

# Lösungen

## Beispiele von Aufgaben mit Laplace-Transformation

Hier werden nur Lösungswege für die folgenden Aufgaben aufgezeigt:  
4.2 // II/10 Aufgaben 1 und 2 sowie 3.8 // II/18, Aufgabe 2

### 1: 4.2 // II/10, A1

#### 1.1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[y''[t]+y[t],t,s] /. {LaplaceTransform[y[t],t,s]→
Y[s],y[0]→1,y'[0]→-2}
```

$$2 - s + Y[s] + s^2 Y[s]$$

#### 1.2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[t ,t,s]
```

$$\frac{1}{s^2}$$

#### 1.3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\{Y[s] \rightarrow \frac{1 - 2 s^2 + s^3}{s^2 (1 + s^2)}\}$$

#### 1.4. Rücktransformation

```
U[s]:=Y[s]/. solv; U[s]
```

$$\frac{1 - 2 s^2 + s^3}{s^2 (1 + s^2)}$$

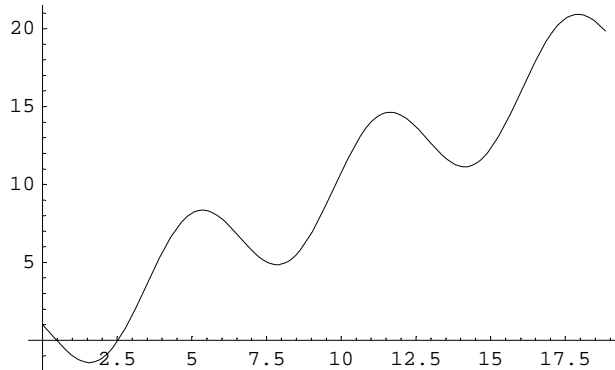
```
U[s]//Apart
```

$$\frac{1}{s^2} + \frac{-3 + s}{1 + s^2}$$

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

```
t + Cos[t] - 3 Sin[t]
```

```
Plot[Evaluate[{u0[t]}],{t,0,6Pi}];
```



## 2: 4.2 // II/10, A2a

### Alles wieder löschen, sauber machen

```
Remove["Global`*"]
```

### 2.1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[y''''[t]-3 y'''[t]+3 y''[t]-y[t],t,s] /.  
{LaplaceTransform[y[t],t,s]->Y[s],y[0]->0,y'[0]->0,y''[0]->-2}
```

```
2 - Y[s] + 3 s Y[s] - 3 s^2 Y[s] + s^3 Y[s]
```

### 2.2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[t^2 E^t ,t,s]
```

$$\frac{2}{(-1 + s)^3}$$

### 2.3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\{Y[s] \rightarrow -\frac{2(-2 + 3s - 3s^2 + s^3)}{(-1 + s)^6}\}$$

## 2.4. Rücktransformation

```
U[s]:=Y[s]/. solv; U[s]
```

$$-\frac{2(-2+3s-3s^2+s^3)}{(-1+s)^6}$$

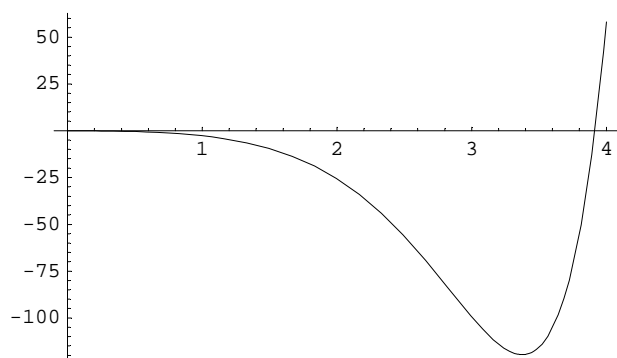
```
U[s]//Apart
```

$$\frac{2}{(-1+s)^6} - \frac{2}{(-1+s)^3}$$

```
u0[t]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$\frac{1}{60} e^t t^2 (-60 + t^3)$$

```
Plot[Evaluate[{u0[t]}],{t,0,4}];
```



## 2: 4.2 // II/10, A2b

### Alles wieder löschen, sauber machen

