Evoluten und Evolventen

(Anleitung zu einem Kleinprojekt)

Verwende die Ergebnisse des Kleinprojekts "Schläuche":

Rechnung

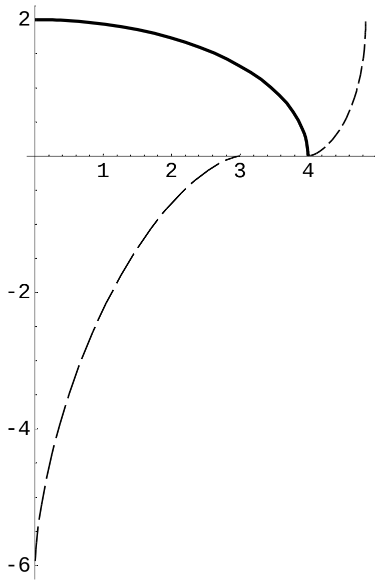
```
In[1]:= Remove["Global`*"];

In[2]:= from[uhu_] := Module[{}, (*Rechnung*)
          v[t_] := {x[t], y[t], 0};
          κ[t_] := Sqrt[((v''[t].v''[t]) (v'[t].v'[t]) - (v'[t].v''[t])^2) / ((v'[t]).(v'[t])
          ρ[t_] := 1 / κ[t];
          tT[t_] := v'[t] / Sqrt[v'[t].v'[t]];
          nN[t_] := 1 / κ[t] 1 / Sqrt[v'[t].v'[t]] D[v'[t] / Sqrt[v'[t].v'[t]], t];
          evolu[t_] := v[t] + ρ[t] nN[t] / Sqrt[nN[t].nN[t]];
          evolv[t_, anf_] := v[t] + (-1) tT[t] Evaluate[N[Integrate[Sqrt[v'[ti].v'[ti]] , {ti,
          v2[t_] := {v[t][[1]], v[t][[2]]};
          evolu2[t_] := {evolu[t][[1]], evolu[t][[2]]};
          evolv2[t_, anf_] := {evolv[t, anf][[1]], evolv[t, anf][[2]]};
          (*Plot 3 D*)
          p1[anf_, end_] := ParametricPlot[Evaluate[v2[t]], {t, anf, end},
            AspectRatio → Automatic, PlotStyle → {Thickness[.01]}, DisplayFunction → Identity]
          p2[anf_, end_] := ParametricPlot[Evaluate[evolu2[t]], {t, anf, end}, AspectRatio → Automati
            PlotStyle → {Thickness[.005], Dashing[{0.1, 0.02}]}, DisplayFunction → Identity];
          p3[anf_, end_] := ParametricPlot[Evaluate[evolv2[t, anf]], {t, anf, end}, AspectRatio
            PlotStyle → {Thickness[.005], Dashing[{0.05, 0.015}]}, DisplayFunction → Identity]
          Show[
           p1[anf, end],
           p2[anf, end],
           p3[anf, end], DisplayFunction → $DisplayFunction]
         ]
```

Demos Kurvendefinitionen

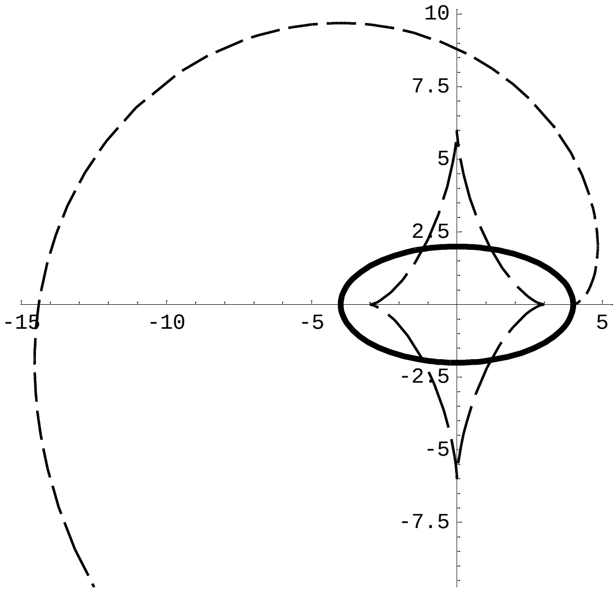
1

In[3]:=
```
(*Kurvendefinitionen*)
x[t_] := 4 Cos[t];
y[t_] := 2 Sin[t];
z[t_] := 0;
anf = 0;
end = Pi / 2;
from[uhu];
```



