Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ A1 04 ◇

Flächenprodukt, Vektorprodukt

Probl. 1 Senkrecht stellen eines ebenen Vektors — (nachlesen in der Literatur):

(a) Ablesbar an einer Skizze: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
(Vektoren und Koordinatenachsen bilden kongruente Dreiecke.)

(b) **Bsp.:** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Löse eigene ähnliche Beispiele und kontrolliere sie mittels einer Skizze.

Probl. 2 Flächenprodukt — (nachlesen in der Literatur):

(a) Mit Hilfe des Skalarprodukts sieht man: Die durch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmte Parallelogrammfläche berechnet sich
$A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}_\perp| \cdot |\vec{b}_{\vec{a}_\perp}| = \vec{a}_\perp \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1\, b_2 - a_2\, b_1 := [\vec{a}, \vec{b}]$

(b) **Bsp.:** $A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}] = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$. Löse eigene ähnliche Beispiele.

Probl. 3 Vektorprodukt — (nachlesen in der Literatur):

Das Vektorprodukt definieren wir für dreidimensionale Vektoren (im Raum). Zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist das Vektorprodukt $\vec{n} := \vec{a} \times \vec{b}$ gegeben durch einen Vektor $\vec{n}$, welcher senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Für die Orientierung gilt die Korkzieherregel: Von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ drehen. Dann zeigt $\vec{n}$ in die Bewegungsrichtung des Korkziehers (Rechtsschraube). Die Länge von $\vec{n}$ ist gleich dem Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmten Parallelogramms.

Berechnung: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} := \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}$

Wie man sieht, sind die Komponenten Flächenprodukte der in die Grundebenen projizierten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$A = |\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Löse eigene ähnliche Beispiele.

Rückseite!

Probl. 4 Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ A = 3\sqrt{6} \approx 7.34847$

Probl. 5 Regeln für das Flächen- und Vektorprodukt — (nachlesen in der Literatur):

(a) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
(b) $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda\, [\vec{a}, \vec{b}]$
(c) $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$
(d) $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \ \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$
(e) $[\vec{a}, \vec{b}] = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \ \Rightarrow \ \vec{a} \perp \vec{b}$
(f) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
(g) $\overrightarrow{\lambda\, a} \times \vec{b} = \lambda\, \vec{a} \times \vec{b}$
(h) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
(i) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \ \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$

Probl. 6 $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechne die Distanz von B zu $\overline{OA}$

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

Länge des Normalenvektors = Parallelogramminhalt:
$F = |\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{131} \approx 11.4455$

$$F = |\vec{a}| \cdot h, \ \ |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \approx 2.44949 \ \Rightarrow \ h = \frac{F}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{131}}{\sqrt{6}} \approx 4.67262$$

Löse eigene ähnliche Beispiele.

Probl. 7 Suche in der Literatur gelöste Beispiele zum Flächen- und Vektorprodukt. Versuche sie zu verstehen. Notiere jede Beispiele, welche besonders interessant scheinen.