R_1 = 5$. Dazu ist noch eine zweite Kugel $K_2$ gegeben mit dem Mittelpunkt $M_2 = M_2(5;\, 5;\, 5)$ und einem Radius $R_2 = 6$. Durch die Schnittkurve der beiden Kugeln kann man eine Ebene $\Phi$ legen. Berechne den Durchstosspunkt von $\Phi$ mit der $x$–Achse.

**Probl. 8** **(6 Punkte)**

Durch die Punkte $P_1 = P_1(1;\, 0;\, 0)$, $P_2 = P_2(0;\, 2;\, 0)$ und $P_3 = P_3(0;\, 0;\, 3)$ ist eine verspiegelte Ebene $\Gamma$ gegeben. Vom Punkte $Q_1 = Q_1(4;\, 0;\, 0)$ wird ein Lichtstrahl ausgesendet, welcher nach Reflexion in einem Punkt $L \in \Gamma$ auf den Punkt $Q_2 = Q_2(1;\, 5;\, 1)$ trifft. Berechne die Koordinaten des Punktes $L$.
(*Hinweis:* Mache dir eine Skizze und überlege anhand dieser, was die Spiegelung von $Q_2$ an $\Gamma$ nützen könnte.)

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf Freitag, 05. Februar 2010

## 2.61 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp08 / Mp2

*Viel Glück !*

**Löse folgende Aufgaben!** (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

**Probl. 1** **(9 Punkte)**

**Bohrkern und Volumen:**

Ein zylindrischer Bolzen mit dem Radius $r = 20$ wird exakt senkrecht und zentrisch zu seiner Achse mit einem Bohrer durchbohrt, dessen Radius ebenfalls $r = 20$ ist.

(a) Skizziere ausgebohrte Volumen. (3 Punkte)

(b) Wie gross ist das ausgebohrte Volumen? (6 Punkte)

**Probl. 2** **(30 Punkte)**

**Laplace–Transformationen und Rücktransformationen:**

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \sin(3\,t) + \sinh(5\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(b) $f(t) = e^{t-3}\,e^{t+3} \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(c) $f(t) = e^{t}\,(1 + \sin(t)) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(d) $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(e) $f(t) = \delta(t) + (1+t)^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(f) $Y(s) = \dfrac{2\,s}{4\,s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(g) $Y(s) = \dfrac{s^2}{s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(h) $Y(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^3} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(i) $Y(s) = \dfrac{e^{-3}}{s-1} + \dfrac{e^{+3}}{s-1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(j) $Y(s) = \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{1}{1+s^2} + \dfrac{4}{s+s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

**Probl. 3** **(18 Punkte)**

**Differentialgleichung:**

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y = f(t).$

(a) Sei $f(t) = e^{-t}$. Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Wendetangente? (2 Punkte)

(b) Skizziere diese Kurven über dem Bereich $D = [-1,\, 2.5]$. (4 Punkte)

(c) Bestimme für diese Kurven in $D$ die vorhandenen Extremwertstellen mit ihren Werten sowie die restlichen Wendepunkte, sofern vorhanden. (3 Punkte)

(d) Bestimme für diese Kurven die Kurvenlängen zwischen $t = -1$ und $t = 2.5$ sowie zwischen $t = -1$ und $t = 6$. Numerische Resultate genügen. (3 Punkte)

(e) Löse das Anfangswertproblem mit $f(t) = t^2$ und den Anfangsbedingungen $y(0) = -1,\;\; y'(0) = y''(0) = 0.$ (6 Punkte)

**Probl. 4** **(6 Punkte)**

**Differentialgleichungssystem:**

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{aligned} x(t)'' - y(t) &= 0 \\ y(t) - x'(t) &= 2\sin(t) \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= -1 \\ y(0) &= -1 \end{aligned}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \geq 0$.

Skizziere dann damit die Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sin(t)\, y(t) \end{pmatrix},\;\; t \geq 0.$

Was ist hier bemerkenswert?

**Probl. 5** **(6 Punkte)**

**Integration:**

Zwei Mitarbeiter streiten sich darüber, welches der nachfolgend beschriebenen Volumen grösser sei. Entscheide den Streit und begründe die Entscheidung:

$$V_1 = \int_0^{4\pi}\int_0^{2\pi} (2x - y) + \; sin(x \cdot y)\, dx\, dy, \qquad V_2 = \int_0^{4\pi}\int_0^{2\pi} (2x - y) + \; sin(x + y)\, dx\, dy.$$

Gibt es in diesen Integralen überflüssige Terme? Wenn ja, welche?

**Probl. 6** **(12 Punkte)**

**Praktisches Beispiel:**

Ein Fallschirmspringer springt zur Übung in einer Höhe von $h$ über Grund aus dem Flugzeug. Die Leine zur Öffnung des Fallschirms ist bei diesem Sprung seitlich an der Sprungluke befestigt, sodass sich der Schirm sofort öffnet. Die Falldistanz während der Entfaltung vernachlässigen wir. Für den Flug gilt die folgende Differentialgleichung (AWP):

$$a(t) = v\,'(t) = g - \frac{c}{m}\, v^2(t), \;\; c = \frac{c_w\, \rho\, A}{2}$$

Dabei sind die folgenden Werte bekannt:

(a) $h = 1000\, m$

(b) $g = 9.81\, m\, s^{-2}$ (Gravitationskonstante)

(c) $m = 100\, kg$ (Masse)

(d) $c_w = 1.33$ (Widerstandsbeiwert für den geöffneten Schirm)

(e) $\rho = 1.2\, kg/m^{-3}$ (Dichte der Luft)

(f) $A = 25\, m^2$ (Stirnfläche des Schirms)

Berechne $v_\infty = v(\infty)$ mittels der Annahme $v\,'(\infty) = 0$. Führe dann $v_\infty$ in der D'gl. ein. Damit lässt sich der Term $\dfrac{c}{m}$ substituieren. So erhält man eine separierbare D'gl., die lösbar ist. Beim Absprung soll $t = t_0 = 0\, sec$ gesetzt werden. Berechne daraus

(a) $v(t)$ mit numerischen Koeffizienten und damit (6 Punkte)

(b) $s(t)$ mit numerischen Koeffizienten. (3 Punkte)

(c) Berechne danach eine numerische Näherung für die Zeit $t_{total}$, während der sich der Fallschirmspringer in der Luft befindet, bis er auf dem Boden auftrifft. (3 Punkte)

**Probl. 7** **(6 Punkte)**

**Partielle Differentialgleichung:**

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung $\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ mit den Anfangsbedingungen in $x_1 = 0,\;\; x_2 = 10,\;\; t_0 = 0$:

$$T(x_1, t) = 40,\;\; T(x_2, t) = 0,\;\; T(x, t_0) = 40 - 4\, x.$$

Gesucht ist die Lösung $T(x,t)$.

(*Hinweis:* Man versuche mit Hilfe eines konstruktiven Ansatzes eine Lösung zu ermitteln, indem man mit einem möglichst einfachen Ansatz für die Zeitabhängigkeit testet, ob die Gleichung erfüllt ist.)

---

**Probl. 8** **Abgabetermin ausstehende Abgaben** (Nach Massgabe der Bedeutung)

Für Studierende (Repetenten und reguläre Studierende), welche noch ausstehende Arbeiten abgeben wollen: Der letzte mögliche Abgabetermin ist am Ende der auf Teil 1 folgenden Zwischenpause anlässlich dieser Prüfung.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, 05. Februar 2010

## 2.62 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp08 / Mp 2

*Viel Glück !*

**Löse folgende Aufgaben!** (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

**Probl. 1** **(6 Punkte)**

**Datenkorrektur:**

Gegeben sind der Mittelwert $\bar{x} = 120.8$ und die Standardabweichung $s = 6.24$ eines von einem Vertragsunternehmen untersuchten Datensatzes mit 500 Messungen. Heute wurde bekannt, dass einer unserer schwach ausgebildeten Mitarbeiter seine Messungen systematisch falsch abgelesen hat. Er hat 76 mal den Wert 110 notiert statt den Wert 130.

(a) Versuche den wirklichen Mittelwert zu berechnen. (2 Punkte)

(b) Versuche die richtige Standardabweichung zu berechnen oder anzuznähern, falls dies möglich ist. (4 Punkte)

**Probl. 2** **(9 Punkte)**

**Qualitätskontrolle:**

Mit zwei Maschinen $A$ und $B$ werden Bolzen produziert. An 12 aufeinanderfolgenden Tagen ist an jeder Maschine eine Stichprobe erhoben worden. $\bar{d}_{k,\,A}$ und $\bar{d}_{k,\,B}$ sind die aus den Stichproben errechneten Mitelwerte der Durchmesser für den Tag $k$ in $\mu m$. Nachstehend sind nur die Differenz $\bar{d}_{k,\,A} - \bar{d}_{k,\,B}$ notiert. Man teste nun die Nullhypothese, dass beide Maschinen Bolzen mit den selben mittleren Massen liefern, gegen die Alternative, dass die eine Maschine, hier $A$, einen systematisch höheren Mittelwert liefert als $B$.

(a) Sei dabei $\alpha = 0.01$. Wenn die gemessene Situation in der Realität für die Alternativhypothese $H_1$ eine Wahrscheinlichkeit $P < \alpha$ ergibt, so ist $H_1$ bemerkenswert, unwahrscheinlich oder „siginifikant“ zum Niveau $\alpha$. Frage: Ist $H_1$ signifikant zu $\alpha$? (6 Punkte)

(b) Frage: Kann man damit die Alternativhypothese $H_1$ auf der Grundlage dieses Tests akzeptieren und muss man damit $H_0$ verwerfen? Erkläre den Sachverhalt auf der Grundlage des Resultats! (3 Punkte)

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{d}_{k,\,A} - \bar{d}_{k,\,B}$ | 12 | 9 | 2 | 0 | 1 | 3 | $-4$ | 5 | $-5$ | 1 | 2 | 6 |

**Probl. 3** **(12 Punkte)**

**Qualitätskontrolle:**

Bei der Fliessbandfertigung von Motorengehäusen werden parallel zwei automatische Lehrenbohrwerke eingesetzt, wo jeweils in den Gehäusen Präsisionslöcher bebohrt werden. Die Toleranzen dieser Löcher werden in Mikrometern gemessen ($\mu m$). Die Lehrenbohrwerke sind so eingestellt, dass bei einer Abweichungen der Mittelwerte sowie der Standardabweichung der Differenz $|Sollmass - Istmass|$ pro volle Stunde um mehr als $30\,\mu m$ Alarm ausgelöst wird.
Da in letzter Zeit von der Abnehmerstelle trotzdem Reklamationen eingetroffen sind mit der Beanstandung, dass hier zwei verschiedene Qualitäten geliefert würden, wird an jedem Bohrwerk eine Stichprobe abgezogen und der Betrag der maximalen Abweichung der Lochdurchmesser vom vertraglich abgemachten Mittelwert in $\mu m$ ermittelt. Nachstehend sind die beiden Datensätze aufgeführt:

$$Datensatz_1 = \{45, 7, 4, 49, 11, 7, 7, 5, 7, 41, 53, 1, 4, 41, 41, 22, 21, 2, 8, 2\} \text{ in } \mu m.$$

$$Datensatz_2 = \{27, 44, 4, 1, 16, 4, 12, 49, 2, 23, 68, 3, 13, 13, 50, 4, 42, 7, 27, 1\} \text{ in } \mu m.$$

(a) Ermittle die Mittelwerte der beiden Datensätze und beurteile diese bezüglich der Reklamationen. (3 Punkte)

(b) Ermittle die Standardabweichung der beiden Datensätze und beurteile diese bezüglich der Reklamationen. (3 Punkte)

(c) Zeichne von den beiden Datensätzen den Box-Whiskers-Plot im selben Diagramm und beurteile damit die Reklamationen. (6 Punkte)

**Probl. 4** **(12 Punkte)**

**Konfidenzintervalle:**

Eine Firma fertigt seit Monaten Halbfabrikate für Haushaltsgeräte. Es handelt sich hierbei um Lagerplatten aus Kunststoff, in welche Löcher zur Aufnahme von Achsen für Reibräder eingelassen sind. In abgekühltem Zustand sollte der wichtigste Lochabstand $a_0 = 46.50\,mm$ und dazu die Toleranz $\pm\Delta a_0 = \pm 0.01\,mm$ betragen.
Aus der Erfahrung weiss man, dass der Mittelwert bei der Fabrikation $\bar{a} = 46.497\,mm$ beträgt. Die über lange Zeit ermittelte Standardabweichung ist $s = \Delta a, \ \ \pm\Delta a = \pm 0.044\,mm$. Ebenso ist durch die Erfahrung erhärtet worden, das die Werte für $a$ einer Normalverteilung mit $\mu \approx \bar{a}$ und $\sigma \approx \Delta a$ genügen.

(a) Nun hat der Kunde mitgeteilt, dass im Falle $a \geq a_0 + 2\,\Delta a_0$ die eingebauten Reibräder in der Regel aneinander schleifen und dass sie sich dann sehr rasch abnutzen. Daher wird ein entsprechendes Stück Ausschuss, denn die Abnehmer des Kunden weigern sich, weiterhin solche Ware zu bezahlen. Die Stücke sollen demnach automatisch vermessen werden, um den derartigen Ausschuss schon vor dem Ausliefern aus der Sendung entfernen zu können. Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Stück zu entfernen ist. (4 Punkte)

(b) Berechne approximativ ein in der Fabrikation anzustrebendes neues $s = \Delta a_{neu}$ so, dass $a \geq 46.50 + 2 \cdot 0.01$ mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 0.01 eintrifft. (4 Punkte)

(c) Berechne als Alternative approximativ ein in der Fabrikation anzustrebendes neues $\bar{a}$ so, dass bei $\Delta a = 0.044\,mm$ jetzt $a \geq 46.50 + 2 \cdot 0.01$ mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 0.01 eintrifft. (4 Punkte)

**Probl. 5** **(12 Punkte)**

**Wahrscheinlichkeiten:**

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Betrieb mit $n = 365$ Mitarbeitern mindestens einer am gemeinsam gefeierten Jahresabschlussfest Geburtstag hat? Und wie ist es bei nur $n = 20$ Mitarbeitern? (4 Punkte)

(b) Zum Wurf auf eine Darts-Scheibe (Geschicklichkeitsspiel mit diversen Spielregeln und Arten, bei dem eines der gleich grossen Felder mit den Nummern von 1 bis 20 mit einem Pfeil getroffen werden kann. Oft ist das Spiel in Clubs anzutreffen):
Pro Wurf ist die statistisch ermittelte Trefferwahrscheinlichkeit $P = 0.03$. Wie gross ist so die Wahrscheinlichkeit, mit 20 Würfen mindestens einen Treffer zu erzielen? (4 Punkte)

(c) Gegeben ist eine Maschine, die durchschnittlich alle 8 Wochen (40 Arbeitstage) einmal eingesetzt wird. Gestern ist sie eingesetzt worden. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie innerhalb der nächsten 4 Tagen eingesetzt werden muss? (Die Frage kommt eben bei Arbeitsbeginn vom Werkstattchef. Er muss die Maschine revidieren, möchte die Revision jedoch gerne ein paar Tage zurückstellen.) (4 Punkte)

— ENDE —

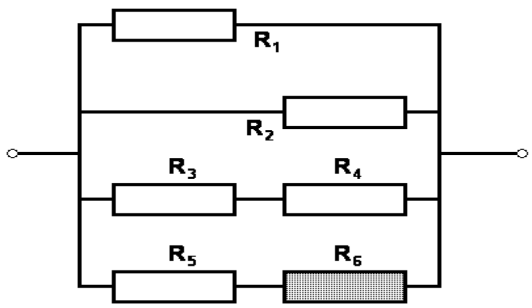
Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Holz, Biel, 17.06.2010

## 2.63 Modulprüfung in Physik 2010 Klassen Bachelor Holz

*Viel Glück !*

**Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleich viele Korrektur–Punkte.**

**Probl. 1** **(15 Korrekturpunkte)**




Gegeben ist eine Schaltung wie im Bild ersichtlich. $R_6$ ist zwischen $0\,\Omega$ und unendlich (Unterbruch).