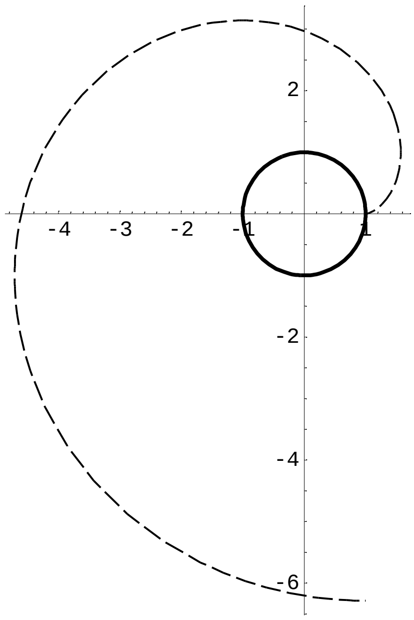
2

```
In[9]:= (*Kurvendefinitionen*)
        x[t_] := 4 Cos[t];
        y[t_] := 2 Sin[t];
        z[t_] := 0;
        anf = 0;
        end = 2 Pi;
        from[uhu];
```

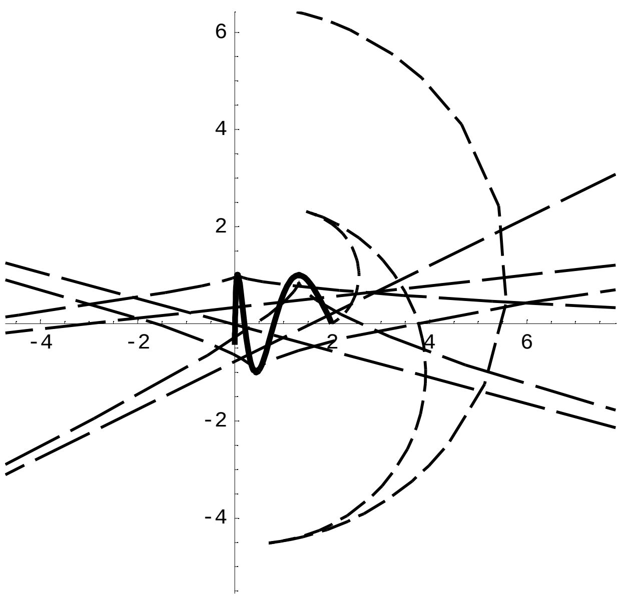


3

In[15]:=
```
(*Kurvendefinitionen*)
x[t_]:= Cos[t];
y[t_]:= Sin[t];
z[t_]:= 0;
anf=0;
end =2Pi;
from[uhu];
```



In[22]:=
```
(*Kurvendefinitionen*)
x[t_]:= 1+Cos[t];
y[t_]:= Sin[t^2];
z[t_]:= 0;
anf=0.1;
end =Pi;
from[uhu];
```



Ergebnisse von Untersuchungen der Klasse M2p: Schlauchdefinitionen für interessante Formen

