Inputs zu Lösungen

1

Literaturstudium

2

a Interpretation der Parameter: Angelegenheit der Physik oder der technischen Mechanik. Wichtig: Bei einer eindimensional gereichteten Bewegung kann z.B. m eine Masse bedeuten, d eine Dämpfungskonstante und k eine Federkonstante. Bei einer Drehbewegung wäre entsprechend Statt m das Massenträgheitsmoment I oder J zu setzen etc.
D wäre im ersten Fall eine auf die Feder und die Masse bezogenes Dämpfungsmass und $\omega_D$eine Kreisfrequenz, welche in der Lösung erscheint.

b

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
In[1]:= links = LaplaceTransform[m y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
        {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→y0,y'[0]→b}
```

Out[1]= $k\,Y[s] + d\,(-y0 + s\,Y[s]) + m\,(-b - s\,y0 + s^2\,Y[s])$

2. Rechte Seite transformieren

```
In[2]:= rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

Out[2]= 0

3. Gleichung links = rechts lösen

```
In[3]:= solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

Out[3]= $\left\{Y[s] \to \frac{b\,m + d\,y0 + m\,s\,y0}{k + d\,s + m\,s^2}\right\}$

4. Rücktransformation

In[4]:= **U[s]:=Y[s]/. solv; U[s]**

Out[4]= $\frac{b\,m + d\,y0 + m\,s\,y0}{k + d\,s + m\,s^2}$

In[5]:= **U[s]//Apart**

Out[5]= $\frac{b\,m}{k + d\,s + m\,s^2} + \frac{(d + m\,s)\,y0}{k + d\,s + m\,s^2}$

In[6]:= **u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]**

Out[6]= $$\frac{1}{2\sqrt{d^2 - 4\,k\,m}} \left(e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}} \left(2\,b\left(-1 + e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right) m + \left(d\left(-1 + e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right) + \left(1 + e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right)\sqrt{d^2 - 4\,k\,m}\right) y0\right)\right)$$

(* Allgemeine Lösung bei freier Schwingung! *)

c

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

In[7]:= **links = LaplaceTransform[m y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /. {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→b}**

Out[7]= $k\,Y[s] + d\,s\,Y[s] + m\,(-b + s^2\,Y[s])$

2. Rechte Seite transformieren

In[8]:= **rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]**

Out[8]= 0

3. Gleichung links = rechts lösen

In[9]:= **solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten**

Out[9]= $\left\{Y[s] \to \frac{b\,m}{k + d\,s + m\,s^2}\right\}$

4. Rücktransformation

In[10]:= **U[s]:=Y[s]/. solv; U[s]**

Out[10]= $\frac{b\,m}{k + d\,s + m\,s^2}$

In[11]:= **U[s]//Apart**

Out[11]= $\frac{b\,m}{k + d\,s + m\,s^2}$

In[12]:= **u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]**

Out[12]= $$\frac{b\, e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}} \left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\;t}{m}}\right) m}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}}$$

(* Allgemeine Lösung bei freier Schwingung! *)

d

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

In[13]:= **links = LaplaceTransform[1 y''[t]+1/2 y'[t]+1 y[t],t,s] /. {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→1}**

