Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ A1 07 ◇

Vektorielle analytische Geometrie: Die Koordinatengleichung der Ebene

Probl. 1 Analog wie bei der Geraden können wir eine Parametergleichung einer Ebene umformen in eine einzige Gleichung mit drei Unbekannten der Form:

$$\Phi:\; A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

Beispiel: $\Phi:\; 7\,x + (-3)\,y + 4\,z + 8 = 0$

Die Koeffizienten einer solchen Gleichung sind nicht fix. Denn wenn man die Gleichung mit irgend einer Zahl $\neq 0$ multipliziert, so entsteht eine neue Gleichung mit unveränderter Lösungsmenge. Beispiel: Multiplikation mit 2 ergibt: $\Phi:\; 14\,x+(-6)\,y+8\,z+17 = 0,\;\; x, y, z$ unverändert.

Die Koordinatengleichung einer Ebene kann man erhalten, wenn man die Koordinaten von 3 gegebenen Punkten, welche nicht auf einer Geraden liegen, je einmal in die obige erste Gleichung einsetzt. So entstehen 3 Gleichungen mit den unbekannten Parameter A, B, C, D. Sind die Ortsvektoren der drei Punkte linear abhängig, so liegt der Ursprung in der Ebene. D wird dann $= 0$.
Andernfalls ist $D \neq 0$. Wären dann die Koeffizienten bekannt, so könnte man die Gleichung mit $\frac{1}{D}$ multiplizieren. Dann wird der Koeffizient an der Stelle D gleich 1. Daher kann man im Falle $D \neq 0$ immer $D = 1$ annehmen. Man hat also in jedem Fall jetzt 3 Gleichungen mit nur noch 3 Unbekannten (D ist ja jetzt bekannt). Wenn man diese Unbekannten berechnet, so gewinnt man die Koordinatengleichung.

Im Unterschied zur Koordinatengleichung der Ebene findet man in der Koordinatengleichung der Geraden nur zwei Variablen. Im $\mathbb{R}^3$ müsste man für die Festlegung einer Gerade zwie Koordinatengleichungen von Ebenen nehmen (Schnittgebilde). **Bsp.:**

Probl. 2 $\begin{pmatrix} 2\,x - 3\,y + 4\,z - 6 = 0 \\ -x + y + z + 2 = 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\;$ Mögliche Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,t \\ -2 + 6\,t \\ t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2\,x - 3\,y + 4\,z - 6 = 0 \\ -x + y + z + 2 = 0 \\ -2\,x - 3y + z = 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \text{Lösung } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 42 \\ -26 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall erhält man als Schnittgebilde eine Gerade, im zweiten Fall einen Punkt.

Probl. 3 Setzt man in $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ z.B. die Werte von x und y gleich 0, so erhält man einen Punkt auf der z–Achse mit $z = \dfrac{-D}{C}$. Ebenso erhält man den x–Achsenabschnitt der Ebene $x = \dfrac{-D}{A}$ und den y–Achsenabschnitt $y = \dfrac{-D}{B}$. A, B, C, D haben daher sicher etwas mit Koordinaten zu tun.

Probl. 4 Wir nennen den Vektor, den man mit den Koordinaten A, B, C bilden kann, jetzt $\vec{n}$. Es gilt also: $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$. Frage: Was hat $\vec{n}$ für eine Bedeutung?

Wir werden Klarheit in dieser Sache bekommen, wenn wir das Skalarprodukt von $\vec{n}$ mit den durch die Achsenabschnitte definierten, zur Ebene parallelen Vektoren $\begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ \frac{-D}{B} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ 0 \\ \frac{-D}{C} \end{pmatrix}$ bilden: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ \frac{-D}{B} \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \dfrac{D}{A} + B \cdot \dfrac{-D}{B} = D - D + 0 = 0$ und

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ 0 \\ \frac{-D}{C} \end{pmatrix} = A \cdot \frac{D}{A} + 0 + C \cdot \frac{-D}{C} = D - D = 0 \rightsquigarrow \ \vec{n} \perp \Phi$$

Resultat: $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ ist immer ein **Normalenvektor** zur Ebene $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$.

Daher ist die Koordinatengleichung bedeutsam: Man sieht in ihr den Normalenvektor. Will man z.B den Winkel zwischen zwei Ebenen finden, so kann man mit dem Skalarprodukt $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos(\alpha)$ den Winkel α berechnen: $\alpha = \arccos(\dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|})$.

Probl. 5 Frage: Was ist die Bedeutung von D?. Um diese Bedeutung zu erfassen, normieren wir den Normalenvektor so, dass seine Länge gleich 1 ist: $\vec{n}_{norm} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$.

Passen wir die Koeffizienten in der Koordinatengleichung entsprechnend an, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A\,x + B\,y + C\,z + D)$$

$$= \frac{A\,x}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{B\,y}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{C\,z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Man hat daher $\dfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \cdot \vec{x} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\dfrac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Dabei ist das Produk $\dfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \cdot \vec{x} = \dfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{n}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{x}| \cdot \cos(\alpha)$. Hier ist $|\vec{x}|$ die Länge eines Vektors, der vom Ursprung in die Ebene zeigt. α ist der Winkel zwischen diesem Vektor und dem Normalenvektor. Daher ist $|\vec{x}| \cdot \cos(\alpha) = \pm d = \pm$ Distanz vom Ursprung zur Ebene Φ.

Man erhält daher: Distanz vom Ursprung zur Ebene Φ: $\pm d = -\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
D zusammen mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ trägt also in sich die Distanz der Ebene zum Ursprung. Damit hat man nochmals ein Mittel zur Abstandsberechnung zur Verfügung.

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

Beispiel 1: Vektorrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Vektorrechnung
http://de.wikipedia.org/wiki/Spatprodukt
http://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Lineare_Algebra

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html