In[29]:=

Rechnung mit Zwischenergebnissen

```
In[29]:= Remove["Global`*"];
```

```
In[30]:= from[uhu_] := Module[{}, (*Rechnung*)
    v[t_] := {x[t], y[t], 0};
    Print["v[t]  ", v[t]];
    κ[t_] := Sqrt[((v''[t].v''[t]) (v'[t].v'[t]) - (v'[t].v''[t])^2) / ((v'[t]).(v'[t
    ρ[t_] := 1 / κ[t];
    tT[t_] := v'[t] / Sqrt[v'[t].v'[t]];
    Print["tT[t]  ", tT[t]];
    nN[t_] := 1 / κ[t] 1 / Sqrt[v'[t].v'[t]] D[v'[t] / Sqrt[v'[t].v'[t]], t];
    Print["nNT[t]  ", nN[t]];
    evolu[t_] := v[t] + ρ[t] nN[t] / Sqrt[nN[t].nN[t]];
    Print["evolu[t]  ", evolu[t]];
    evolv[t_, anf_] := v[t] + (-1) tT[t] Evaluate[N[Integrate[Sqrt[v'[ti].v'[ti]] , {ti
    Print["evolv[t,anf]  ", evolv[t, anf]];
    v2[t_] := {v[t][[1]], v[t][[2]]};
    Print["v2[t]  ", v2[t]];
    evolu2[t_] := {evolu[t][[1]], evolu[t][[2]]};
    Print["evolu2[t]  ", evolu2[t]];
    evolv2[t_, anf_] := {evolv[t, anf][[1]], evolv[t, anf][[2]]};
    Print["evolv2[t,anf]  ", evolv2[t, anf]];
    (*Plot 3 D*)
    p1[anf_, end_] :=
       ParametricPlot[Evaluate[v2[t]], {t, anf, end}, AspectRatio → Automatic, PlotStyle
     p2[anf_, end_] := ParametricPlot[Evaluate[evolu2[t]], {t, anf, end},
        AspectRatio → Automatic, PlotStyle → {Thickness[.01], Dashing[{0.1, 0.02}]}];
     p3[anf_, end_] := ParametricPlot[Evaluate[evolv2[t, anf]], {t, anf, end},
        AspectRatio → Automatic, PlotStyle → {Thickness[.01], Dashing[{0.05, 0.015}]}]
     Show[
      p1[anf, end],
      p2[anf, end],
      p3[anf, end]]
   ];
  (*Kurvendefinitionen*)
  x[t_] := 4 Cos[t];
  y[t_] := 2 Sin[t];
  z[t_] := 0;
  anf = 0;
  end = Pi;
  from[uhu];
```

```
v[t]  {4 Cos[t], 2 Sin[t], 0}
```

tT[t] $\left\{-\frac{4\,\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}},\ \frac{2\,\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}},\ 0\right\}$

nNT[t] $\left\{\frac{\frac{48\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^2}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}\sqrt{\frac{-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^3}}},\right.$

$\left.\frac{-\frac{24\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{2\,\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}\sqrt{\frac{-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^3}}},\ 0\right\}$

evolu[t]

$\left\{4\,\mathrm{Cos}[t]+\left((4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{5/2}\left(\frac{48\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^2}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)\right)\right/$

$\left((-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2))\right.$

$\sqrt{\left(\frac{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^2\left(\frac{48\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^2}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)^2}{-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)}+\right.}$

$\left.\left.\frac{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^2\left(-\frac{24\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{2\,\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)^2}{-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)}\right)\right),$

$2\,\mathrm{Sin}[t]+\left((4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{5/2}\left(-\frac{24\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{2\,\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)\right)\Big/$

$\left((-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2))\right.$

$\sqrt{\left(\frac{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^2\left(\frac{48\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^2}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)^2}{-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)}+\right.}$

$\left.\left.\frac{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^2\left(-\frac{24\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{2\,\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)^2}{-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)}\right)\right),\ 0\right\}$

evolv[t,anf] $\left\{4\,\mathrm{Cos}[t]+\frac{8.\,\mathrm{EllipticE}[t,\,-3.]\,\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}},\ 2\,\mathrm{Sin}[t]-\frac{4.\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{EllipticE}[t,\,-3.]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}},\ 0\right\}$

