Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ B2 Spezial 1 ◇

Thema: Matrizen, Eigenwerte, Eigenvektoren

Probl. 1 Gegeben sind die Matrizen $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Konstruktion der Matrix M^T:
Berechne damit die Matrix $R = M^T \cdot D \cdot (M^T)^{-1}$.

(b) Berechne mit HIlfe der obigen Faktorisierung von R auf einfache Weise R^{10}.

(c) Berechne von R den Rang, den Kern, die Determinante, das charakteristische Polynom und die Spur (Spur = Summe der Diagonalelemente). Berechne auch die Spur von D.

(d) Berechne auf einfache Weise die Inverse von R.

(e) Berechne das Eigensystem (Eigenwerte und Eigenvektoren) von R. Vergleiche die Werte mit den eingangs gegebenen Daten. Was sieht man?

(f) Bilde mit R die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab. Was sind die Bilder?

(g) Bilde mit R^{-1} die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab. Was sind die Bilder?

(h) Bilde mit R den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ab. Was ist das Bild?

(i) Bilde mit R sowie auch mit R^{-1} die Eigenvektoren ab. Was sind die Bilder?

(j) Wähle als Basis die Eigenvektoren von R. Stelle den Vektor $\vec{x}$ in dieser Basis dar. $\vec{x} = k_1\,\vec{v}_1 + k_2\,\vec{v}_2$. Was ist das Bild?

Probl. 2 Gegeben sind die Matrizen $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Löse dieselben Detailaufgaben wie oben.

Probl. 3 Gegeben sind die Matrizen $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Löse dieselben Detailaufgaben wie oben.