Out[13]= $-1+Y[s]+\frac{1}{2}\,s\,Y[s]+s^2\,Y[s]$

2. Rechte Seite transformieren

In[14]:= **rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]**

Out[14]= 0

3. Gleichung links = rechts lösen

In[15]:= **solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten**

Out[15]= $\left\{Y[s]\to\frac{2}{2+s+2\,s^2}\right\}$

4. Rücktransformation

In[16]:= **U[s]:=Y[s]/. solv; U[s]**

Out[16]= $\frac{2}{2+s+2\,s^2}$

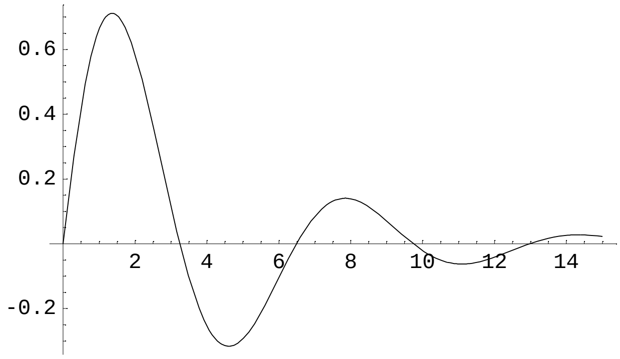
In[17]:= **U[s]//Apart**

Out[17]= $\frac{2}{2+s+2\,s^2}$

In[18]:= **u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]**

Out[18]= $\frac{4\,e^{-t/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{15}\,t}{4}\right]}{\sqrt{15}}$

In[19]:= **Plot[u0[t],{t,0,15}];**



e

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

In[20]:=
```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+1/2 y'[t]-1 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→1}
```

Out[20]= $-1-Y[s]+\frac{1}{2}\,s\,Y[s]+s^2\,Y[s]$

2. Rechte Seite transformieren

In[21]:= **rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]**

Out[21]= 0

3. Gleichung links = rechts lösen

In[22]:= **solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten**

Out[22]= $\left\{Y[s]\to\frac{2}{-2+s+2\,s^2}\right\}$

4. Rücktransformation

In[23]:= **U[s]:=Y[s]/. solv; U[s]**

Out[23]= $\frac{2}{-2+s+2\,s^2}$

In[24]:= **U[s]//Apart**

Out[24]= $\frac{2}{-2+s+2\,s^2}$

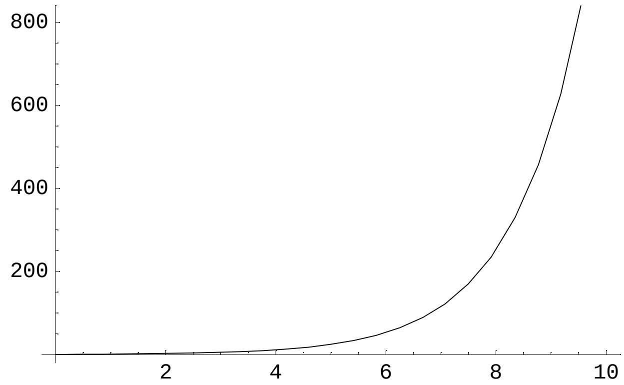
In[25]:= **u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]**

Out[25]= $\frac{2\,e^{-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{17}\right)t}\left(-1+e^{\frac{\sqrt{17}\,t}{2}}\right)}{\sqrt{17}}$

In[26]:= **u0[t]//Expand//N**

Out[26]= $-0.485071\,2.71828^{-1.28078\,t}+0.485071\,2.71828^{0.780776\,t}$

In[27]:= **Plot[u0[t],{t,0,10}];**



In[28]:= **(* ===> Explosion *)**

f

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

In[29]:= **links = LaplaceTransform[m y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /. {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0}**

Out[29]= $k\,Y[s]+d\,s\,Y[s]+m\,s^2\,Y[s]$

2. Rechte Seite transformieren

In[30]:= **rechts=LaplaceTransform[DiracDelta[t] ,t,s]**

Out[30]= 1

3. Gleichung links = rechts lösen

In[31]:= **solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten**

Out[31]= $\left\{Y[s]\to\frac{1}{k+d\,s+m\,s^2}\right\}$

4. Rücktransformation

In[32]:= **U[s]:=Y[s]/. solv; U[s]**

Out[32]= $\frac{1}{k+d\,s+m\,s^2}$

In[33]:= **U[s]//Apart**

Out[33]= $\frac{1}{k+d\,s+m\,s^2}$

```
In[34]:= u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

Out[34]= $$\frac{e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,t}{m}}\right)}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}}$$

g

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
In[35]:= links = LaplaceTransform[1 y''[t]+1/2 y'[t]+1 y[t],t,s] /.
         {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0}
```

Out[35]= $Y[s]+\frac{1}{2}\,s\,Y[s]+s^2\,Y[s]$

2. Rechte Seite transformieren

```
In[36]:= rechts=LaplaceTransform[DiracDelta[t] ,t,s]
```

Out[36]= 1

3. Gleichung links = rechts lösen

