Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ A2 04 ◇

Stoffgruppe 3: Steigungen von Kurventangenten

Die Steigung einer Kurventangente in einem Kurvenpunkt P_0 kann man als Grenzfall der Steigung einer Kurvensehne verstehen, welche durch P_0 geht. Für die Tangentensteigung hat man Formeln entwickelt. Mit ihrer Hilfe kann man die gesuchte Steigung aus der Formel für die Kurve berechnen.

Probl. 1 Beispiel: Gegeben sei ein Polynom

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0.$$

Dann berechnet sich die Steigung $\tan(\alpha)$ an der Stelle x durch

$$f'(x) = n\, a_n\, x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n-2} + \ldots + a_1 = \tan(\alpha).$$

Die Exponenten werden also einerseits zu Faktoren, und andererseits wird 1 von ihnen subtrahiert.

Aufgabe: Suche Literatur zu diesem Sachverhalt und studiere sie soweit das möglich ist.

Probl. 2 **Bsp.:** $f(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 6 \;\Rightarrow\; \tan(\alpha) = f'(x) = 5 \cdot 4\,x^2 - 2 \cdot 5\,x^1 + 3\,x^0,\;\; x^0 = 1.$
An der Stelle $x = 4$ wird damit der Wert $\tan(\alpha) = 155$.

Aufgabe: Mache dazu eigene ähnliche Beispiele.

Probl. 3 Gegeben ist die Parabel $y = f(x) = x^2$. Für ein fixes $x = x_0$ wird daher $y_0 = x_0^2$. Die Steigung in diesem Punkt ist daher $\tan(\alpha) = 2\,x_0$.
Damit können wir die Tangente an die Kurve durch $P_0(x_0; y_0)$ berechnen: $t(x) = a\,x + b$ mit $a = \tan(\alpha) = 2\,x_0$. Wir erhalten daher $t(x) = 2\,x_0\,x + b$. Im Punkte P_0 wird $t(x_0) = y_0 = x_0^2 = 2\,x_0\,x_0 + b = 2\,x_0^2 + b$. Damit finden wir $b = -x_0^2$.
Die beiden durch die Ordinate durch x_0, die Tangente, die x–Achse und die y–Achse gebildeten Dreiecke sind daher kongruent!

Aufgabe: Löse dieselbe Aufgabe für $f(x) = x^3$ sowie für $f(x) = x^4$. Was stellt man fest? Gibt es eine allgemeine Regel?