Es gilt:
$R_1 \pm \Delta R_1 = R_2 \pm \Delta R_2 = R_3 \pm \Delta R_3 = R_5 \pm \Delta R_5 = 2.00\,\Omega \pm 0.05\,\Omega$,
$R_4 \pm \Delta R_4 = 10.00\,\Omega \pm 0.15\,\Omega$.

(a) Wie gross ist der Gesamtwiderstand $R_{total}$, wenn $R_6 \pm \Delta R_6 = R_4 \pm \Delta R_4$ ist?

(b) Berechne den möglichen Fehler (Toleranz) $\Delta R_{total}$.

(c) Wie gross muss $R_6$ gewählt werden, damit $R_{total}$ minimal wird? ($R_{total} = ?$)

(d) Wie gross muss $R_6$ gewählt werden, damit $R_{total}$ maximal wird? ($R_{total} = ?$)

(e) Kann man $R_6$ so wählen, dass $R_{total} = 2.8\,\Omega$ ist? Falls das möglich ist, wie gross muss man dann $R_6$ wählen?

**Probl. 2** **(9 Korrekturpunkte)**

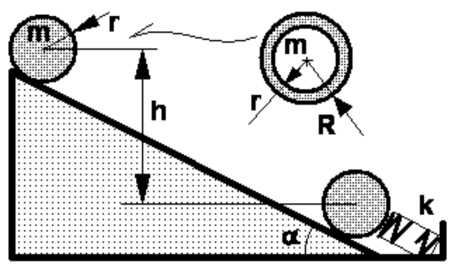
Beim Holzfällen in der Wildnis des sehr wilden Westens entdeckt ein Arbeiter einen grossen, schönen Vogel, welcher oben auf dem zu fällenden Baum sitzt. Der Arbeiter möchte diesen Vogel nach Hause nehmen und ihn ausstopfen lassen, wie das früher bei seinem Grossvater üblich war. So beschliesst er, den Vogel abzuschiessen. Mit seiner Kleinkaliber–Waffe trifft er jedoch nur hart am Vogel vorbei. Das verwendete Projektil hat eine Masse von $2.6\,g$ und die Waffe eine Abschussgeschwindigkeit von $340\,m/s$ mit einem Abschusswinkel von $45^o$ gegen die Horizontale. Der Luftwiderstand soll hier vernachlässigt werden.

(a) Welche Höhe erreicht das Projektil maximal über der Horizontalen, wenn man annimmt, dass in diesem Bereich mit $g = 9.81\,m/s^2$ gerechnet werden kann?

(b) Die nächst gelegene bewohnte Gegend ist $20\,km$ entfernt. In welcher horizontalen Distanz vom Abschussort schlägt das Projektil in die Erde?

(c) Wie gross ist die Energie der Kugel beim Einschlag in den Boden?

**Probl. 3** **(15 Korrekturpunkte)**




Ein zylindrischer Körper der Masse $m = 1\,kg$ mit $r = 2\,cm$ rollt eine schiefe Ebene hinunter ohne zu rutschen. Dabei vermindert sich seine Höhe über dem Boden um $h = 1.5\,m$. Der Neigungswinkel der Ebene $\alpha$ ist $30^o$. Für einen Vollzylinder ist das Trägheitsmoment $J = \frac{1}{2}\,m\,r^2$.

(a) Berechne die Rotationsenergie des Zylinders beim Auftreffen unten.

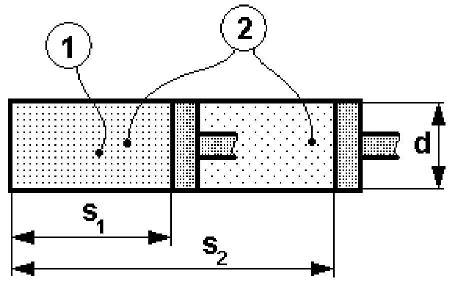
(b) Berechne die Drehzahl (Anzahl Umdrehungen pro Minute) beim Auftreffen.

(c) Berechne die Zeit vom Wegrollen bis zum Auftreffen.

(d) Die Rotationsenergie wird beim Auftreffen durch Reibung „vernichtet". Mit der kinetischen Energie jedoch wird eine Druckfeder gespannt. Berechne die Federkonstante, wenn dabei eine $20\,cm$ lange Feder um $4\,cm$ verkürzt wird.

(e) Berechne die Rotationsenergie beim Auftreffen unten, wenn der Zylinder durch einen Hohlzylinder mit dem Innendurchmesser $r = 2\,cm$ und ebenfalls der Masse $m = 1\,kg$ ersetzt wird.

**Probl. 4** **(6 Korrekturpunkte)**



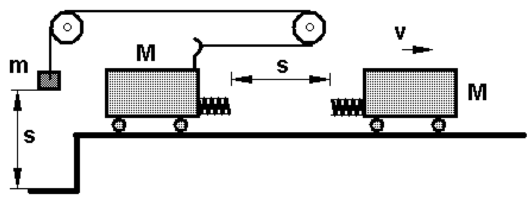

Im gezeigten Zylinder mit dem Kolben in den 2 Positionen (1) und (2) ist Stickstoff eingeschlossen. Der Innendurchmesser des Zylinders ist $d = 5.0\,cm$, die Innenlänge in der Position (1) ist $s_1 = 10.0\,cm$. In dieser Position herrscht ein Innendruck von $1.0\,bar$ und eine Temperatur von $18.0^o\,C$.

Der Kolben ist gegen aussen stark isoliert, der Zylinder jedoch nicht. Er ist aus Kupfer.

(a) Der Zylinder mit arretiertem, also nicht beweglichem Kolben wird nun in kochendes Wasser von $100^o\,C$ gelegt. Berechne den sich dabei einstellenden Innendruck im Zylinder, wenn das Gas die Temperatur des Wassers angenommen hat.

(b) Jetzt wird der Kolben entriegelt, so dass er sich bewegen kann. Er wird gleichzeitig so positioniert, dass er aus dem Wasser ragt. Aussen am Kolben herrscht ein Druck von $1\,bar$, der sich jetzt auch innen einstellt, da sich der Kolben bewegen kann. Die Temperatur im Inneren bleibt jedoch die Wassertemperatur. Berechne $s_2$.

**Probl. 5** **(12 Korrekturpunkte)**




Die Versuchsvorrichtung im Bild zeigt zwei Wagen mit den Massen von je $M = 5\,kg$. An den Wagen sind Federn angebracht, so dass die Stösse elastisch sind. Über Umlenkrollen ist der eine Wagen mit einer Masse $m = 2\,kg$ verbunden, welche an einem Seil $s = 2.00\,m$ über dem Boden schwebt.

Wenn man diesen Wagen rollen lässt, so klinkt das Seil am Wagen eine äusserst minime Zeitspanne vor dem Moment aus, zu welchem $m$ auf dem Boden auftrifft. Unmittelbar danach stösst der genannte Wagen mit dem zweiten Wagen elastisch zusammen.

(a) Berechne die Zeit $t$ welche vergeht, bis $m$ auf den Boden auftrifft.
(b) Berechne die kinetische Energie von $m$ beim Auftreffen auf dem Boden.
(c) Berechne die Geschwindigkeit des zweiten Wagens unmittelbar nach dem Stoss.
(d) Berechne die kinetische Energie des zweiten Wagens unmittelbar nach dem Stoss.

**Probl. 6** **(18 Korrekturpunkte)**

**Unabhängige Aufgaben:**

(a) Eine Masse $m = 1.00\,kg$ fällt aus $1\,m$ Höhe in Achsenrichtung auf einen Nagel, welcher aus einem Brett genügend weit herausragt. Nach dem Aufschlag ist der Nagel um $2.0\,cm$ tiefer ins Brett eingedrungen. Welche mittlere Kraft hat hier maximal auf den Nagel gewirkt, wenn die fallende Masse auf der Länge dieser $2.0\,cm$ auf $v = 0\,m/s$ verzögert worden ist?
(b) Welche Stromstärke ist bei einer Spannung von $230\,V$ am Tauchsieder mindestens notwendig, um einen Liter Wasser von $20^o\,C$ innerhalb einer halben Minute gerade zum Kochen ($100^o\,C$) zu bringen?
(c) Ein Satellit mit der Masse $m = 892\,kg$ hat eine Umlaufzeit um die Erde von $6.4\,Stunden$. Wie hoch über den Meeresniveau kreist der Satellit, wenn seine Bahn als kreisförmig angenommen wird?
(d) Mit einer Stimmgabel wird in einem horizontalen Rohr (in Luft) eine stehende Welle erzeugt, welche an den Orten der Bäuche Mehl aufwirbelt. Man misst so einen Knotenabstand von $s = 25\,cm$. Welche Frequenz hat die Stimmgabel? ($v_{Schall} \approx 337\,m/s$.)
(e) In Fuente del Mar zeigt eine Temperaturmeßserie an einer Oberfläche die Funktion $\vartheta(t, \vartheta_1, \vartheta_2) = \vartheta_1 + \vartheta_2\,\sin(\frac{2\pi\,t}{24})$, $\vartheta_1 = 20.5^o\,C \pm 0.3^o\,C$, $\vartheta_2 = 2.6^o\,C \pm 0.3^o\,C$. Die Zeit $t$ in Stunden wurde mit Hilfe von Mittelwerten ermittelt. Man hat den Standardfehler von $\pm 1\,h = \pm 1\,Std.$ Angenäherter Fehler $\Delta\vartheta$ für $t = 18\,h \pm 1\,h = ?$ — Kommentar?
(f) In einen Brunnen, der in $1\,m$ Wassertiefe eine horizontale Ausflussöffnung hat, fliesst durch eine Röhre ständig Wasser nach. Der Röhrendurchmesser ist gleich dem Ausflusslochdurchmesser. Wie gross muss die Wassergeschwindigkeit in der Einflussröhre oben mindestens sein, damit die Wasserhöhe im Brunnen nicht abnimmt?

— ENDE —

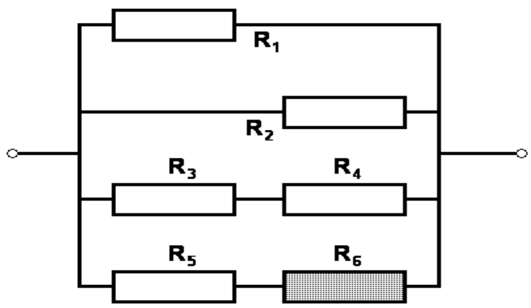
Haute école spécialisée bernoise, architecture, bois et génie civil
Filière bachelor technique du bois, Bienne 17.06.2010

## 2.64 Examen de module en physique 2010 Classes bachelor bois

*Bonne chance !*

**Tous les problèmes partiels d'un problème donnent le même nombre de points de correction.**

**Probl. 1** **(15 points ce correction)**




Soit donné un montage de résistances comme on voit dans l'image. $R_6$ est entre $0\,\Omega$ et infini (déconnecté). Il vaut:

$$R_1 \pm \Delta R_1 = R_2 \pm \Delta R_2 = R_3 \pm \Delta R_3 = R_5 \pm \Delta R_5 = 2.00\,\Omega \pm 0.05\,\Omega,$$
$$R_4 \pm \Delta R_4 = 10.00\,\Omega \pm 0.15\,\Omega.$$

(a) Quelle est la valeur de la résistance totale $R_{total}$ pour $R_6 \pm \Delta R_6 = R_4 \pm \Delta R_4$?

(b) Calculer l'erreur possible (tolérance) $\Delta R_{total}$.

(c) Quelle est la valeur de $R_6$ pour laquelle $R_{total}$ devient minimale? ($R_{total} = ?$)

(d) Quelle est la valeur de $R_6$ pour laquelle $R_{total}$ devient maximale? ($R_{total} = ?$)

(e) Est–ce qu'on peut choisir $R_6$ de façon que $R_{total} = 2.8\,\Omega$? Si celà est possible, quelle valeur est–ce qu'on doit choisir pour $R_6$?

**Probl. 2** **(9 points ce correction)**

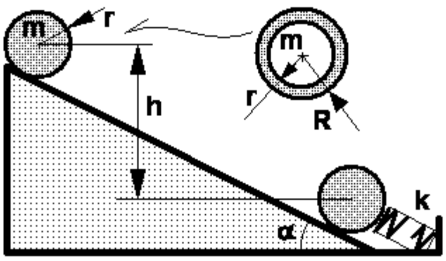
À l'occasion du travail des bûcherons dans le Far West, un ouvrier découvre un grand, bel oiseau qui est assis en haut sur un arbre qu'on va abattre. Un ouvrier aimerait prendre cet oiseau à la maison et voudrait le faire empailler selon la coutume de son grand–père. Ainsi il décide de tirer sur l'oiseau. Avec son arme de petit calibre, il le rate de peu. Il a appliqué un projectile qui a une masse de $2.6\,g$. L'arme permet une vitesse initiale de $340\,m/s$. L'angle de d'inclinaison est $45^o$, mesuré de l'horizontale. Ici, la résistance de l'air est à négliger.

(a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile au dessus de l'horizontale si on suppose qu' on peut calculer avec $g = 9.81\,m/s^2$ ?

(b) La région habitée la plus proche est éloignée de $20\,km$. A quelle distance horizontale de la place de tir le projectile entre–t–il dans la terre?

(c) Quelle est la valeur de l'énergie du projectile au moment où il touche le sol?

**Probl. 3** **(15 points ce correction)**




Un corps cylindrique de la masse $m = 1\,kg$ avec le rayon $r = 2\,cm$ roule vers le bas d'une plaine oblique sans glisser. A cette occasion, la hauteur par rappport au sol se réduit de $h = 1.5\,m$. L'angle $\alpha$ d'inclination de la plaine est $30^o$. Pour un cylindre plein, le moment d'inertie est $J = \frac{1}{2}\,m\,r^2$.

(a) Calculer l'énergie de rotation du cylindre au moment de frapper le bas.