```
In[37]:= solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

Out[37]= $\left\{Y[s]\to\frac{2}{2+s+2\,s^2}\right\}$

4. Rücktransformation

```
In[38]:= U[s]:=Y[s]/. solv;  U[s]
```

Out[38]= $\frac{2}{2+s+2\,s^2}$

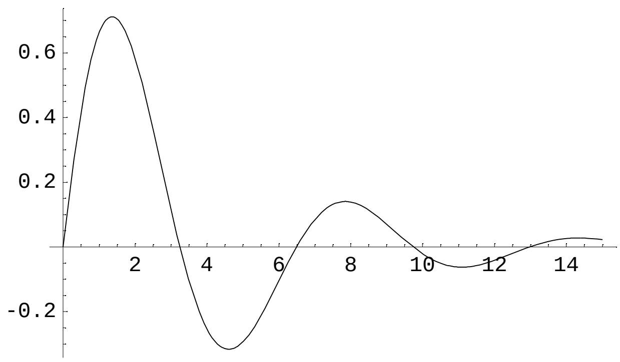
```
In[39]:= U[s]//Apart
```

Out[39]= $\frac{2}{2+s+2\,s^2}$

```
In[40]:= u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

Out[40]= $$\frac{4\,e^{-t/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{15}\,t}{4}\right]}{\sqrt{15}}$$

```
In[41]:= Plot[u0[t],{t,0,15}];
```



h

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
In[42]:= links = LaplaceTransform[m y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
         {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0}
```

Out[42]= $k\,Y[s] + d\,s\,Y[s] + m\,s^2\,Y[s]$

2. Rechte Seite transformieren

```
In[43]:= rechts=LaplaceTransform[A Sin[ω t+ φ] ,t,s]
```

Out[43]= $\dfrac{A\left(\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sign}[\omega] + s\,\mathrm{Sin}[\varphi]\right)}{s^2+\omega^2}$

3. Gleichung links = rechts lösen

```
In[44]:= solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

Out[44]= $\left\{Y[s] \to \dfrac{A\left(\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sign}[\omega] + s\,\mathrm{Sin}[\varphi]\right)}{(k+d\,s+m\,s^2)\,(s^2+\omega^2)}\right\}$

4. Rücktransformation

```
In[45]:= U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

Out[45]= $\dfrac{A\left(\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sign}[\omega] + s\,\mathrm{Sin}[\varphi]\right)}{(k+d\,s+m\,s^2)\,(s^2+\omega^2)}$

```
In[46]:= U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

In[47]:= **u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]**

Out[47]=
$$\Bigg(A\, e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4km}\right)t}{2m}} \Bigg(\omega\, \mathrm{Sin}[\varphi] \Bigg(d k - d\, e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}} k - k\sqrt{d^2-4km} - e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}} k\sqrt{d^2-4km} + d m \omega^2 - d\, e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}} m \omega^2 + m\sqrt{d^2-4km}\,\omega^2 + e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}} m\sqrt{d^2-4km}\,\omega^2 - 2\, e^{\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4km}\right)t}{2m}} \sqrt{d^2-4km}\,(-k+m\omega^2)\,\mathrm{Cos}[t\,\omega] + 2 d\, e^{\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4km}\right)t}{2m}} \sqrt{d^2-4km}\,\omega\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]\Bigg) + \sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[\varphi] \Bigg(\omega\Bigg(d^2\left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}}\right) + d\left(1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}}\right)\sqrt{d^2-4km} + 2\left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4km}\,t}{m}}\right) m\,(-k+m\omega^2)\Bigg) - 2 d\, e^{\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4km}\right)t}{2m}} \sqrt{d^2-4km}\,\omega\,\mathrm{Cos}[t\,\omega] - 2\, e^{\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4km}\right)t}{2m}} \sqrt{d^2-4km}\,(-k+m\omega^2)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]\Bigg)\Bigg)\Bigg) \Big/ \left(2\sqrt{d^2-4km}\,\omega\,(k^2+d^2\omega^2-2km\omega^2+m^2\omega^4)\right)$$

i

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

In[48]:= **links = LaplaceTransform[m y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /. {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0}**

Out[48]= $k\,Y[s] + d\,s\,Y[s] + m\,s^2\,Y[s]$

2. Rechte Seite transformieren

In[49]:= **rechts=LaplaceTransform[A Sin[ω t] ,t,s]**

Out[49]= $\dfrac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{s^2+\omega^2}$

3. Gleichung links = rechts lösen

In[50]:= **solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten**

Out[50]= $\left\{Y[s] \to \dfrac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{(k+d\,s+m\,s^2)\,(s^2+\omega^2)}\right\}$

4. Rücktransformation

In[51]:= **U1[s]:=Y[s]/. solv; U1[s]**

Out[51]= $\dfrac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{(k+d\,s+m\,s^2)\,(s^2+\omega^2)}$

In[52]:= **U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1**