v2[t] {4 Cos[t], 2 Sin[t]}

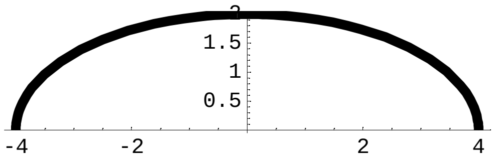
```
evolu2[t]
```

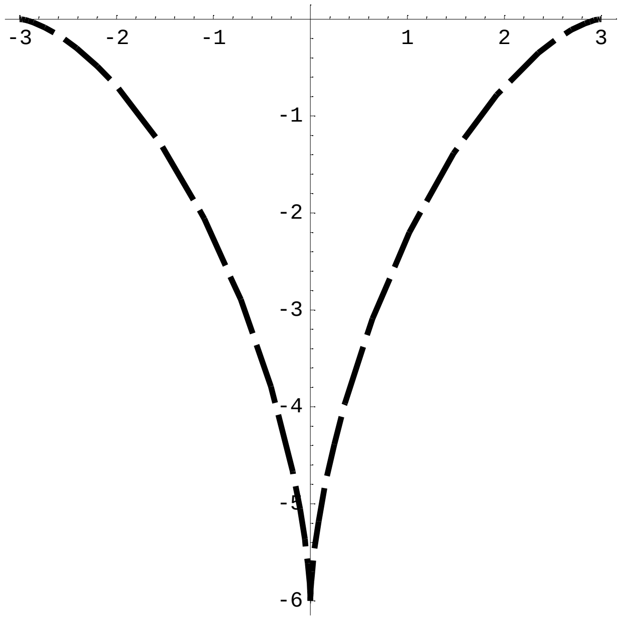
$$\Bigg\{4\,\mathrm{Cos}[t]+\left((4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{5/2}\left(\frac{48\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^2}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)\right)\Bigg/$$
$$\Bigg((-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2))$$
$$\sqrt{\left(\frac{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^2\left(\frac{48\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^2}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)^2}{-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)}+\frac{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^2\left(-\frac{24\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{2\,\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)^2}{-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)}\right)}\Bigg),$$

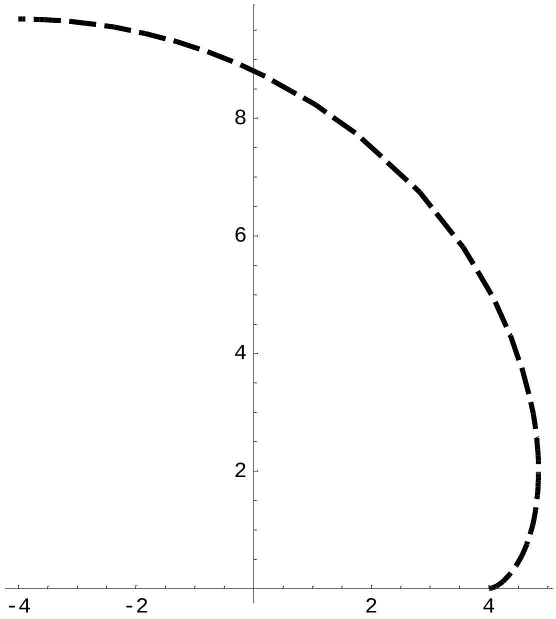
$$2\,\mathrm{Sin}[t]+\left((4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{5/2}\left(-\frac{24\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{2\,\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)\right)\Bigg/$$
$$\Bigg((-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2))$$
$$\sqrt{\left(\frac{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^2\left(\frac{48\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^2}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)^2}{-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)}+\frac{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^2\left(-\frac{24\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]}{(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)^{3/2}}-\frac{2\,\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right)^2}{-144\,\mathrm{Cos}[t]^2\,\mathrm{Sin}[t]^2+(16\,\mathrm{Cos}[t]^2+4\,\mathrm{Sin}[t]^2)\,(4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2)}\right)}\Bigg)\Bigg\}$$

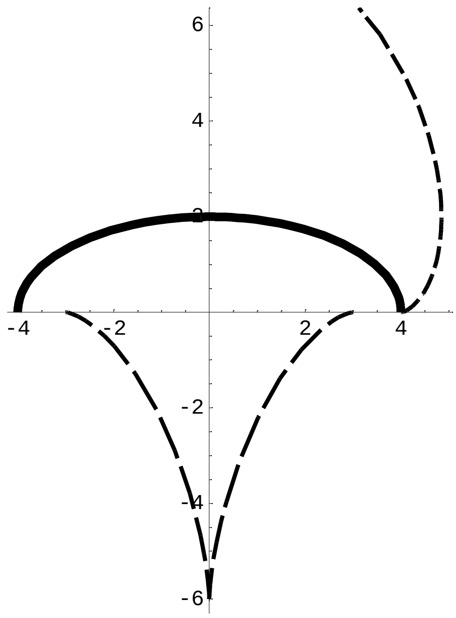
```
evolv2[t,anf]
```

$$\left\{4\,\mathrm{Cos}[t]+\frac{8.\,\mathrm{EllipticE}[t,-3.]\,\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}},\ 2\,\mathrm{Sin}[t]-\frac{4.\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{EllipticE}[t,-3.]}{\sqrt{4\,\mathrm{Cos}[t]^2+16\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right\}$$






8
6
4
2
-4
-2
2
4


6
4
2
-4
-2
2
4
-2
-4
-6