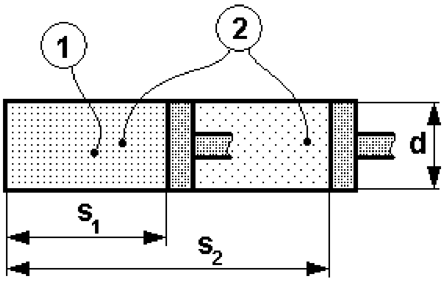
(b) Calculer le nombre de tours (tours par minute) au moment de frapper le bas.

(c) Calculer le temps du départ jusqu'à l'arrivée.

(d) Au moment de frapper le sol, l'énergie de rotation est "annihilée" par le frottement. Avec l'énergie cinétique cependant un ressort de compression est tendu. Calculer la constante du ressort si un ressort d'une longueur de $20\,cm$ est raccourci de $4\,cm$.

(e) Calculer l'énergie de rotation au moment de frapper le bas, si le cylindre est remplacé par un cylindre vide au diamètre intérieur $r = 2\,cm$ et à la masse $m = 1\,kg$.

**Probl. 4** **(6 points ce correction)**



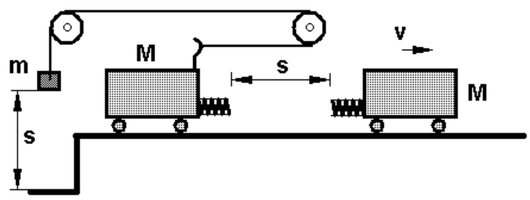

Dans le cylindre montré avec le piston dans les 2 positions (1) et (2) se trouve de l'azote. Le diamètre intérieur du cylindre est $d = 5.0\,cm$, la longueur intérieure dans la position (1) est $s_1 = 10.0\,cm$. Dans cette position il y a une pression intérieure de $1.0\,bar$ et une température de $18.0^o\,C$.

Vers l'extérieur, le piston est fortement isolé, le cylindre cependant ne l'est pas. Il est en cuivre.

(a) Le cylindre avec le piston arrêté, ç.v.d. pas mobile, est mis dans de l'eau bouillante de $100^o\,C$. Calculer la pression intérieure du cylindre quand le gaz aura atteint la température de l'eau.

(b) Maintenant le piston est déverrouillé pour qu'il puisse bouger. Il est positionné de façon qu'il émerge de l'eau. Ainsi on a une pression de $1\,bar$ sur le piston, pression qui s'établit aussi à l'intérieur du cylindre, parce que le piston peut bouger. La température à l'intérieur cependant reste la température d'eau. Calculer $s_2$.

**Probl. 5** **(12 points ce correction)**




Dans l'image, le dispositif d'expériences montre deux voitures avec des masses de $M = 5\,kg$ par voiture. Aux voitures on a placés des ressorts pour que les coups (joints) soient élastiques.

L'une des voiture est connectée par des galets de détournement avec une masse $m = 2\,kg$, qui est suspendue à un cordage $s = 2.00\,m$ au dessus du sol. Si on fait rouler cette voiture, le cordage se détache de la voiture un instant minime avant le moment où $m$ tombe sur le sol. Immédiatement après cela, la voiture en question heurte de façon élastique la deuxième voiture.

(a) Calculer le temps $t$ qui s'écoule jusqu'à ce que $m$ tombe sur le sol.

(b) Calculer l'énergie cinétique de $m$ au moment que $m$ frappe le sol.

(c) Calculer la vitesse de la deuxième voiture immédiatement après le choc.

(d) Calcule l'énergie cinétique de la deuxième voiture immédiatement après le choc.

**Probl. 6** **(18 points ce correction)**

**Quelques problèmes indépendants:**

(a) Une masse $m = 1.00\,kg$ tombe de la hauteur d'$1\,m$ sur un clou dans la direction de l'axe. Le clou dépasse suffisamment la planche dans laquelle il est planté. Après le heurt, le clou a encore pénétré de $2.0\,cm$ dans la planche. Quelle force moyenne maximale a fait effet sur le clou si la masse tombante a été retardée sur $2.0\,cm$ à $v = 0\,m/s$?

(b) Quelle intensité du courant est au moins nécessaire à une tension de $230\,V$ au chauffe-liquide pour faire bouillir ($100^o\,C$) un litre d'eau de $20^o\,C$ dans une demi–minute?

(c) Un satellite avec la masse $m = 892\,kg$ a une période autour de la terre de $6.4\,heures$. A quelle hauteur au–dessus du niveau de la mer est–ce que le satellite tourne, si l'orbite est regardée comme circulaire?

(d) Dans un tube horizontal (dans l'air) on produit une onde stagnante à l'aide d'un diapason. L'onde soulève de la farine aux lieux des bombements. Ainsi on mesure un espace de noeud de $s = 25\,cm$. Quelle est la fréquence du diapason? ($v_{son} \approx 337\,m/s$.)

(e) A Fuente del Mar, une série de mesurements de température à une surface mène à la fonction $\vartheta(t, \vartheta_1, \vartheta_2) = \vartheta_1 + \vartheta_2\,\sin(\frac{2\pi\,t}{24})$, $\vartheta_1 = 20.5^o\,C \pm 0.3^o\,C$, $\vartheta_2 = 2.6^o\,C \pm 0.3^o\,C$. Le temps $t$ (en heures) a été déterminée à l'aide de moyennes. On a l'erreur standard de $\pm 1\,h$. Calculer l'erreur approchée pour $t = 18\,h \pm 1\,h$. — Commentaire?

(f) Dans une fontaine, l'eau coule constamment par une conduite d'en haut. La fontaine a à $1\,m$ de profondeur un trou d'écoulement horizontal. La conduite et le trou d'écoulement ont le même diamètre. Quelle est la vitesse nécessaire de l'eau qu'il faut avoir dans la conduite de l'afflux afin que la hauteur de l'eau ne diminue pas dans la fontaine?

— FIN —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,

15.09.2010

## 2.65 Modulprüfung in Mathematik 2010 Klasse B 09 / B1

*Viel Glück !*

**Erwartet werden die Lösungen von etwa 4 bis 5 Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte (je 3).**

**Probl. 1** **(27 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(e^{2x} - 1)}, \quad I = D_f = [-5, 5].$$

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen im Intervall $I$.

(b) Bestimme den Steigungswinkel des Graphen für $x = -1$.

(c) Bestimme Nullstellen und Polstellen im Intervall $I$.

(d) Bestimme rechnerisch die Extremwertstellen im Intervall $I$.

(e) Bestimme rechnerisch die Wendepunkte im Intervall $I$.

(f) Bestimme die Grenzwerte von $f(x)$ für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

(g) Bestimme numerisch die Approximation von $f$ durch das Taylorpolynom $p_{3,-3}(x)$ vom Grade 3 mit dem Zentrum $x_0 = -3$.

(h) Berechne damit numerisch $A_1 = \int\limits_{-4}^{-2} p_{3,-3}(x)\,dx$.

(i) Sei $A_2 = \int\limits_{-4}^{-2} f(x)\,dx$. Ermittle die ersten 4 Ziffern von $d = |A_2 - A_1|$.

**Probl. 2** **(9 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 1 + \sin(x+y) \\ f_2(x,y) &= 1 + \sin(x\,y) \\ f_3(x,y) &= 1 + \sin(x) + \sin(y) \\ f_4(x,y) &= 1 + \sin(x)\,\sin(y) \end{aligned}$$

(a) Ermittle die 3D–Graphen und entscheide, welche Funktion das beste Modell einer Eierschachtel ergibt. Entscheide ebenso, welche Funktion das beste Modell für Wellblech ausmacht.

(b) Berechne $V_1 = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} f_3(x,\,y)\,dx\,dy$ und $V_2 = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} f_4(x,\,y)\,dx\,dy$. Entscheide damit, ob $V_1$ oder $V_2$ das grössere Volumen ist.

(c) Berechne für beide Funktionen beim Wert $x = 0$ die Weglänge auf der Funktionsfläche längs der $y$–Achse von $y_1 = -2\pi$ bis $y_2 = +2\pi$. Welche Weglänge ist grösser?

**Probl. 3** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $h(x, r) = \sqrt{100 - x^2} - r$ über $I = [6, -6]$. Lässt man $h(x, r)$ über $I$ um die $x$–Achse rotieren, so erhält man bei geschickter Wahl von $r$ eine Säule. Stellt man diese Säule senkrecht, so bemerkt man, dass sie in der Mitte am dicksten und an den Enden am dünnsten ist, was sicher bei dicken Leuten zu Diskussionen über den rechten Geschmack Anlass gibt. ($r$ ist im Moment Parameter.)

(a) Skizziere die Säule für $r = 7$ und für $r = 8$. Was stellt man fest?

(b) Sei $A(r)$ der Flächeninhalt der Grund– oder Deckfläche, falls die Säule senkrecht steht. Das Volumen $V(r)$ kann als Mass für ihr Gewicht und $q(r) = V(r)/A(r)$ als Mass für den Gewichtsdruck auf die Grundfläche interpretiert werden. Berechne $q(7)$ sowie $q(8)$.

(c) Berechne dasjenige $r$, für welches $q(r) = 25$ gilt, falls das möglich ist.

(d) Bestimme den Oberflächeninhalt der Säule ohne die Grund– und Deckfläche für $r = 7$.

**Probl. 4** **(21 Punkte)**

Der Ursprung $O$ und die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ bestimmen die Ebene $\Phi$.

Dazu sei $P = P(-1, 2, 3)$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix $S$ für die Spiegelung an $\Phi$.

(b) Spiegele damit $P$, d.h. berechne den Bildpunkt $P_1$.

(c) Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = \dfrac{\pi}{5}$ in der Grundebene (um die $z$–Achse).

(d) Drehe damit $P_1$ um $O$, d.h. berechne den Bildpunkt $P_2$.

(e) Spiegele den Punkt $P_2$ mittels $S$ zurück, d.h. berechne den Bildpunkt $P_3$.

(f) Konstruiere eine Projektionsmatrix, mit der ein Punkt auf $\Phi$ projiziert werden kann. (Man überlege sich dazu, was die Projektion mit der Spiegelung zu tun hat und wie man die Eigenwerte der Speigelungsmatrix abändern müsste, um eine Projektion zu erhalten.)

(g) $P_4$ sei die Projektion von $P_3$. Bereche $P_4$.

**Probl. 5** **(27 Punkte)**

Die drei Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ werden in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix $A$ zusammengefasst.
Ebenso fasst man die Vektoren $\vec{b}_1 = 2 \cdot \vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix $B$ zusammen.

(a) Berechne die Eigenwerte von $A$.

(b) Berechne die Eigenwerte von $B$.

(c) Gibt es zwischen den Eigenwerten der beiden Matrizen Gemeinsamkeiten? Falls ja: Welche?

(d) Gibt es zwischen den Eigenvektoren der beiden Matrizen Gemeinsamkeiten? Falls ja: Welche? (Nummerierung beachten, dezimal!)

(e) Berechne die Eigenwerte von $A \cdot B$ und auch diejenigen von $B \cdot A$.

(f) Berechne die Summen der Eigenwerte von $A$, $B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob irgendwo ein Zusammenhang besteht.

(g) Berechne die Produkte der Eigenwerte von $A$, $B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob irgendwo ein Zusammenhang besteht.

(h) Berechne die Determinanten von $A$, $B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob ein Zusammenhang zu der vorhergehenden Teilaufgabe besteht.

(i) Gegeben ist der Punkt $Q(0, -2, 2)$. Sei $\overrightarrow{OP_1} = A \cdot \overrightarrow{OQ}$ und $\overrightarrow{OP_2} = B \cdot \overrightarrow{OQ}$. Berechne $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$. Erkläre das Resultat.

**Probl. 6** **(4 unabhängige Aufgaben, 24 Punkte)**

(a) Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär seien:

$$B \cdot (B + X) \cdot B + B = B \cdot B^T + E - B^{-1}$$

(b) $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i. Berechne $U_1^2$, $U_1^3$, $U_1^4$. Was fällt auf?

ii. Berechne $U_1^2 \cdot U_1^2$, $U_1^3 \cdot U_1$ und $U_1 \cdot U_1^4$. Was fällt auf?

(c) Gegeben sind die Gleichungssysteme $U_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ und $U_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

i. Untersuche, ob eines der beiden Systeme lösbar ist und berechne dann allenfalls die Lösung(en).
ii. Berechne die Ordnung (= Dimension(Urbildraum)) der beiden Systeme.
iii. Berechne in etwaigen Fällen, dann wenn Lösungen vorhanden sind, die Dimension des Lösungsraumes (=Dimension(Kern)).
iv. Berechne den Rang der Matrix $U_2$.
(*Hinweis:* Den Rang kann man entweder direkt berechen. Man kann aber auch obige Resultate zur Hilfe nehmen und den Rangsatz anwenden.)

(d) Gegeben sind zwei Geraden:

$$g_1: \vec{v_1}(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{v_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schneiden sie sich? — Berechne ihren Abstand, falls sie sich nicht schneiden.

**Probl. 7** **(Zusatzaufgabe, 18 Punkte)**

Durch $A = A(3; 1; 4)$ ist die Achse $\overline{OA}$ gegeben. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Dazu kennt man noch $P_1 = P_1(2; 0; 4)$.

(a) Wähle den Vektor $\vec{b} = \vec{e_1}$ und konstuiere mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ sowie $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{c}$ zwei Vektoren, welche senkrecht auf $\vec{a}$ stehen. Berechne damit die Einheitsvektoren $\vec{e}_a$, $\vec{e}_c$, $\vec{e}_d$ für die Richtungen $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, numerisch und schreibe danach die Resultate so auf, dass sie beim Korrigieren sofort sichtbar sind.

(b) Konstruiere eine Matrix $M$, welche $\vec{e_1}$ in $\vec{e}_a$ abbildet und $\vec{e_2}$ in $\vec{e}_c$ sowie $\vec{e_3}$ in $\vec{e}_d$.

(c) Bilde mit Hilfe von $M^{-1}$ den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1}$ in $\overrightarrow{OP'}_1$ ab.

(d) Konstruiere zwei Matrizen, welche $\overrightarrow{OP'}_1$ um die $\vec{e_1}$–Achse (mit Blick Richtung $O$) in $\overrightarrow{OP'}_2$ um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und $\overrightarrow{OP'}_2$ um $\frac{2\pi}{3}$ in $\overrightarrow{OP'}_3$ drehen.

(e) Bilde $\overrightarrow{OP'}_2$ und $\overrightarrow{OP'}_3$ wieder mit $M$ zurück ab in $\overrightarrow{OP_2}$ und $\overrightarrow{OP_3}$. Damit erhält man eine Dreieckspyramide $OP_1P_2P_3$ mit der Spitze in $O$. Berechne $P_2$ und $P_3$.

(f) Berechne das Volumen der Pyramide, falls es existiert.