```
In[53]:= u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

Out[53]= $$\left(A\sqrt{\omega^2}\left(\frac{1}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}}\left(e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\left(d^2\left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,t}{m}}\right)+d\left(1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,t}{m}}\right)\sqrt{d^2-4\,k\,m}+2\left(-1+e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,t}{m}}\right)m\,(-k+m\,\omega^2)\right)\right)+2\left(-d\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]+\frac{(k-m\,\omega^2)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{\omega}\right)\right)\right)\Big/\left(2\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)\right)$$

```
In[54]:= u0[t]//Expand
```

Out[54]= $$\frac{A\,d\,e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\sqrt{\omega^2}}{2\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}+\frac{A\,d\,e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,t}{m}-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\sqrt{\omega^2}}{2\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}-$$
$$\frac{A\,d^2\,e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\sqrt{\omega^2}}{2\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}+\frac{A\,d^2\,e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,t}{m}-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\sqrt{\omega^2}}{2\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}+$$
$$\frac{A\,e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\,k\,m\sqrt{\omega^2}}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}-\frac{A\,e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,t}{m}-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\,k\,m\sqrt{\omega^2}}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}-$$
$$\frac{A\,e^{-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\,m^2\,(\omega^2)^{3/2}}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}+\frac{A\,e^{\frac{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,t}{m}-\frac{\left(d+\sqrt{d^2-4\,k\,m}\right)t}{2\,m}}\,m^2\,(\omega^2)^{3/2}}{\sqrt{d^2-4\,k\,m}\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}-$$
$$\frac{A\,d\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4}+\frac{A\,k\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{\omega\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4)}-\frac{A\,m\,\omega\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+m^2\,\omega^4}$$

j

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
In[55]:= links = LaplaceTransform[1 y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
         {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0}
```

Out[55]= $k\,Y[s]+d\,s\,Y[s]+s^2\,Y[s]$

2. Rechte Seite transformieren

```
In[56]:= rechts=LaplaceTransform[A Sin[ω t] ,t,s]
```

Out[56]= $$\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{s^2+\omega^2}$$

3. Gleichung links = rechts lösen

```
In[57]:= solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

Out[57]= $$\left\{Y[s]\to\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sign}[\omega]}{(k+d\,s+s^2)\,(s^2+\omega^2)}\right\}$$

4. Rücktransformation

```
In[58]:= U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

Out[58]= $\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\text{Sign}[\omega]}{(k+d\,s+s^2)\,(s^2+\omega^2)}$

```
In[59]:= U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

```
In[60]:= u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

Out[60]= $\left(A\sqrt{\omega^2}\left(\frac{1}{\sqrt{d^2-4k}}\left(e^{-\frac{1}{2}\left(d+\sqrt{d^2-4k}\right)t}\left(d^2\left(-1+e^{\sqrt{d^2-4k}\,t}\right)+d\left(1+e^{\sqrt{d^2-4k}\,t}\right)\sqrt{d^2-4k}-2\left(-1+e^{\sqrt{d^2-4k}\,t}\right)(k-\omega^2)\right)\right)+2\left(-d\,\text{Cos}[t\,\omega]+\frac{(k-\omega^2)\,\text{Sin}[t\,\omega]}{\omega}\right)\right)\right)\Big/\left(2\,(k^2+d^2\,\omega^2-2\,k\,\omega^2+\omega^4)\right)$