```
Remove["Global`*"]
```

### 2.1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
links = LaplaceTransform[y'''[t]-3 y''[t]+3 y'[t]-y[t],t,s] /.  
{LaplaceTransform[y[t],t,s]->Y[s],y[0]->0,y'[0]->0,y''[0]->-2}
```

$$2 - Y[s] + 3 s Y[s] - 3 s^2 Y[s] + s^3 Y[s]$$

### 2.2. Rechte Seite transformieren

```
rechts=LaplaceTransform[DiracDelta[t] ,t,s]
```

```
1
```

## 2.3. Gleichung links = rechts lösen

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

$$\{Y[s] \rightarrow -\frac{1}{(-1+s)^3}\}$$

## 2.4. Rücktransformation

```
U[s]:=Y[s]/. solv; U[s]
```

$$-\frac{1}{(-1+s)^3}$$

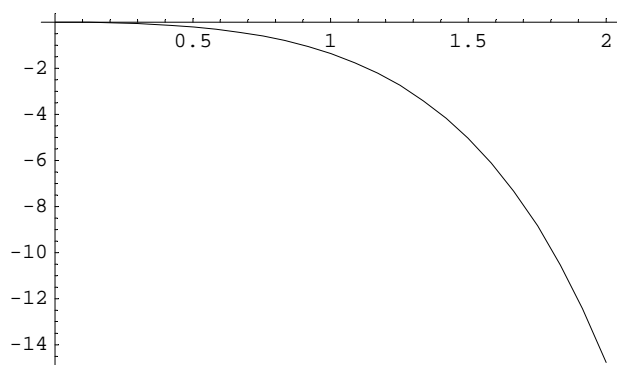
```
U[s]//Apart
```

$$-\frac{1}{(-1+s)^3}$$

```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

$$-\frac{1}{2} e^t t^2$$

```
Plot[Evaluate[{u0[t]}],{t,0,2}];
```



## 3: 3.8 // II/18, A3

### Alles wieder löschen, sauber machen

```
Remove["Global`*"]
```

### 3.1. Linke Seiten transformieren, Anfangswerte anpassen

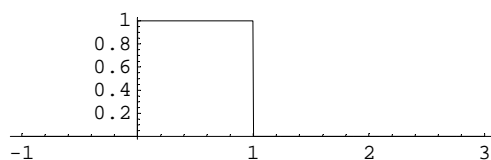
```
links1 = LaplaceTransform[y'[t]-z'[t],t,s] /. {LaplaceTransform[y[t],t,s]→  
Y[s],LaplaceTransform[z[t],t,s]→Z[s],y[0]→1,z[0]→0}
```

$$-1 + s Y[s] - s Z[s]$$

```
links2 = LaplaceTransform[y[t]+2 z[t]-2y'[t]-z'[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]->Y[s],LaplaceTransform[z[t],t,s]->Z[s],y[0]->1,z[0]->0}
Y[s] - 2 (-1 + s Y[s]) + 2 Z[s] - s Z[s]
```

### 3.2. Rechte Seite transformieren

```
us[t_]:=UnitStep[t]-UnitStep[t-1];
Plot[us[t],{t,-1,3},AspectRatio->Automatic];
```



```
rechts1=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

0

```
rechts2=LaplaceTransform[us[t] ,t,s]
```

$$\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

### 3.3. Gleichungssystem links1 = rechts1, links2 = rechts2 lösen

```
solv=Solve[{links1==rechts1,links2==rechts2},{Y[s],Z[s]}] // Flatten
```

$$\left\{ Y[s] \rightarrow \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{3(-s+s^2)}, Z[s] \rightarrow \frac{e^{-s}}{3(-s+s^2)} \right\}$$

### 3.4. Rücktransformation

```
Uy[s]:=Y[s]/. solv; Uy[s]
```

$$\frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{3(-s+s^2)}$$

```
Uy[s]//Apart
```

$$\frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{3(-1+s)s}$$

```
uy0[t_]:=InverseLaplaceTransform[Uy[s],s,t]//Simplify; uy0[t]
```

$$\begin{cases} 1 & t < 1 \\ \frac{1}{3} (2 + e^{-1+t}) & \text{True} \end{cases}$$

```
Uz[s]:=Z[s]/. solv; Uz[s]
```

$$\frac{e^{-s}}{3(-s+s^2)}$$

```
Uz[s]//Apart
```

$$\frac{e^{-s}}{3(-1+s)s}$$

```
uz0[t_]:=InverseLaplaceTransform[Uz[s],s,t]//Simplify; uz0[t]
```

$$\frac{1}{3} (-1 + e^{-1+t}) \text{UnitStep}[-1 + t]$$