— ENDE —

**Allgemeine Bedingungen zur folgenden MP:**

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's usw. nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind in der Regel zwölf Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen. Andernfalls gelten die angegebenen Punktezahlen.
- Mittleres Richtziel: Wenn an einer vollen Prüfung von zwei Stunden mehr als vier grössere Aufgaben mit zwölf oder mehr Punkten gegeben sind, sollten mindestens vier solche Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollen.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf Donnerstag 03. 02. 2011

## 2.66 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp09 / Mp2

*Viel Glück !*

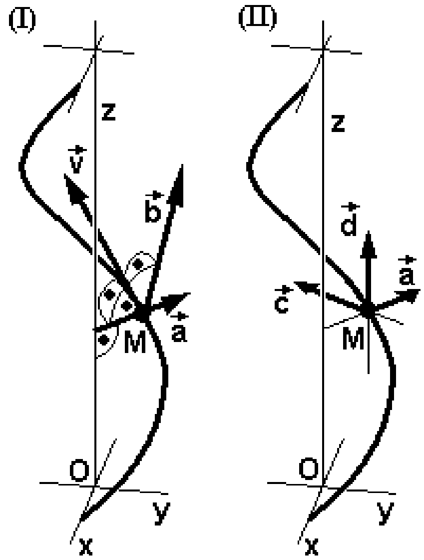
**Löse folgende Aufgaben!** (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

**Probl. 1** **(12 Punkte)**

**Volumen von Schraubenlinienkörpern:**

Gegeben ist eine Schraubenlinie

$$\vec{s} = \vec{s}(t) = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r_0 \cos(t) \\ r_0 \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\ 1].$$




Diese Schraubenlinie verläuft auf einem Zylinder mit der Radius $r_0$. Daher ist der in den Skizzen gezeigte Vektor $\vec{a}$ senkrecht auf der Zylindermantelfläche und somit auf der Schraubenlinie. $\vec{d}$ ist parallel zur $z$–Achse. Die normierten Vektoren $\vec{v},\ \vec{a},\ \vec{b}$ bzw. $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d}$ bilden ein begleitendes Dreibein paarweise rechtwinkliger Vektoren (ONS).

Weiter ist $\vec{s} = \vec{s}(t) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$ der Ortsvektor von $M(t)$. $\vec{v} = \vec{v}(t)$ ist der Tangentenvektor an die Schraubenlinie in $M(t)$.

Weiter sei $r = r(t) := r_0\,(1 - \dfrac{t}{2\,\pi})$.

**Im Falle (I)** wird durch $\vec{k_1}(t,\ \varphi) = r(t)(\vec{a(t)}\,\cos\varphi + \vec{b(t)}\,\sin\varphi)$ ein auf der Kurve senkrecht stehender Kreis definiert, der zusammen mit $\vec{s(t)}$ eine in einen Spitz auslaufende Fläche $\vec{f_1}(t,\ \varphi)$ im Raum ergibt: $\vec{f_1}(t,\ \varphi) = \vec{s}(t) + \vec{k_1}(t,\ \varphi)$.

**Im Falle (II)** wird durch $\vec{k_2}(t,\ \varphi) = r(t)(\vec{a(t)}\,\cos\varphi + \vec{c(t)}\,\sin\varphi)$ ein horizontaler Kreis deniniert, der zusammen mit $\vec{s(t)}$ einen in einen Spitz auslaufende Fläche $\vec{f_2}(t,\ \varphi)$ im Raum ergibt: $\vec{f_2}(t,\ \varphi) = \vec{s}(t) + t,\ \vec{k_2}(\varphi)$.

(a) Skizziere die beiden durch die Flächen definierten Körper. (3 Punkte)

(b) Berechne das durch $f_1$ definierte Volumen $V_1$. (3 Punkte)

(c) Berechne das durch $f_2$ definierte Volumen $V_2$. (3 Punkte)

(d) Berechne das Kegelvolumen $V_3$, welches durch denselben Grundkreis wie bei $f_2$ und der Kegelhöhe $2\,\pi$ (Ganghöhe) gegeben ist. Berechne daraus das Verhältnis $V_3 : V_2$. (3 Punkte)

**Probl. 2** **(21 Punkte)**

**Laplace–Transformationen und Rücktransformationen:**

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \cos(2\,t) + \cosh(3\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(b) $f(t) = e^{t-8}\, e^{-2\,t+3} \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(c) $f(t) = e^{-t}\,(\cos(t) - 2) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(d) $f(t) = (-t)^3 + \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(e) $Y(s) = \dfrac{4\,s}{2\,s^2 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(f) $Y(s) = \dfrac{s}{s^2 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(g) $Y(s) = 1 + \dfrac{2}{s} + \dfrac{-2}{s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

**Probl. 3** **(9 Punkte)**

**Differentialgleichung:**

Gegeben ist die Differentialgleichung $\quad y'(t) = -y(t) + \delta(t) + a\,\sin(t), \;\; y(1) = 1.$

(a) Sei in obiger Gleichung $y(t,\,a) := y(t)$. Setze $a = 1$. Berechne $y(t,\,1) := y_1(t)$. (3 Punkte)

(b) Skizziere die eben gefundene Funktion über dem Bereich $D = [0, 2]$ und berechne $y(0.5)$ sowie $y(2)$. (3 Punkte)

(c) Bestimme die Funktion $z(a) := y(2, a)$ und skizziere diese Funktion in einem charakteristischen Bereich. (3 Punkte)

**Probl. 4** **(6 Punkte)**

**Differentialgleichung:**

Löse die folgende Differentialgleichung mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$y''(t) - y'(t) - 2\,y(t) = \frac{1}{2}\,cosh(t), \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1.$$

**Probl. 5** **(6 Punkte)**

**Differentialgleichungssystem:**

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) - z'(t) - z(t) &= 0 \\ y'(t) + y(t) + z'(t) + z(t) &= e^{-t} \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \in [-0.5, 3]$.

**Probl. 6** **(6 Punkte)**

**Differentialgleichung:**

$y'(t) = y(t) \cdot e^{-t} + e^{-2t}, \ \ y(0) = 0.$

(a) Berechne $y(t) = y_{exakt}(t)$, falls möglich. (3 Punkte)

(b) Berechne $y(1.75) := y_{Euler}(1.75)$ numerisch nach Euler. Schrittweite $\Delta x = 0.5$. Berechne damit die Abweichung $|y_{Euler}(1.75) - y_{exakt}(1.75)|$ (3 Punkte)

**Probl. 7** **(6 Punkte)**

**Differentialgleichung allgemein:**

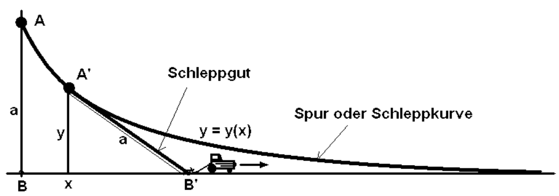
$y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = 1 + a \cdot t, \ \ y(0) = 0.$

(a) Berechne die allgemeine Lösung $y(t,\, a)$, falls möglich mit Hilfe des charakteristischen Polynoms. (5 Punkte)

(b) Von vievielen Parametern oder Variablen hängt die Lösung ab?. (1 Punkte)

**Probl. 8** **(6 Punkte)**

**Praktisches Beispiel:**




Gegeben ist eine Schleppkurve (Bild). Ein Massenpunkt $A$ ist hier an einem Seil der Länge $a$ befestigt. $A$ liegt anfangs auf der $y$–Achse. Das freie Seilende $B$ befindet sich im Koordinatenursprung. Durch die Bewegung des Fahrzeugs wird das Seilende $B$ der positiven $x$-Achse entlang geführt. Dabei beschreibt der hinterher gezogene Punkt $A$ die Schleppkurve. Vorausgesetzt ist Gleitreibung.

(a) Modelliere die geometrische Situation durch eine Differentialgleichung:

$$y\,'(x) = \ldots = ?$$

(3 Punkte)

(b) Überprüfe, welche der folgenden Ausdrücke Lösungen der Differentialgleichung sind:

$$(a) \qquad y(x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} \qquad (b) \qquad y(t) = \frac{a}{\cosh(t)}$$

$$(c)\ x(y) = a\,\ln(a + \sqrt{a^2 - y^2}) - a\,\ln(y) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

(3 Punkte)

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, Donnerstag 03. 02. 2011

## 2.67 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp09 / Mp 2

*Viel Glück !*

**Löse folgende Aufgaben!** (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

**Probl. 1** **(9 Punkte)**

**Entscheidungsproblem:**

Von einem neuen Flugzeugtyp ist eben bekannt geworden, dass bei 5 % der Maschinen bei einem Flug über Calamita (ein „Eisenberg“, dessen Erz ein Metallgehalt von über 70 Volumenprozente aufweist), die Funkverbindungen ausfallen und die Sender im Flugzeug ca. eine halbe Stunde lang Notsignale aussenden. Die Chance, dass es sich bei einem Flugzeug, welches Notsignale aussendet, um ein terroristischer Angriff handeln könnte und dass das Sendesystem manipuliert werden konnte, wird von der Herstellerfirma der Software mit 0.1 % angegeben. Nun fliegt ein solches Flugzeug, das Notsignale aussendet, aus Richtung Calamita etwas zu hoch gegen die nächst gelegene Flughafenzone, hinter der sich ein Spital mit ca. 100 Menschen befindet. Im Flugzeug sitzen vermutlich 10 Menschen. Man hat 3 Minuten zur Entscheidung für einen Abschuss. In dieser Zeit kann das Spital nicht evakuiert werden.

(a) Berechne hier die Wahrscheinlichkeit eines terroristischen Angriffs in der beschreibenen Situation. (6 Punkte)

(b) Begründe einen etwaigen Abschussentscheid oder den Gegenentscheid. (3 Punkte)

**Probl. 2** **(9 Punkte)**

**Personal- und Montageprobleme:**

(a) In den nächsten Ferien könnte es eng werden in der Fabrikation. Von den 128 Mitarbeitern mieten 89 einen Parkplatz und besitzen daher ein Auto. Die andern erscheinen mit dem Velo zur Arbeit. Unser Betrieb hat es sich an Weihnachten zur Ehre gemacht, jedem Familienvater, der schulpflichtige Kinder hat, einen Velohelm zu schenken. So sind 62 Helme verschenkt worden. Fahrgemeinschaften bei den Autofahrern gibt es wegen der fliessenden Arbeitszeit keine. Die Autofahrer haben sich verpflichtet, nach Arbeitsschluss jeweils noch Waren für den Direktverkauf in ihrer Umgebung auszutragen, welche bei hohen Temperaturen rege bestellt werden. Genaue Angaben über die privaten Belange der Mitarbeiter gibt es sonst keine. Berechne falls möglich die Chance, dass ein Mitarbeiter während den Sommerschulferien nicht in den Urlaub reist unter der Bedingung, dass er Autofahrer ist und daher nach der Arbeitszeit noch Ware ausliefern kann. (3 Punkte)

(b) Ein Mechaniker entfernt an einer Maschine 7 Schraubenmuttern, alles Muttern mit $M10$–Gewinden, wie der denkt. Als er dann die Muttern nach dem Mitagessen genau betrachtet stellt er fest, dass 3 davon selbstsichernde Muttern mit eingelassenem Kunststoffsicherungsring sind. Eine hat sogar eine Nut eingefräst, wodurch sie nach dem Einbau in das Gehäuse von oben durch eine Rohröffnung mit dem Schraubenzieher gelocker und wieder angezogen werden kann. Die Montage des Gehäuses benötigt drei Stunden. Was ist die Chance, die Muttern zufällig richtig wieder zu montieren? (3 Punkte)

(c) Auf wieviele Arten kann bei einer Belegschaft von 14 Personen an 5 Mitarbeiter ein Bonus ausbezahlt werde, wenn es erlaubt ist, dass ein Mitarbeiter maximal 2 Boni kassieren kann und daher weniger als 5 Mitarbeiter etwas bekommen? (3 Punkte)

**Probl. 3** **(9 Punkte)**

**Qualitätsprognose:**

(a) Wie gross ist die Chance, dass aus einer Lieferung von 28 Hochleistungspumpen 6 Pumpen, welche in einem unbewohnten, wettergeplagten Hochtal in Punkern verschlossen eingebaut werden, eine Dauerbetriebsdauer von mehr als 1 Jahr haben werden, wenn man durch Versuche herausgefunden hat, dass von 10 Pumpen nur 3 Stück diese Qualität aufgewiesen haben. (6 Punkte)

(b) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung der zugehörigen Verteilung. (3 Punkte)

**Probl. 4** **(9 Punkte)**

**Regression:**

Gegeben sind die Fakultäten $k!$ der Zahlen von $k = 1$ bis $k = 12$ und damit die Punkte $(x(k),\, y(k)) = (k,\, k!)$. Es ist sofot klar, dass diese Punkte nicht auf einer Geraden liegen können.

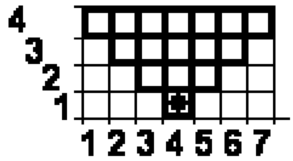
(a) Versuche daher herauszufinden, ob eher die Punkte $(x(k),\, y(k)) = (k,\, \ln(k!))$ auf einer Geraden liegen. Berechne dazu die zugehörige Funktion der Regressionsgeraden $y_1(x) = a_1\, x + b_1$. (3 Punkte)

(b) Versuche daher herauszufinden, ob vielleicht vielmehr die Punkte $(x(k),\, y(k)) = (k,\, \ln(k!))$ auf einer Parabel liegen. Berechne die zugehörige Funktion der Regressionsparabel $y_2(x) = a_2\, x^2 + b_2\, x + c_2$. (3 Punkte)

(c) Berechne die zugehörigen Fehlerquadratsummen $s_1 = \sum\limits_{k=1}^{12} ((\ln(k!) - y_1(k))^2$ und auch $s_2 = \sum\limits_{k=1}^{12} ((\ln(k!) - y_2(k))^2$ und beurteile, ob man mit der quadratischen Regression den Wert von $s_1$ halbieren kann. (3 Punkte)

**Probl. 5** **(6 Punkte)**

**Qualitätskontrolle:**




In einem quadratischen Raster der Grösse $7\times 4$ werden zufällig die Pixel schwarz oder weiss gefärbt. Was ist die Chance, dass das Pixel mit dem Markierpunkt unten (siehe Skizze, Startpixel **SP**) schwarz ist und sich dabei mindestens eine schwarze Linie vom Punkt **SP** nach oben (im fett dargestellten Bereich) ausbildet, in der immer schwarze Pixel entweder an der horizontalen Kante oder an einer Ecke „oben rechts — unten links“ oder „oben links — unten rechts“ zusammenstossen?

**Probl. 6** **(12 Punkte)**

**Datensätze:**

Gegeben sind zwei Datensätze $M_1$ und $M_2$:

$$M_1 = \{44.0, 50.5, 51.4, 48.9, 52.3, 55.4, 54.5, 57.3, 58.4, 63.3, 65.9, 66.6\}$$

$$M_1 = \{44., 47.5, 47.1, 52.2, 49.9, 50.6, 52.5, 58.3, 58.6, 59.1, 61.8, 64.3\}$$

Dabei handelt es sich um die Temperaturmessungen an zwei gleichen belasteten Wellen am selben Tage etwa alle 15 Minuten nach der selben Startzeit.