```
In[61]:= (*   Formel problematisch für   4 k = d²  (0 im Nenner)!   *)
```

k

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
In[62]:= links = LaplaceTransform[1 y''[t]+d y'[t]+k y[t],t,s] /.
         {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→0,y'[0]→0,d->2 Sqrt[k]}
```

Out[62]= $k\,Y[s]+2\sqrt{k}\;s\,Y[s]+s^2\,Y[s]$

2. Rechte Seite transformieren

```
In[63]:= rechts=LaplaceTransform[A Sin[ω t] ,t,s]
```

Out[63]= $\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\text{Sign}[\omega]}{s^2+\omega^2}$

3. Gleichung links = rechts lösen

```
In[64]:= solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

Out[64]= $\left\{Y[s]\to\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\text{Sign}[\omega]}{\left(\sqrt{k}+s\right)^2\,(s^2+\omega^2)}\right\}$

4. Rücktransformation

```
In[65]:= U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

Out[65]= $\frac{A\sqrt{\omega^2}\,\text{Sign}[\omega]}{\left(\sqrt{k}+s\right)^2\,(s^2+\omega^2)}$

```
In[66]:= U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

In[67]:= **u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]/.d->2 Sqrt[k]**

Out[67]= $\frac{A\sqrt{\omega^2}\left(2\,e^{-\sqrt{k}\,t}\sqrt{k}+e^{-\sqrt{k}\,t}\,t\,(k+\omega^2)-2\sqrt{k}\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]+\frac{(k-\omega^2)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{\omega}\right)}{(k+\omega^2)^2}$

l, m

In[68]:= **solv=Solve[ω^4+(d^2-2 k)ω^2+k^2==0,{ω}]//Simplify //Flatten**

Out[68]= $\left\{\omega\to-\sqrt{-\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k},\ \omega\to\sqrt{-\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k},\ \omega\to-\sqrt{-\frac{d^2}{2}-\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k},\ \omega\to\sqrt{-\frac{d^2}{2}-\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}\right\}$

In[69]:= **solv[[3]]**

Out[69]= $\omega\to-\sqrt{-\frac{d^2}{2}-\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}$

In[70]:= **ωϵ1[ϵ_] := ω + ϵ /. solv[[1]]; ωϵ1[ϵ]**

Out[70]= $-\sqrt{-\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}+\epsilon$

In[71]:= **ωϵ2[ϵ_]:=ω+ϵ/.solv[[2]]; ωϵ2[ϵ]**

Out[71]= $\sqrt{-\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}+\epsilon$

In[72]:= **(* Fall mit den meisten positiven Anteilen unter Wurzeln *)**

In[73]:= **ωϵ2[0]//FullSimplify**

Out[73]= $\sqrt{\frac{1}{2}d\left(-d+\sqrt{d^2-4k}\right)+k}$

In[74]:= **ωϵ2[0]//FullSimplify//InputForm**

Out[74]//InputForm=
```
Sqrt[(d*(-d + Sqrt[d^2 - 4*k]))/2 + k]
```

In[75]:= **(* (d*(-d + Sqrt[d^2 - 4*k]))/2 ist für positive k negativ *)**

In[76]:= **Solve[(d*(-d + Sqrt[d^2 - 4*k]))/2 + k == 0,{k}]**

Out[76]= $\{\{k\to 0\}\}$

In[77]:= **(* ωϵ2[0] ist daher nie positiv *)**

In[78]:= **ωϵ2[0]/Sqrt[d^2]//PowerExpand**

Out[78]= $\frac{\sqrt{-\frac{d^2}{2}+\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}}{d}$

```
In[79]:= ωϵ3[ϵ_]:=ω+ϵ/.solv[[3]]; ωϵ3[ϵ]
```

Out[79]= $-\sqrt{-\frac{d^2}{2}-\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}+\epsilon$

```
In[80]:= ωϵ4[ϵ_]:=ω+ϵ/.solv[[4]]; ωϵ4[ϵ]
```

Out[80]= $\sqrt{-\frac{d^2}{2}-\frac{1}{2}d\sqrt{d^2-4k}+k}+\epsilon$

n

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
In[81]:= links = LaplaceTransform[1 y''[t]+ 2q y'[t]+ω0^2 y[t],t,s] /.
         {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→1,y'[0]→0}
```

Out[81]= $-s+s^2\,Y[s]+\omega 0^2\,Y[s]+2\,q\,(-1+s\,Y[s])$

2. Rechte Seite transformieren

```
In[82]:= rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

Out[82]= 0

3. Gleichung links = rechts lösen

```
In[83]:= solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

Out[83]= $\left\{Y[s]\to\frac{2\,q+s}{2\,q\,s+s^2+\omega 0^2}\right\}$

4. Rücktransformation

```
In[84]:= U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

Out[84]= $\frac{2\,q+s}{2\,q\,s+s^2+\omega 0^2}$

```
In[85]:= U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1

In[86]:= u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]/.d->2 Sqrt[k]
```

Out[86]= $\frac{e^{-t\left(q+\sqrt{q^2-\omega 0^2}\right)}\left(\left(-1+e^{2\,t\sqrt{q^2-\omega 0^2}}\right)q+\left(1+e^{2\,t\sqrt{q^2-\omega 0^2}}\right)\sqrt{q^2-\omega 0^2}\right)}{2\sqrt{q^2-\omega 0^2}}$

o1

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

```
In[87]:= links = LaplaceTransform[1 y''[t]+ 2q y'[t]+ω0^2 y[t],t,s] /.
         {LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→1,y'[0]→0,q->1, ω0->1/2}
```

Out[87]= $-s + \frac{Y[s]}{4} + s^2\,Y[s] + 2\,(-1 + s\,Y[s])$

2. Rechte Seite transformieren

```
In[88]:= rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

Out[88]= 0

3. Gleichung links = rechts lösen

```
In[89]:= solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

Out[89]= $\left\{Y[s] \to \frac{4\,(2+s)}{1+8\,s+4\,s^2}\right\}$

4. Rücktransformation

```
In[90]:= U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

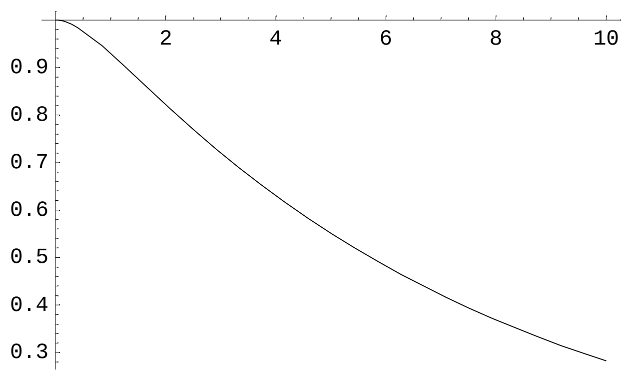
Out[90]= $\frac{4\,(2+s)}{1+8\,s+4\,s^2}$

```
In[91]:= U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

```
In[92]:= u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

Out[92]= $\frac{1}{6}\,e^{-\frac{1}{2}\,(2+\sqrt{3})\,t}\left(3 - 2\,\sqrt{3} + \left(3 + 2\,\sqrt{3}\right)\,e^{\sqrt{3}\,t}\right)$

```
In[93]:= Plot[u0[t],{t,0,10}];
```



o2

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

In[94]:=
```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+ 2q y'[t]+ω0^2 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→1,y'[0]→0,q->1, ω0->1}
```

Out[94]= $-s + Y[s] + s^2 Y[s] + 2(-1 + s Y[s])$

2. Rechte Seite transformieren

In[95]:=
```
rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```

Out[95]= 0

3. Gleichung links = rechts lösen

In[96]:=
```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