(a) Berechne von den beiden Datensätzen jeweils Mittelwert, Median und Standardabweichung. (3 Punkte)

(b) Stelle die Datensätze in einem Box–Whiskers–Plot einander gegenüber. (3 Punkte)

(c) Bestimme zu den Datensätzen jeweils die Regressionsgerade numerisch und zeichne die Daten mit der Gerade je in ein Diagramm ein. (1. Datenelement bei 15 Minuten, Zeit in Minuten.) (3 Punkte)

(d) Beurteile die Bonität oder Güte der Daten unter der Annahme, dass sich eine Welle im Betrieb mit der Zeit vermutlich konstant erwärmen muss. (3 Punkte)

— ENDE —

**Bedingungen:**

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen **Ausschluss von der Prüfung** (0 Punkte) zur Folge. Speziell dürfen **mobile Telefone** und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist **dokumentechtes Schreibgerät** zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne leicht nachvollziehbare **Herleitung** werden nicht akzeptiert. ($\leadsto$ 0 P.)
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die **Abweichung** der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu **unterstreichen**.
- Ungültige Teile sind sauber **durchzustreichen**.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die **Rückseiten** der Schreibblätter müssen **leer** bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung, eigene Notizen), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe" bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Korrekturpunkten möglich. Die Gesamtzahl der erreichten Korrekturpunkte wird anschliessend linear in die nach Reglementen skalierten Normpunkte oder Transferpunkte umgerechnet, welche in die Modulnote einfliessen.
- Die **maximal** mögliche Korrektur–Punktzahl wird auf der Grundlage der maximal erreichten oder der durchschnittlich erreichten Korrektur–Punktzahl definiert.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Holz, Biel, 14.06.2011

## 2.68 Modulprüfung in Physik 2011 Klassen Bachelor Holz

*Viel Glück !*

**Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben in der Regel gleich viele Punkte.**

**Probl. 1** **(6 Korrekturpunkte)**

Für einen neuen Ofentyp hat man in dessen Innerm bezüglich einem von der Herstellerfirma definiertem Koordinatensystem für die Erhitzung des Brennraumbodens empirisch eine Formel gefunden. Die pro Zeiteinheit beim Betrieb erzeugte Wärme (Wärmeleistung) berechnet man bei der Firma nach folgender Art:

$$P(x,\, y) = +C_0 \cdot 2\, e^{-k(x+y)} - C_0 \cdot 0.35, \quad -0.05 \le x \le 1.05, \quad -0.05 \le y \le 1.05$$

$x$ und $y$ sind hier in Dezimeter $[dm]$ einzusetzen. Dabei wird die Einheit $dm$ von dem Term $k = 0.86/dm$ wieder neutralisiert. Daher dürfen wir in der Rechnung die Einheit $dm$ weglassen. $C_0$ (in $[W]$) ist ein Koeffizient, der vom Brennstoff abhängt. Er wird hier nicht numerisch beziffert.

(a) Berechne im Punkt $(x_0 \pm \Delta x,\, y_0 \pm \Delta y) = (1.00 \pm \Delta 0.05, 1.00 \pm \Delta 0.05)$ den Wert $P_0 = P(x_0,\, y_0)$ sowie den linearen Fehler $\Delta P_0$ von $P_0$. Dabei ist das „lineare“ Fehlerfortpflanzungsgesetz zu verwenden.

(b) Berechne den Wert Wärmeleistung $P$ an der Stelle $P(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$. Was ist hier bemerkenswert?

**Probl. 2** **(6 Korrekturpunkte)**

An einem Berghang mit $\alpha = 60^o$ Neigung gegen die Horizontale wird ein Baum gefällt. Ein Lehrling, welcher dabei sein darf, möchte nun wissen, mit welcher Geschwindigkeit die Baumspitze auf den Boden des Abhangs prallt. Die anwesenden Fachleute nennen Erfahrungswerte, doch ein ebenfalls anwesender Ingenieur lässt solche Schätzungen „aus dem hohlen Bauch“ nicht gelten. Mit gewissen vereinfachenden Modellannahmen gelingt es ihm, rechnerische Resultate zu gewinnen. Er trifft dabei die folgenden Annahmen: Vereinfacht hat der Baum eine Zylinderform mit $30\, cm$ Durchmesser und $12\, m$ Länge. Die spezifische Dichte $\rho$ wird zu $0.9\, kg/dm^3$ angenommen. Der Baum steht genau vertikal und wird dann ebenerdig horizontal abgesägt. Darauf fällt er ohne Widerstand. Die Äste werden in diesem einfachen Modell vernachlässigt.
Aufgabe: Rechne die nachfolgend beschriebenen dazu ähnlichen Beispiele durch!

(a) Wie gross ist die Aufprallgeschwindigkeit des oberen Baumendes im einfachen Falle, wo der Waldboden statt geneigt horizontal ist? ($\alpha = 0^o$.) (3 P.)

(b) Wie gross ist die Aufprallgeschwindigkeit des oberen Baumendes in dem Falle, wo der Baum auf einem um $\alpha = 60^o$ gegen die Horizontale geneigten Abhang fällt? (Eine der Varianten nach oben oder unten kann gewählt werden.) (2 P.)

(c) Wie gross ist die Aufprallgeschwindigkeit des oberen Baumendes in dem Falle, wo der Baum nach unten an eine beinahe senkrechte Felswand knallt unter der Annahme, dass der Drehpunkt beim Fallen fix bleibt? (1 P.)

**Probl. 3** **(9 Korrekturpunkte)**

An einem $13.7\,m$ langen lackierten Draht von $1.5\,mm$ Durchmesser misst man einen Widerstand von etwa $(1.00 \pm 0.05)\,\Omega$.

(a) Um welches Material könnte es sich bei dem Draht handeln?

(b) Wie lange muss ein solcher Draht sein, damit eine $10\,A$–Sicherung nicht gleich „durchbrennt", wenn man ihn mit seinen beiden Enden an eine $230\,V$–Steckdose anschliesst? (Man gehe hier von der Voraussetzung aus, dass der Widerstand mit der Temperatur nicht ändert.)

(c) Die folgende Aufgabe lässt sich lösen, wenn man dazu ein geeignetes Gesetz in der mitgebrachten Literatur findet. $\alpha$ ist beim gegebenen Draht der Temperaturkoeffizient für den Widerstand: $\alpha = 6.57 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$, $1\,K \hat{=} 1^o\,C$, $T_0 = 293.16\,K \hat{=} 20^o\,C$. Um wieviel Prozent vom Widerstand $R_0$ bei $20^o\,C$ steigt der Widerstand des Drahtes, wenn sich die Temperatur um $1^o\,C \hat{=} 1\,K$ erhöht und der Widerstand linear von der Temperatur abhängt?

**Probl. 4** **(12 Korrekturpunkte)**

Ein Sprinter, der $100\,m$ in $10\,sec$ schafft, nimmt auf dem $10\,m$ langen horizontalen Sprungbrett eines Sprungturms Anlauf und springt mit seiner vollen Geschwindigkeit von $10\,m/sec$ vom Turm horizontal ab ins Wasser. Das Sprungbrett befindet sich $10\,m$ über der Wasseroberfläche. Daher rechnen wir mit einer Höhe des Schwerpunktes des Sprinters von $0.90\,m$ über dem Sprungbrett.

(a) Wie lange muss das Schwimmbecken bei der über dem Wasser gegebenen Sprungbrettlänge mindestens sein, wenn der Sprinter (Schwerpunkt) auf derselben Bahn wie in der Luft noch maximal $4\,m$ ins Wasser eintaucht und von der Endlage seines Schwerpunkt dazu noch ein Sicherheitsabstand von $4\,m$ bis zum Beckenrand addiert werden muss? (Der Wasserwiderstand ist in der Rechnung zu vernachlässigen.)

(b) Mit welcher Geschwindigkeit taucht der Sprinter bei seinem Sprung ins Wasser ein?

(c) Wieviele Prozent der kinetischen Energie beim Eintauchen stammt aus seiner Eigenleistung infolge seines Sprints, wenn der Mann eine Masse von $75\,kg$ besitzt?

(d) Jemand hat die Idee, vorne neben dem Sprungbrett ein sehr hohes Wasserfass zu installieren, aus dem ganz unten horizontal ein Wasserstrahl austritt. Wie hoch müsste der Wasserstand im Fass sein, damit der Wasserstrahl an derselben Stelle eintaucht wie der Sprinter? (Reibungswiderstände sollen nicht berücksichtigt werden.)

**Probl. 5** **(18 Korrekturpunkte)**

Ein Brückenspringer zeigt auf einer Waage eine Gewichtskraft von $686\,N$ (samt den Kleidern). Seine Körpergrösse beträgt $1.80\,m$. Nun springt er aus dem Stehen an einem Seil gesichert von einer $114.8\,m$ hohen Brücke. Das auf der Höhe der Brücke angebundene Seil zeigt im unbelasteten Zustand eine Länge von $76.8\,m$. Nach dem Sprung aus dem Stehen nähert er sich dem Boden nach einer glaubhaften Schätzung bis auf ca. $6.0\,m$, gemessen ab dem Kopfende des Springers.

(a) Berechne die Geschwindigkeit des Mannes in dem Moment, wo das Seil gerade gestreckt ist unter der Annahme, dass sein Schwerpunkt sich $0.9\,m$ unter dem Seilende befindet und dass der Luftwiderstand vernachlässigbar ist.

(b) Welches ist die kinetische Energie des Mannes in dem Moment, wo sich das Seil gerade zu spannen beginnt?

(c) Wie gross ist die Federkonstante des Seils, wenn es als Feder betrachtet wird?

(d) Berechne den Elastizitätsmodul bei einem Seil von $2\,cm$ Durchmesser.

(e) Welche maximale Zuglast muss das Seil aushalten?

(f) Berechne, falls dies nun möglich ist, die Höhe des Kopfendes (Scheitels) des an den Füssen am Seil hängenden Mannes über dem unten fliessenden Wasser nach dem Sprung im Zustand des Stillstands nach dem Ausschwingen.

**Probl. 6** **(9 Korrekturpunkte)**

Vier Widerstände $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 300\,\Omega$, $R_4 = 400\,\Omega$ sind parallel geschaltet und an einer Spannungsquelle von $230\,V$ angeschlossen.

(a) Berechne den Strom in diesem Stromkreis. Beurteile anschliessend, ob eine $800\,W$–Sicherung diesem Stromkreis standhält — oder ob im anderen Falle vielleicht eine $1000\,W$–Sicherung genügt.

(b) Wie gross muss ein zu $R_1$ in Serie geschalteter Widerstand $R_5$ sein, damit die Leistung im Stromkreis $574\,W$ beträgt?

(c) Kann man einen zu $R_1$ in Serie geschalteten Widerstand $R_5$ derart wählen, dass die Leistung im Stromkreis $570\,W$ beträgt?

**Probl. 7** **(6 Korrekturpunkte)**

Ein Kompressorbehälter hat ein Volumen von $120\,l$. Der Druck aussen und daher auch der Druck im geöffneten Behälter wird zu Beginn (d.h. vor der Kompression) mit $1\,bar$ angegeben. Die Temperatur im Behälter und ebenso die Aussentemperatur beträgt $20^o\,C$. Wir rechnen dabei mit einer Luftdichte von $1.204\,kg/m^3$.
Nun wird durch den Kompressor Luft in den Behälter gedrückt. Am Manometer liest man schliesslich einen Überdruck von $12\,bar$ ab. Das Einfüllen geschieht auf eine langsame Art, so dass die Temperatur konstant bleibt.

(a) Wieviele Liter Luft bei Normaldruck mussten in den Behälter gepresst werden, um diesen Überdruck erreichen zu können?

(b) Wie gross ist die Gewichtskraft der Luft im Behälter?

**Probl. 8** **(4 Korrekturpunkte)**

Trockener Beton hat bei $20^o C$ eine spezifische Wärmekapazität von $0.84\, kJ\, kg^{-1}\, K^{-1}$. Bei trockenem Holz liegt der Wert etwa bei $2.5\, kJ\, kg^{-1}\, K^{-1}$. Dabei liegt Kiesbeton mit einer Dichte von $2.0\, kg/dm^3$ vor und dazu Holz mit einer Dichte von $0.7\, kg/dm^3$. Es soll damit ein Norm–Klotz von $1\, kg$ Masse im Verbund von Beton und Holz fabriziert werden, der die gleiche Dichte wie Wasser hat mit einer spezifischen Wärmekapazität von $1.00\, kJ\, kg^{-1}\, K^{-1}$. %

(a) Berechne, wieviele Masse–Teile in Prozent vom ganzen Klotz bei den vorgegebenen Bedingungen aus Holz und wieviele aus Beton sein müssen. (3 P.)

(b) Beantworte auf der Grundlage des Resultats die Frage, ob es überhaupt möglich ist, einen solchen Norm–Klotz zu konstruieren. (1 P.)

— ENDE —

**Conditions:**

- Tous les problèmes sont à résoudre soi–même. Un comportement qui n'est pas honnête a comme conséquence **l'exclusion** immédiate **de l'examen** (0 points). Spécialement les **téléphones mobiles** et les PDA ne doivent pas être amenés dans la salle d'examen.
- Pour écrire il faut un **moyen ineffaçable**. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.
- On demande une représentation claire et propre de la déduction de la solution avec l'indication des idées et des résultats intermédiaires. Les résultats sans la **déduction** ne sont pas acceptés.
- Lors de l'utilisation de fractions décimales, le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas **différer** de plus de 1%.
- Les résultats sont à **souligner** doublement.
- Les parties non valables sont à **tracer** de manière propre et nette.
- Pour chaque problème, il faut utiliser une nouvelle feuille. Les **versos des feuilles** doivent rester **vides**. Peut-être elles ne seront pas corrigées! ($\leadsto$ 0 p.)
- **Moyens permis:** Dossiers de cours version abrégéé (résumé, notes), livres de formules, calculatrices, papier et écritoire.
- **Points:** Par devoir nommé "problème", un certain nombre de points de correction est possibles. Le nombre total des points de correction possibles est ensuite transféré de façon linéaire d'après l' échelle réglementée dans des points de transfert standardisés qui font partie de la note de module.
- Le nombre des points de correction maximal est calculé sur la base du nombre maximal atteint et aussi du nombre moyen des points atteints.

Haute école spécialisée bernoise, architecture, bois et génie civil
Filière bachelor technique du bois, Bienne 14.06.2011

## 2.69 Examen de module en physique 2011 Classes bachelor bois

*Bonne chance !*

**Tous les problèmes partiels d'un problème donnent le même nombre de points de correction.**

**Probl. 1** **(6 points ce correction)**

Pour un nouveau modèle de four, on a trouvé empiriquement une formule pour le chauffage du fond de la chambre de combustion par rapport à un système de coordonnées défini par l'entreprise. L'entreprise calcule la chaleur produite par unité de temps (donc la puissance thermique) à l'exploitation d'après la manière suivie:

$$P(x,\,y) = +C_0 \cdot 2\,e^{-k(x+y)} - C_0 \cdot 0.35, \quad -0.05 \leq x \leq 1.05, \quad -0.05 \leq y \leq 1.05$$

Ici $x$ et $y$ sont à utiliser en décimètres $[dm]$. L'unité $dm$ est ainsi neutralisée par le terme $k = 0.86/dm$. Par conséquent nous pouvons omettre l'unité $dm$ dans le calcul. $C_0$, dans $[W]$, est un coefficient qui dépend du combustible. Ici, il n'est pas donné numériquement.