Out[96]= $\left\{Y[s] \to \frac{2+s}{(1+s)^2}\right\}$

4. Rücktransformation

In[97]:=
```
U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```

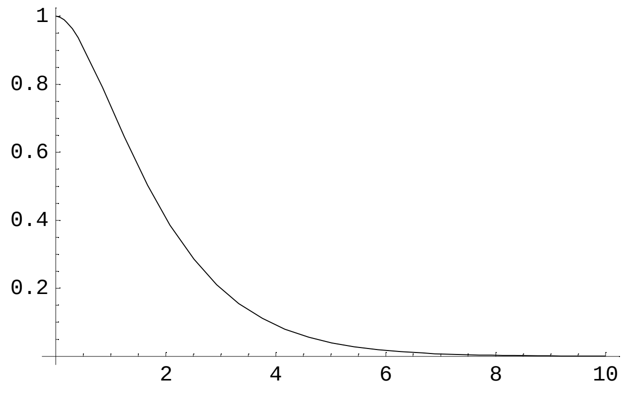
Out[97]= $\frac{2+s}{(1+s)^2}$

In[98]:=
```
U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```

In[99]:=
```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```

Out[99]= $e^{-t}(1+t)$

In[100]:=
```
Plot[u0[t],{t,0,10}];
```



o3

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

In[101]:=
```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+ 2q y'[t]+ω0^2 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→1,y'[0]→0,q->1/2, ω0->1}
```
Out[101]=

$-1 - s + Y[s] + s\,Y[s] + s^2\,Y[s]$

2. Rechte Seite transformieren

In[102]:=
```
rechts=LaplaceTransform[0 ,t,s]
```
Out[102]=

0

3. Gleichung links = rechts lösen

In[103]:=
```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```
Out[103]=

$\left\{Y[s] \to \frac{1+s}{1+s+s^2}\right\}$

4. Rücktransformation

In[104]:=
```
U1[s]:=Y[s]/. solv;  U1[s]
```
Out[104]=

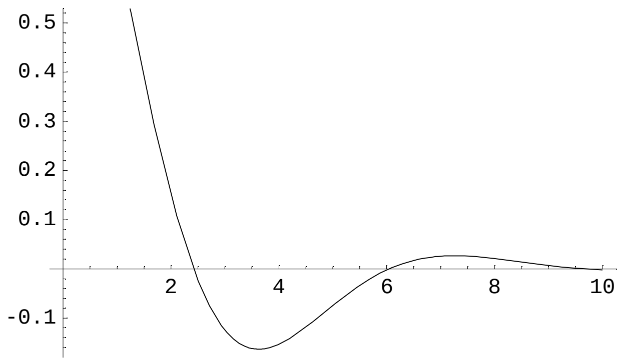
$\frac{1+s}{1+s+s^2}$

In[105]:=
```
U[s]:=(U1[s]//Apart)/.Sign[ω]->1
```
In[106]:=
```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```
Out[106]=

$\frac{1}{3}\,e^{-t/2}\left(3\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right] + \sqrt{3}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right]\right)$

In[107]:=

```
Plot[u0[t],{t,0,10}];
```



p

Eigene Experimente....

q

In[108]:=

```
Remove["Global`*"]
```

1. Linke Seite transformieren, Anfangswerte anpassen

In[109]:=

```
links = LaplaceTransform[1 y''[t]+ 2*1 y'[t]+2^2 y[t],t,s] /.
{LaplaceTransform[y[t],t,s]→Y[s],y[0]→1,y'[0]→0}
```

Out[109]=

$$-s + 4\,Y[s] + s^2\,Y[s] + 2\,(-1 + s\,Y[s])$$

2. Rechte Seite transformieren

In[110]:=

```
rechts=LaplaceTransform[Sin[ω t] ,t,s]/.Sign[ω]->1
```

Out[110]=

$$\frac{\sqrt{\omega^2}}{s^2 + \omega^2}$$

3. Gleichung links = rechts lösen

In[111]:=