(a) Calcule dans le point $(x_0 \pm \Delta x,\, y_0 \pm \Delta y) = (1.00 \pm \Delta 0.05, 1.00 \pm \Delta 0.05)$ la valeur $P_0 = P(x_0,\, y_0)$ ainsi que l'erreur linéaire $\Delta P_0$ de $P_0$. Ici on demande l'application de la loi de propagation "linéaire" des erreurs.

(b) Calculer la valeur de la puissance thermique $P$ à la place $P(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$. Qu'est–ce qui est remarquable ici?

**Probl. 2** **(6 points ce correction)**

À un versant d'une montagne avec une pente (déclivité) de $\alpha = 60^o$ par rapport à l'horizontale, un arbre est abattu. Un apprenti, à qui on a permis d'y assister, voudrait maintenant savoir avec quelle vitesse la pointe de l'arbre heurte le sol de la pente. Les experts présents donnent des valeurs empiriques qu'un ingénieur aussi présent ne laisse pas valoir comme "appréciations spontanées". Avec les suppositions de modèle simplificatrices et certaines, il réussit à gagner des résultats arithmétiques. Il échafaude l'hypothèse suivante: On peut simplifier la forme de l'arbre en cylindre avec $30\,cm$ de diamètre et $12\,m$ de longueur. La densité spécifique $\rho$ est supposée d'être $0.9\,kg/dm^3$. La position d'arbre est exactement verticale. L'arbre est scié à sa base horizontalement. Il tombe sans résistance. Dans ce modèle simple, les branches sont négligées.
Problème: Calculer consécutivement les différents problèmes semblables décrits en bas!

(a) Combien grande est la vitesse d'impact de la pointe de l'arbre dans le cas simple, où le sol de la forêt est horizontal? ($\alpha = 0^o$) (3 p.)

(b) Combien grande est la vitesse d'impact de la pointe de l'arbre dans le cas où l'arbre tombe sur une pente penchée à $\alpha = 60^o$ contre l'horizontale?
(Choisir une des possibilités: Vers le haut ou vers le bas.) (2 p.)

(c) Combien grande est la vitesse d'impact de la pointe de l'arbre dans le cas où l'arbre surplombant une falaise presque verticale tombe vers le bas (le pivot reste fixe pendant le déclin)? (1 p.)

**Probl. 3** **(9 points ce correction)**

À un grand fil métallique laqué d'une longueur de $13.7\,m$ et d'un diamètre de $1.5\,mm$, on mesure une résistance d'environ $(1.00 \pm 0.05)\,\Omega$.

(a) De quel matériau est-ce qu'il pourrait s'agir dans le cas du fil métallique?

(b) Quelle longueur est-ce qu'un tel fil métallique doit avoir afin qu'un fusible de $10\,A$ ne saute pas immédiatement, si on joint les deux bouts du fil à une prise de courant de $230\,V$. (Sous la condition que la résistance ne change pas avec la température.)

(c) On peut résoudre le problème suivant, si on trouve une formule convenable dans la littérature amenée. Au fil métallique donné, $\alpha$ est le coefficient de température pour la résistance: $\alpha = 6.57 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$, $1\,K \hat{=} 1^o\,C$, $T_0 = 293.16\,K \hat{=} 20^o\,C$. A quel pourcentage de la résistance $R_0$ à $20^o\,C$ est–ce que la résistance du fil métallique monte, si la température s'élève de $1^o\,C \hat{=} 1\,K$ et si la résistance dépend de la température de façon linéaire?

**Probl. 4** **(12 points ce correction)**

Un sprinter qui fait $100\,m$ dans $10\,sec$, prend l'élan sur le grand tremplin horizontal de $10\,m$ de longueur d'un plongeoir et saute horizontalement avec sa pleine vitesse de $10\,m/sec$ de la tour dans l'eau. Le tremplin se trouve à $10\,m$ au–dessus de la surface de l'eau. Par conséquent nous calculons avec une hauteur du centre de gravité du sprinter de $0.90\,m$ sur le tremplin.

(a) Quelle longueur est-ce que la piscine doit avoir au moins avec la longueur du tremplin indiquée et si le sprinter (centre de gravité) plonge encore $4\,m$ dans l'eau et s'il faut additionner encore $4\,m$ de distance de sécurité depuis la position finale du centre de gravité jusqu' au bord du bassin? (La résistance de l'eau est à négliger dans le calcul.)

(b) Avec quelle vitesse est–ce que le sprinter plonge dans l'eau après son saut?

(c) Combien pour cent de l'énergie cinétique, lors de l'immersion, provient de son effort personnel à la suite de son sprint si l'homme a une masse de $75\,kg$?

(d) Quelqu'un a l'idée d'installer un tonneau d'eau très haut à côté de la pointe du tremplin à la base duquel sort un rayon d'eau de façon horizontale (niveau tremplin). Quelle hauteur doit avoir le niveau de l'eau dans le tonneau, afin que le rayon d'eau touche l'eau à la même place que le sprinter? (Les résistances de friction ne doivent pas être considérées.)

**Probl. 5** **(18 points ce correction)**

Un sauteur de pont montre sur une balance une force de poids de $686\,N$ (avec les vêtements). Sa taille s'élève à $1.80\,m$. Maintenant, en se tenant debout, il saute sans élan du pont d'une hauteur de $114.8\,m$ assuré par une corde. La corde, attachée à la hauteur du pont, montre non chargée une longueur de $76.8\,m$. Après le saut en position debout, l'homme s'approche du sol jusqu'à environ $6.0\,m$, mesuré du sommet de la tête du sauteur et selon une appréciation crédible.

(a) Calculer la vitesse de l'homme au moment où la corde est exactement allongée sous la supposition que le centre de gravité de l'homme se trouve à $0.9\,m$ sous la fin de la corde et que la résistance de l'air soit négligeable.

(b) Quelle est l'énergie cinétique de l'homme au moment exact où la corde commence à se tendre et à s'allonger?

(c) Combien grande est la constante de la corde si on la considere comme ressort?

(d) Calculer le module d'élasticité d'une corde de $2\,cm$ de diamètre.

(e) Quel charge de traction maximale est–ce que la corde doit tenir (ou supporter)?

(f) Calculer la hauteur du sommet du crâne de l'homme suspendu aux pieds à la corde au–dessus–de l'eau (de la rivière) après le saut à l'arrêt du mouvement (ç.v.d. après cesser d'osciller), si c'est possible.

**Probl. 6** **(9 points ce correction)**

Les quatre résistances $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 300\,\Omega$, $R_4 = 400\,\Omega$ sont branchées de façon parallèle et connectées à une source de tension de $230\,V$.

(a) Calculer le courant dans ce circuit. Juger ensuite si un fusible de $800\,W$ résiste à ce circuit — ou si un fusible de $1000\,W$ suffira peut–être dans l'autre cas.

(b) Combien grande une résistance $R_5$ branchée en série avec $R_1$ doit–elle être, afin que la puissance dans le circuit soit $574\,W$?

(c) Est-ce qu'on peut choisir une résistance $R_5$ branchée en série avec $R_1$ de façon que la puissance mesurée dans le circuit soit $570\,W$?

**Probl. 7** **(6 points ce correction)**

Un réservoir de compresseur contient un volume de $120\,l$ d'air. Ici, on sait qu'au commencement (avant la compression) la pression dehors et aussi dans le réservoir ouvert est de $1\,bar$. La température aussi bien dans le réservoir que dehors est de $20^o\,C$. Nous calculons avec une densité de l'air dehors de $1.204\,kg/m^3$.
Maintenant, à l'aide du compresseur, on presse de l'air dans le réservoir. Au manomètre, on lit une surpression de $12\,bar$. Le processus de remplissage est réalisé de manière lente pour que la température reste constante.

(a) Combien de litres d'air à pression normale ont dû être comprimés dans le réservoir pour pouvoir atteindre cette surpression?

(b) Combien grande est la force de poids de l'air dans le réservoir?

**Probl. 8** **(4 points ce correction)**

Le béton sec à $20^o C$ a une capacité thermique spécifique de $0.84\,kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}$. Quant au bois sec la valeur est environ de $2.5\,kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}$. Ici, on a du béton de gravier avec une densité de $2.0\,kg/dm^3$ et du bois avec une densité de $0.7\,kg/dm^3$. Avec cela, il faut fabriquer un bloc normal de jonction de béton et de bois avec une capacité thermique spécifique de $1.00\,kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}$ qui a la même densité que l'eau. Pour cela, examine un produit d'une masse de $1\,kg$.

(a) Calculer, aux conditions données, en pourcentage combien de parties de da masse de tout le bloc normal doivent être en bois et combien doivent être en béton. (3 p.)

(b) Décider à la base du résultat trouvé, s'il est possible de construire un tel bloc normal. (1 p.)

— FIN —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,

06.09.2011

## 2.70 Modulprüfung in Mathematik 2011 Klasse B 10 / B1

*Viel Glück !*

**Erwartet werden die Lösungen von etwa 4 bis 5 Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte (je 3).**

**Probl. 1** **(27 Punkte)**

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Determinante der Matrix $M$ sowie diejenige von $M + M$.

(b) Begründe damit, ob die Inverse $M^{-1}$ der Matrix existiert.

(c) Berechne die inverse Matrix $M^{-1}$, falls sie existiert.

(d) Berechne die Inverse der Matrix $M^T$, falls sie existiert.

(e) Gibt es eine Beziehung zwischen $M^{-1}$ und $(M^T)^{-1}$? Wenn ja, welche?

(f) Berechne exakt die Determinante von:
$M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} := (M^{-1})^7$

(g) Bilde den Punkt $P_0(2, 5, 8)$ mittles $M$ in $P_1$ ab, d.h. bilde den Vektor $\overrightarrow{OP_0}$ in $\overrightarrow{OP_1}$ ab. Bilde danach $P_0$ mittles $M^{-1}$ in $P_2$ ab. Berechne $P_1$ und $P_2$ sowie $|\overline{P_1 P_2}|$.

(h) Berechne nun diejenige Matrix in Zahlen und auch abstrakt, welche $P_2$ in $P_1$ abbildet.

(i) Berechne die vorhandenen reellen Eigenwerte $\lambda_k$ und die zugehörigen Eigenvektoren (numerisch, mit $z = 1$).

**Probl. 2** **(27 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{(2\, e^{-(x-4)^2}) - 1}{x\,(x+5)}, \quad I = D_f = [-7, 7].$$

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen im Intervall $I$.

(b) Bestimme den Steigungswinkel des Graphen für $x = -1$ und Zeichne diesen Winkel in die Skizze ein.

(c) Bestimme Nullstellen und Polstellen im Intervall $I$ und zeichne diese Stellen in die Skizze ein.

(d) Bestimme rechnerisch die Extremwertstellen im Intervall $I$ und zeichne diese Stellen in die Skizze ein.

(e) Bestimme rechnerisch die Wendepunkte im Intervall $I$, falls vorhanden, und zeichne diese Stellen in die Skizze ein.

(f) Bestimme die Grenzwerte von $f(x)$ für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

(g) Bestimme numerisch die Approximation von $f$ durch das Taylorpolynom $p_{4,3}(x) = P_3(x-4)$ vom Grade 3 mit dem Zentrum $x_0 = 4$.

(h) Berechne damit numerisch $A_1 = \int\limits_3^5 p_{4,3}(x)\,dx$.

(i) Sei $A_2 = \int\limits_3^5 f(x)\,dx$. Ermittle die ersten 4 Ziffern von $d = |A_2 - A_1|$.

**Probl. 3** **(12 Punkte)**

Gegeben sind mit $x \in [x_1, x_2] = [0, \pi]$ und $y \in [y_1, y_2] = [0, \frac{3\pi}{2}]$ die 3 Funktionen:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \cos(x+y)\\
f_2(x,y) &= \cos(x) + \sin(y)\\
f_3(x,y) &= \cos(x)\,\sin(y)
\end{aligned}
$$

(a) Skizziere die zugehörigen 3D–Graphen.

(b) Berechne $A_1(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_1(x, y)\,dx$, $A_2(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_2(x, y)\,dx$ sowie $A_3(y)$ entsprechend.

(c) Berechne $V_1 = \int\limits_{y_1}^{y_2} A_1(y)\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f_1(x, y)\,dx\,dy$ sowie $V_2$ und $V_3$ entsprechend.

(d) Untersuche rechnerisch, wo $f_2(x,y)$ im gegebenen Bereich minimal ist.

**Probl. 4** **(12 Punkte)**

Mit Hilfe von 4 Stangen mit je einer Länge von $4\,m$ wird ein pyramidenförmiges Zelt über einem quadratischen Grundriss errichtet, das die Seitenlänge $x_4$ an der Basis aufweist. Zu diesem Zweck werden die 4 Stangen in die Ecken des Quadrates gestellt und oben, das heisst über der Mitte des Grundrissquadrates, an den Stangenenden zusammengebunden.

(a) Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung wie gross $x_4$ gewählt werden muss, damit das Zelt einen maximalen Volumeninhalt $V_4$ aufweist.

(b) Berechne $V_4$ numerisch.

(c) Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung wie gross entsprechend $x_3$ gewählt werden muss, damit das Zelt einen maximalen Volumeninhalt $V_3$ aufweist, wenn die Zeltform diesmal ein nicht reguläres Tetraeder darstellt mit 3 gleichschenkligen Dreiecken als Seitenflächen, d.h. wenn also nur drei Stangen oben zusammengebunden sind.

(d) Berechne $V_3$ numerisch.

**Probl. 5** **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2}\,(x-2)(x+3)\,e^x$.

(a) Berechne die kürzeste Distanz des Punktes $P(2;\,2)$ zum Graphen von $f$.

(b) Berechne[1] die Länge der Kurve $h(x) = f(x)\cdot e^x,\ \ x \in [0,\,2]$.

(c) Berechne[1] die Länge der Kurve $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \sqrt{1+t} \end{pmatrix},\ \ t \in [0,\,2]$.

(d) Berechne die Länge der kürzesten Verbindung der Geraden

$$g:\ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q:\ \vec{w}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (s+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Probl. 6** **(21 Punkte)**

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$. Diese Vektoren sind Eigenvektoren einer Matrix $M$ mit den Eigenwerten $\lambda_a = 2,\ \ \lambda_b = -1,\ \ \lambda_c = 3$.

(a) Berechne die Matrix $M$.

(b) Löse die Gleichung $M\cdot M - M^T\cdot X\cdot M + M = E$. (D.h. berechne $X$.)

(c) Wir schreiben: $M\cdot M := M^2,\ \ M^2\cdot M := M^3$ usw. und sei $Q = ((M^{-1})^{50})^T$. Berechne $10^{39}\cdot\det(Q)$.

(d) Sei $U = M^5$. Berechne das Bild $U\cdot\vec{v}$ des Vektors $\vec{v} = \vec{b} + x\cdot\vec{b} - x^2\cdot\vec{b} - x^3\cdot\vec{b}$.

(e) Sei $D(\varphi,\,z) =$ Drehmatrix, die einen Vektor um die $z$–Achse um den Winkel $\varphi$ dreht, wobei bei positivem $\varphi$ die positive $x$–Achse in Richtung positive $y$–Achse gedreht wird. Schreibe $D(\varphi,\,z)$ als $3\times 3$–Matrix auf.

(f) Berechne die Eigenwerte von $M^{-1}\cdot D(\varphi,\,z)\cdot M$. Für welche $\varphi$ sind diese reell?

(g) Der Ursprung $O$ sowie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden eine Ebene $\Phi$. Berechne die Spiegelungsmatrix $S$ für die Spiegelung an $\Phi$ und bestimme damit den Bildpunkt von $A$ mit $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

[1] Exakt oder, falls die Rechnerleistung ausreicht, numerisch.

**Probl. 7** **(9 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen
$f(x) = x \cdot \cos((x+x^2)\cdot\pi) - x \cdot x^x$ und $h(x) = 2\,x \cdot \sin(x^2+1) + x \cdot e^{2\,x^2} + \cos(x) - x\,\sin(x)$.
Berechne nachvollziehbar **von Hand**:

(a) Die Ableitung $f\,'(x)$.

(b) Die exakte Steigung sowie den Steigungswinkel $\alpha$ des Graphen von $f$ für $x = 1$.

(c) Die Stammfunktion von $h$.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf Donnerstag 02. 02. 2012

## 2.71 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp10 / Mp2

*Viel Glück !*

**Löse folgende Aufgaben!** (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

**Probl. 1** **(12 Punkte)**

**Volumenberechnung:**

Ein Quader wird achsenparallel in ein Koordinatensystem gestellt, wobei sich eine Ecke im Ursprung befindet. Die andern begrenzenden $x$–, $y$– und $z$–Koordinaten sind $x_1 = 30$, $y_1 = 10$, $z_1 = 20$. Nun wird längs der Geraden $y = 2\,x - 20$ in der $x - y$–Grundebene eine Nut in den Körper gefräst, welche in der $x - z$–Grundebene die Begrenzungskurve $z = (x - 10)^2$ aufweist.

(a) Erstelle zur Orientierung vom Körper im Koordinatensystem mit der Nut eine 3–D–Skizze und beschrifte die Koordinaten sowie die definierende Kurve.

(b) Berechne die Länge der Begrenzungskurve in der $x - z$–Grundebene.

(c) Berechne das ausgefräste Volumen sowie das Volumen des Restkörpers.

(d) Berechne den Radius einer zur Nut volumengleichen Bohrung im Körper, welche parallel zur Nut verläuft.

**Probl. 2** **(21 Punkte)**

**Laplace–Transformationen und Rücktransformationen:**

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \sin(3\,t) + \sinh(2\,t) - t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$ (3 Punkte)

(b) $f(t) = 2 - t + \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$ (3 Punkte)

(c) $f(t) = (2 - e^{-t})\,(\sin(t)) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$ (3 Punkte)

(d) $f(t) = e^{1+2\,t}\,e^{1-t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$ (3 Punkte)

(e) $Y(s) = \dfrac{s}{4\,s^2 - 2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$ (3 Punkte)

(f) $Y(s) = \dfrac{1}{s^4 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$ (3 Punkte)

(g) $Y(s) = 2 + \dfrac{1}{2\,s} + \dfrac{1}{(s-1)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$ (3 Punkte)

**Probl. 3** **(9 Punkte)**

**Differentialgleichung:**

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(t) + y'(t) = c + \cos(t) - t, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

(a) Berechne die Lösung $y(t, c)$ für $c = 0$, also $y(t, 0)$. (3 Punkte)

(b) Berechne bei der gefundenen Lösung $c$ so dass $y(10, c) = 1$ gilt. (3 Punkte)

(c) Sei $y(10, c)$ der Wert der Lösung an der Stelle $t = 10$ bei variablem $c$. Skizziere diese Funktion in einem charakteristischen Bereich. (3 Punkte)

**Probl. 4** **(6 Punkte)**

**Differentialgleichung:**

Löse die folgende Differentialgleichung mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$y'''(t) - 2\,y'(t) - \;y(t) = \;sinh(t), \;\; y(0) = -1, \;\; y'(0) = y''(0) = 0.$$

**Probl. 5** **(6 Punkte)**

**Differentialgleichungssystem:**

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{array}{rcl} y'(t) + y(t) - z(t) & = & \sin(t) \\ y(t) + z'(t) + z(t) & = & e^{-t} \\ y(0) = 1, \;\; z(0) & = & 1 \end{array}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \in [-0.5, 3]$.

**Probl. 6** **(6 Punkte)**

**Differentialgleichung:**

$$y'(t) = -y(t) \cdot t - t, \;\; y(0) = 1.$$

(a) Berechne $y(t) = y_{exakt}(t)$, falls möglich. (3 Punkte)

(b) Berechne $y(1.0) := y_{Euler}(1.0)$ numerisch nach Euler. Schrittweite $\Delta x = 0.25$. Berechne damit die Abweichung $|y_{Euler}(1.0) - y_{exakt}(1.0)|$ (3 Punkte)

**Probl. 7** **(6 Punkte)**

**Differentialgleichung allgemein:**

$$y''(t) - 2\,y'(t) + \frac{1}{2}\,y(t) = t - b, \;\; y(0) = 0, \;\; y'\,(0) = 0.$$

(a) Sei $y(t,\, b)$ die allgemeine Lösung. Skizziere die Lösung $y(t,\, 0)$ für $b = 0, \;\; t \in [0, 3]$.

(b) Berechne $y(t,\, b) = y(1.00,\, 1.00)$.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Donnerstag 02. 02. 2012

## 2.72 Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp10 / Mp 2

*Viel Glück !*

**Löse folgende Aufgaben!** (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

**Probl. 1** **(6 Punkte)**

**Schadenprognose**

Bei der Fabrikation von Präzisionsachsen sind erfahrungsgemäss 0.5 % Ausschuss. Die Chance, dass man eine geprüfte Achse als Ausschuss erkennt, ist wegen der Probleme mit den vorhandenen Prüfgeräte nur 95 %. Nun hat man den Auftrag für eine Lieferung von Geräten erhalten, zu denen $a = 1000$ Achsen eingebaut werden sollen.

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass trotz des Prüfverfahrens eine qualitativ ungenügende Achse eingegaut wird. (6 Punkte)

(b) Wie gross müsste oder dürfte $a$ sein, damit man mit einer eingebauten qualitativ ungenügenden Achse rechnen müsste? (Begründung!) (3 Punkte)

**Probl. 2** **(6 Punkte)**

**Druckfestigkeit von Stahlguss, Vertrauensintervall, Textverständnis**

Zwecks Ermittlung der Druckfestigkeit einer Sorte $B$ von Gusseisen mit Lamellengraphit wurden $n = 45$ Messungen durchgeführt. Damit hat man ein arithmetisches Mittel von $\bar{x} \pm s = 722 \pm 61\, N/mm^2$ bestimmt. $\bar{x}$ wird im gegebenen Fall als ein geeigneter Punktschätzer für den Mittelwert $\mu$ der Grundgesamtheit erachtet. Als Streuung darf man die Standardabweichung der Messreihe $s = 61\, N/mm^2$ verwenden, denn dies gehört zum Erfahrungswissen der Firma, welche die Versuche durchgeführt hat. Weiter darf vor den Hintergrund von langen normalisierten Messreihen angenommen werden, dass es sich bei der Druckfestigkeit im Bereich der vorhandenen Werte mit grosser Wahrscheinlichkeit (gestützt durch relative Häufigkeiten) um eine normalverteilte Zufallsgrösse $\bar{X}$ (mit der Normalverteilung $N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}))$ handelt. D.h. $\mu$ wird durch $\bar{X}$ und $\sigma$ durch $s$ geschätzt. $\frac{\sigma^2}{n}$ ist die Streuung vieler Werte $\bar{X}$ (also nicht diejenige für $X$ selbst im vorliegenden Fall. Berechne daraus für den Wert $c$ für 95 % Vertrauensintervall $[\mu - c,\, \mu + c]$ für $\mu$.

**Probl. 3** **(12 Punkte)**

**Ziffernfolgen in der Dezimalbruchentwicklung von $\pi$**

Gegeben sind die Werte

$$M_1 = \{3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, 8, 4, 6, 2, 6, 4, 3, 3, 8, 3, 2, 7, 9, 5, 0, 2, 8, 8, 4, 1, 9, 7, 1, 6, 9, 3, 9, 9, 3, 7, 5\} \text{ und}$$
$$M_2 = \{1, 0, 5, 8, 2, 0, 9, 7, 4, 9, 4, 4, 5, 9, 2, 3, 0, 7, 8, 1, 6, 4, 0, 6, 2, 8, 6, 2, 0, 8, 9, 9, 8, 6, 2, 8, 0, 3, 4, 8, 2, 5, 3, 4, 2, 1, 1, 7, 0\}.$$

(a) Ermittle in beiden Fällen den Mittelwert und die Streuung.

(b) Wir gehen von der Annahme aus, dass die Ziffern Werte einer Zufallsvariablen $X$ sind und dass jede Ziffer gleich wahrscheinlich ist. Ermittle unter dieser Annahme den Erwartungswert von $X$, also $E(X)$ sowie den Erwartungswert von $E((X - E(X))^2)$.

(c) Vergleiche die berechneten theoretischen Werte mit den tatsächlichen Werte und kommentiere das Resultat.

(d) Denke die Werte von $M_1$ und von $M_2$ ja als $y$–Werte in einem $x - y$–Diagramm. Der Abstand auf der $x$–Achse wird jeweils 1 gewählt, in beiden Fällen beginnend mit $x_1 = 1$. Berechne daraus die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden $g_1(x) = a_1\, x + b_1$ und $g_2(x) = a_2\, x + b_2$.

(e) Kommentiere das Resultat.

**Probl. 4** **(18 Punkte)**

**Kombinatorisches und Wahrscheinlichkeit**

(a) In einer Werkstatt befinden sich 10 Werkbänke und 10 Mechaniker. Wie kann man die Paare „(Mechaniker, Werkbank)“ in einem Diagramm darstellen und wieviele Paarbildungen sind möglich?

(b) Auf wieviele Arten kann man die Mechaniker in der vorangehenden Teilaufgabe auf die Werkbänke verteilen?

(c) Jeder Mechaniker in der vorangehenden Teilaufgabe bekommt seinen Lohn in einer Lohntüte zusammen mit einer Abrechnung. Die Sekretärin übergibt dem Postboten die Tüten mit dem Auftrag, diese vor Arbeitsbeginn den Mechanikern auf jeweils ihren Werkbank zu legen. Sie hat aber vergessen, die Adressen aufzukleben. Nichts Böses ahnend führt der Postbote seine Arbeit aus. Was ist die Chance dass jeder Mechaniker seinen richtigen Lohn ausgehändigt bekommen hat?

(d) Von den 10 Mechanikern bekommen 3 eine Gehaltserhöhung. Auf wieviele Arten kann das geschehen?

(e) Von den 10 Mechanikern bekommen 3 eine Gehaltserhöhung nach der folgenden Abstufung: einer bekommt 50 % mehr, ein zweiter 30 % und ein dritter nur 10 %. Auf wieviele Arten kann das geschehen?

(f) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mechaniker Hanspeter Hansenhans–Peter, einer von den 10, eine Gehaltserhöhung bekommt?

**Probl. 5** **(6 Punkte)**

**Vergleich von Datensätzen**

Gegeben sind zwei Datensätze $D_1$ und $D_2$, welche mathematisch nach dem folgenden Gesetz berechenbar sind:

$$D_1 = \{x_k \,|\, k = 0, \ldots, 10, \;\; x_k = \left(\frac{k}{10}\right)^2 \}$$

$$D_2 = \{y_k \,|\, k = 0, \ldots, 10, \;\; y_k = \left(\frac{k}{10}\right)^3 \}$$

(a) Erstelle für die beiden Datensätze je den Box-Whiskers-Plot

(b) Kommentiere die Resultate wie folgt: Beurteile, wie sich die Verschiedenheit der Datensätze graphisch ausdrückt und ob man anhand der Graphik erschliessen kann ob es sich um zwei verschiedene Datensätze handelt.

**Probl. 6** **(6 Punkte)**

**Vorzeichentest**

Nach der Einstellung von 35 neuen Mitarbeitern wird die Qualität ihrer Arbeit mittels an die Kunden verschickter Frabebogen ermittelt. Die Arbeit der neuen Mitarbeiter bestand darin, mit je zweien dieser Kunden Verhandlungen zu führen, und dies je in farblich anders ausgestatteten Räumen. Dazu wurden bei jedem Mitarbeiter nacheinander zwei farblich verschiedene Verhandlungsumgebungen eingerichtet.
Für die Umgebung $U_1$ war kennzeichnend, dass die Verhandlungen je in Räumen stattfanden, in denen Wände, Böden und Möbel, also alles nur rote Farbe aufwies. Für die zweite Umgebung $U_2$ war es kennzeichnend dass gar kein rot, dafür aber nur graue und beige Farbtöne vorhanden waren. Als Resultat stellte sich heraus, dass die Kunden bei 24 der neuen Mitarbeiter in den roten Räumen weniger zufrieden waren als in den grauen und beigen Rämen. Bei den Kunden von 3 Mitarbeitern war das Resultat bei beiden Farben gleich. Bei den restlichen Mitarbeitern war das Reslultat bei rot besser.
Teste nun die Hypothese $H_0$: „Die Raumfarbe spielt für den Erfolg keine Rolle“ gegen die Alternativhypothese $H_1$: „Die Raumfarbe spielt für den Erfolg eine wesentliche Rolle“. Berechne dazu die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Annahme von $H_0$ im betrachteten Fall dennoch eine einseitige Abweichung der Resultate aus den beiden verschiedenfarbigen Umgebungen auftreten kann. Gelingt es hier, die Hypothese $H_0$ aufrecht zu erhalten, wenn man der Alternative höchstens eine Wahrscheinlichkeit von 5 % zubilligt?

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,

03.02.2012

## 2.73 Modulprüfung in Mathematik 2012 Klasse B 11 / B1

*Viel Glück !*

**Erwartet werden die Lösungen von etwa 2 bis 4 Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte (je 3).**

**Probl. 1** **(9 Punkte)**

Sei $f(x) = (((a_4\,x + a_3)\,x + a_2)\,x + a_1)\,x + a_0$

(a) Berechne die 3. Ableitung von $f(x)$ von Hand (einfachste Form angeben).

(b) Welche Beziehung zwischen welchen Koeffizienten kann man aufstellen, wenn die 3. Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ gleich 0 ist?

(c) Wie gross ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left((1+\frac{1}{n})^{n\,x}\right)$ für $x = \pi$ exakt?

**Probl. 2** **(27 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (\frac{x}{4} - \sin(x^2))^2 + e^{-x^2}, \quad I = D_f = [-\pi, \pi]$$

$$h(x) = x\,e^{-x^2} + \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x), \quad D_h = I$$

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen von $f$ im Intervall $I$.

(b) Berechne von Hand die Ableitungsfunktion von $f$ und vereinfache den erhaltenen Ausdruck so weit wie möglich.

(c) Bestimme von Hand die Steigung des Graphen für $x = 0$.

(d) Bestimme numerisch die erste Extremwertstelle von $f$ links neben dem Ursprung.

(e) Bestimme den Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x}\,h(x)$, falls dieser Wert existiert.

(f) Berechne von Hand die Stammfunktion von $h(x)$.

(g) Berechne von Hand $\int\limits_0^1 h(x)\,dx$.

(h) Bestimme numerisch die Approximation von $f$ durch das Taylorpolynom $p_{0,3}(x) = P_3(x)$ vom Grade 3 mit dem Zentrum $x_0 = 0$.

(i) Bestimme rechnerisch den ersten Wendepunkte vom $h(x)$ links neben dem Ursprung.

**Probl. 3** **(18 Punkte)**

Die Funktion $\cosh(x)$ ist bekanntlich durch die Beziehung $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ definiert. Sei weiter $f(x) = 4 - 2\,\cosh(x)$. (Hier alle Resultate numerisch angeben!)

(a) Skizziere den Graphen von $f(x)$.

(b) Rotation: Berechne die Nullstellen $f(x)$ und bezeichne mit $x_1$ und $x_2$ die beiden Nullstellen links und rechts der $y$–Achse. Sei $I = [x_1,\ x_2]$.

(c) Berechne die $y$–Koordinate des Schwerpunkts der Fläche über $I$.

(d) Berechne das Rotationsvolumen, wenn $f(x)$ über $I$ um die $x$–Achse rotiert wird.

(e) Berechne die Kurvenlänge der Funktionskurve über $I$.

(f) Berechne den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers über $I$.

**Probl. 4** **(12 Punkte, doppelte Punktzahl pro Teilaufgabe)**

Gegeben ist die Funktion

$$z = f(x, y) = (4 - x)\,x + (6 - y)\,y^2,\ \ x \in I_x = [0,\, 4],\ \ I_y = y \in [0,\, 6].$$

Sei weiter $z = h(x) = f(x, 6)$ und $z = g_a(x) = a\,x$.

(a) Wie gross muss $a$ gewählt werden, damit die Gerade $z = g_a(x)$ die Fläche zwischen $I_x$ und $h(x)$ exakt halbiert?

(b) Die Graphen von $h$ und $g_a$ schneiden sich in $S = S_a(x_0)$. Bei welchem $x_0$ ist der abolute Inhalt des Dreiecks maximal gross, welches gegeben ist durch den Ursprung $O$, den Punkt $P = P(x_0,\ g_a(x_0))$ sowie den Schnittpunkt $S_a(x_0)$?

(c) Berechne allfällige Minima und Maxima der Fläche von $z = f(x, y)$ im oben angegebenen Definitionsbereich.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,

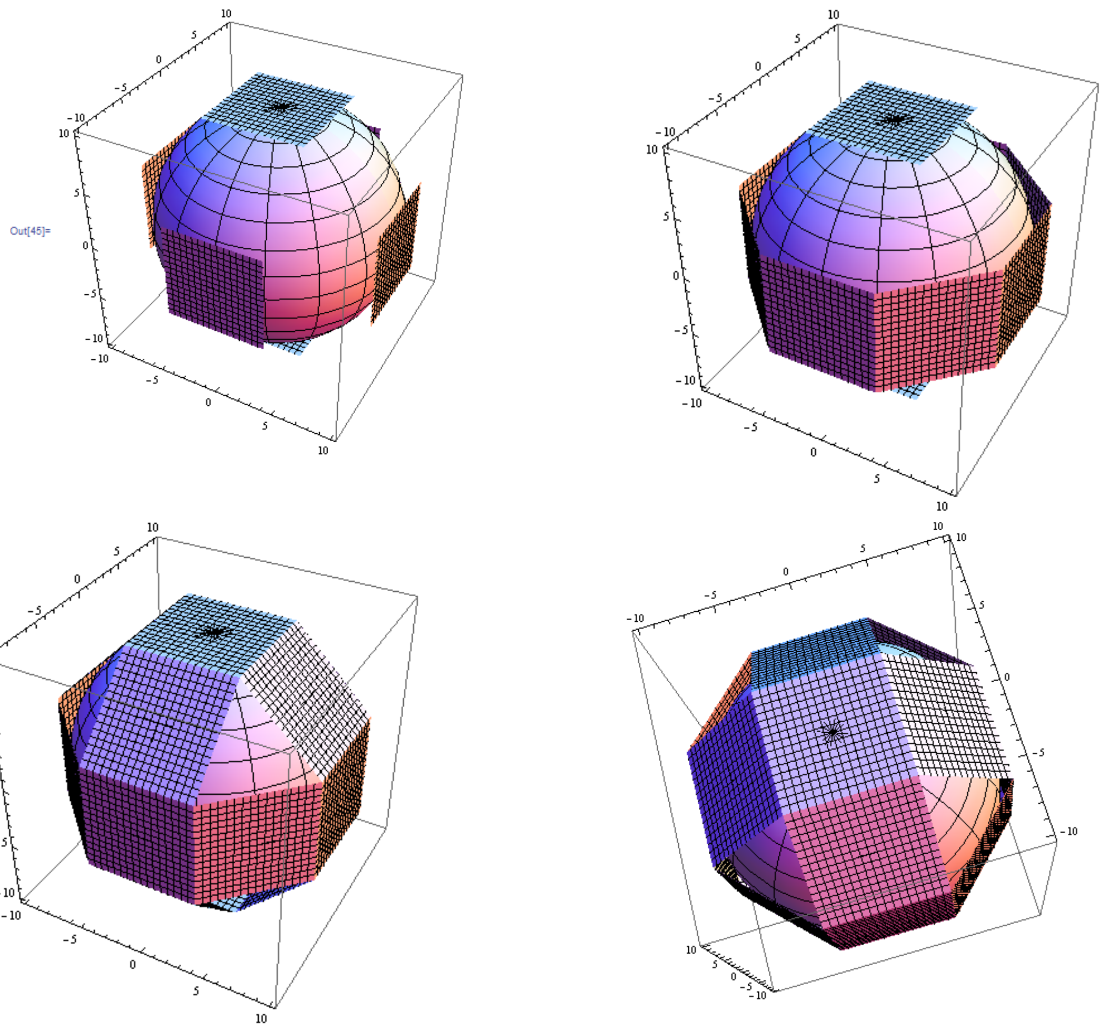
06.07.2012

## 2.74 Modulprüfung in Mathematik II 2012 Klasse B 11 / B1

*Viel Glück !*

**Erwartet werden die Lösungen von ca. $3-5$ Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte (je $3$).**

---




Bilder zu Problem 1

**Probl. 1** **(9 Punkte)**

Gegeben ist eine Kugel mit Zentrum = Ursprung eines Koordinatensystems und Radius $r = 10$. Wie in den obigen Bildern gezeigt, werden an die Kugel an den Durchstosspunkten der Koordinatenachsen achsenparallele quadratische Flächen angebracht. Die Schnittlinien dieser Flächen z.B. mit der $(x,\, y)$–Ebene bilden ein regelmässiges Achteck. Entsprechendes gilt für alle Quadrate. Mit diesem Wissen lassen sich die Positionen der einzelnen Eckpunkte der Quadrate einfach berechnen. Zwischen den Quadraten bilden sich so acht Dreiecke, wovon in jedem Oktanten des Koordinatensystems je eines liegt.

(a) Berechne die Koordinaten der Eckpunkte desjenigen Dreiecks, welches im 1. Oktanten liegt. (Hinweis: Hier sind bei allen drei Punkten alle Koordinaten $\geq 0$. Es genügt, einen Eckpunkt zu berechnen. Für die andern Eckpunkte erhält man die Koordinaten dann mit Hilfe einer Symmetrieüberlegung.)

(b) Berechne den Flächeninhalt eines der Dreiecke.
(*Hinweis:* Alle Dreiecke sind kongruent.)

(c) Berechne den Abstand des Schwerpunktes eines Dreiecks vom Zentrum und entscheide damit, ob die Dreiecke die Kugel berühren.

(d) Berechne die Grösse der Oberfläche $O_{QD}$, welche durch alle Quadrate und alle Dreiecke gebildet wird und berechne damit das Verhältnis $O_{QD} : O_K$, wenn $O_K$ die Kugeloberfläche bedeutet.

(e) Berechne den Inhalt des Körpers, welcher durch die Quadrate und die Dreiecke definiert ist.

**Probl. 2** **(27 Punkte)**

Durch die Punkte $P_1(2,\, 3,\, 5)$ und $P_2(1,\, 2,\, 6)$ ist eine Gerade $g$ gegeben. Eine weitere Gerade $q$ wird durch die Punkte $Q_1(-2,\, -3,\, -5)$ und $Q_2(-3,\, -1,\, z)$ definiert.

(a) Berechne den kürzesten Abstand zwischen $g$ und $q$, wenn $z = -2$ gilt.

(b) Wie gross muss die $z$–Koordinate gewählt werden, wenn der kürzeste Abstand zwischen $g$ und $q$ den Wert 10 haben soll?

(c) Wieviele Lösungen gibt es in der letzten Teilaufgabe?

**Probl. 3** Sei $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix $A$ definiert eine Abbildung, welche $g:\ \vec{x}(t) = t \cdot \vec{v}_1$ als Fixpunktgerade hat und welche den Vektor $\vec{v}_2$ in $\vec{v}_2\,' = -\,\vec{v}_2$ sowie $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_3\,' = -2\,\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ in $\vec{v}_4\,' = \vec{v}_4 + \vec{v}_4$ abbildet.

(a) Berechne die Matrix $A$.

(b) Sei $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,'$ von $\overrightarrow{OQ}$ bei der Abbildung mit $A$.

(c) Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,''$ von $\overrightarrow{OQ}\,'$ bei der Abbildung mit $A + A^T$.

**Probl. 4** $M = \begin{pmatrix} -27 & 24 & -20 & 2 \\ -32 & 29 & -24 & 2 \\ -6 & 6 & -5 & 0 \\ -40 & 36 & -32 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Eigenwerte von $M$.

(b) Untersuche, ob die Eigenvektoren zu einem gegebenen Eigenwert von $M$ immer senkrecht auf den Eigenvektoren zu einem gegebenen anderen Eigenwert von $M$ stehen.

(c) Berechne die Eigenwerte von $M^{-1}$.

(d) Wie verhalten sich die Eigenvektoren von $M^{-1}$ zu jenen von $M$?

(e) Berechne die Eigenwerte von $M^T$.

(f) Wie verhalten sich die Eigenvektoren von $M^T$ zu jenen von $M$?

(g) $\vec{v}_1, \ \vec{v}_2, \ \vec{v}_3, \ \vec{v}_4$ definieren zusammen eine Matrix „$W$“, welche mit $O$ zusammen einen 4D–Spat definiert. Berechne den Inhalt „$Inh(W)$“ und auch denjenigen des Bildspats „$Inh(M \cdot W)$“.

(h) Berechne die Determinante von $M$ und vergleiche das Resultat mit $\dfrac{Inh(M \cdot W)}{Inh(W)}$.

**Probl. 5** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor einer Geraden $g$ durch $O$. Der Punkt $Q(-1, 0, 4)$ wird um $\varphi = +\dfrac{\pi}{6}$ um die Achse $g$ gedreht (im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung $\vec{a}$). Man kann nun die Drehmatrix finden, indem man mit Hilfe von $\vec{a}$ ein lokales „Rechts-Orthonormalsystem“ $\vec{a}_e, \vec{b}_e, \vec{c}_e$ konstruiert und dazu die Matrix $M$ aufschreibt, welche $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ auf $\vec{a}_e, \vec{b}_e, \vec{c}_e$ abbildet. Die Drehmatrix setzt sich nun aus $M^{-1}$, $D_{(\varphi, \vec{e}_1)}$ und $M$ zusammen, wobei $D_{(\varphi, \vec{e}_1)}$ die Matrix ist, welche die Drehung um $\varphi$ um die erste Achse beschreibt.

(a) Berechne die Matrix $D_{(\varphi, \vec{e}_1)}$ numerisch.

(b) Berechne das lokale Rechts–Orthonormalsystem und bilde damit die Drehmatrix um die Achse: $A = M \cdot D_{(\varphi, \vec{e}_1)} \cdot M^{-1}$.

(c) Berechne den gedrehten Bildpunkt $Q'$ von $Q$.

**Probl. 6** Gegeben sind die Punkte

$$P_1(0;\,1;\,1),\;\; P_2(1;\,0;\,-1),\;\; P_3(1;\,1;\,1),\;\; P_4(2;\,6;\,1),\;\; P_5(-1;\,5;\,8),\;\; P_6(-2;\,12;\,0).$$

(a) Berechne eine Matrix $G$, welche $P_1$ in $P_4$ und $P_2$ in $P_5$ und $P_3$ in $P_6$ abbildet.

(b) Wenn man den Punkte $P_1$ um $\varphi = +32^o$ um die $z$–Achse dreht, erhält man den Punkt $P_7$. (Durch die Drehung wird die positive $x$–Achse in Richtung positive $y$–Achse bewegt.) Erstelle die Drehmatrix $D_\varphi$ numerisch.

(c) Berechne $G\cdot \overrightarrow{OP_7}$ (mit Hilfe von $D_\varphi$ und $G$).

**Probl. 7** Gegeben sind die komplexen Zahlen $a = 2 + 3\,i$ und $b = 3 - 2\,i$.

(a) Löse die Gleichung $a \cdot \bar{z} = b$ und stelle damit $z$ in der Form $z = Re(z) + i\,Im(z)$ dar.

(b) Untersuche, ob es sich bei der Mutiplikation mit $z$ in der letzten Teilaufgabe um eine Drehung handelt. Wenn ja, so bestimme den Drehwinkel $\varphi$.

(c) Fertige von $\mathbb{C}$ eine Skizze an mit dem Einheitskreis sowie den Punkten $a$, $\bar{a}$ und $w = \dfrac{1}{a}$.

(d) Löse die Gleichung $(z + b)^4 = w$. Die Lösungen bilden eine Geometrische Figur. Berechne den Schwerpunkt resp. das Zentrum dieser Figur.

WIR1-12

— ENDE —

## 2.75 Lösungen — Solutions

---

Noch vorhandene Lösungen sind nach Jahrgängen abgespeichert, siehe unter dem Link:
• *Les solutions que existent encore sont mises à disposition d'après les année. On peut trouver sous le lien:*

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html

Ende • *Fin*