```
solv=Solve[links==rechts,{Y[s]}] // Flatten
```

Out[111]=

$$\left\{Y[s] \to \frac{2\,s^2 + s^3 + 2\,\omega^2 + s\,\omega^2 + \sqrt{\omega^2}}{(4 + 2\,s + s^2)\,(s^2 + \omega^2)}\right\}$$

4. Rücktransformation

In[112]:=
```
U[s]:=Y[s]/. solv;  U[s]
```
Out[112]=
$$\frac{2\,s^2+s^3+2\,\omega^2+s\,\omega^2+\sqrt{\omega^2}}{(4+2\,s+s^2)\,(s^2+\omega^2)}$$

In[113]:=
```
u0[t_]:=InverseLaplaceTransform[U[s],s,t]//Simplify; u0[t]
```
Out[113]=
$$\frac{1}{3\,\omega\,(16-4\,\omega^2+\omega^4)}\Big(e^{-t}\Big(3\,\omega\,\big(-4\,\omega^2+\omega^4+2\,\big(8+\sqrt{\omega^2}\big)\big)\,\mathrm{Cos}\big[\sqrt{3}\,t\big]-6\,e^{t}\,\omega\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]+16\,\sqrt{3}\,\omega\,\mathrm{Sin}\big[\sqrt{3}\,t\big]-4\,\sqrt{3}\,\omega^3\,\mathrm{Sin}\big[\sqrt{3}\,t\big]+\sqrt{3}\,\omega^5\,\mathrm{Sin}\big[\sqrt{3}\,t\big]-2\,\sqrt{3}\,\omega\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sin}\big[\sqrt{3}\,t\big]+\sqrt{3}\,\omega^3\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sin}\big[\sqrt{3}\,t\big]+12\,e^{t}\,\sqrt{\omega^2}\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]-3\,e^{t}\,(\omega^2)^{3/2}\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]\Big)\Big)$$

5. Konstant schwingender Term isolieren, herausrechnen, Plot der Amplitude als Funtion der Frequenz

In[114]:=
```
col1=Collect[Evaluate[u0[t]/.{Sin[ω t]->x,Sin[Sqrt[3] t]->x^2,Cos[ω
t]->x^3,Cos[Sqrt[3] t]->x^4}],{x,x^2,x^3,x^4}];
col1
```
Out[115]=
$$-\frac{2\,x^3\,\sqrt{\omega^2}}{16-4\,\omega^2+\omega^4}+\frac{e^{-t}\,x^2\,\big(16\,\sqrt{3}\,\omega-4\,\sqrt{3}\,\omega^3+\sqrt{3}\,\omega^5-2\,\sqrt{3}\,\omega\,\sqrt{\omega^2}+\sqrt{3}\,\omega^3\,\sqrt{\omega^2}\big)}{3\,\omega\,(16-4\,\omega^2+\omega^4)}+\frac{e^{-t}\,x\,\big(12\,e^{t}\,\sqrt{\omega^2}-3\,e^{t}\,(\omega^2)^{3/2}\big)}{3\,\omega\,(16-4\,\omega^2+\omega^4)}+\frac{e^{-t}\,x^4\,\big(-4\,\omega^2+\omega^4+2\,\big(8+\sqrt{\omega^2}\big)\big)}{16-4\,\omega^2+\omega^4}$$

In[116]:=
```
col2 =((col1)/.{x->Sin[ω t],x^2->Sin[Sqrt[3] t],x^3->Cos[ω t],x^4->Cos[Sqrt[3] t],
Sqrt[ω^2]->ω})// Cancel
```
Out[116]=
$$\frac{e^{-t}\,(16+2\,\omega-4\,\omega^2+\omega^4)\,\mathrm{Cos}\big[\sqrt{3}\,t\big]}{16-4\,\omega^2+\omega^4}-\frac{2\,\omega\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{16-4\,\omega^2+\omega^4}+\frac{e^{-t}\,(16-2\,\omega-4\,\omega^2+\omega^3+\omega^4)\,\mathrm{Sin}\big[\sqrt{3}\,t\big]}{\sqrt{3}\,(16-4\,\omega^2+\omega^4)}-\frac{\big(-4+\omega\,\sqrt{\omega^2}\big)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{16-4\,\omega^2+\omega^4}$$

In[117]:=
```
col3 = col2/. {E^(-t)->0, Sqrt[ω^2]->ω}
```
Out[117]=
$$-\frac{2\,\omega\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]}{16-4\,\omega^2+\omega^4}-\frac{(-4+\omega^2)\,\mathrm{Sin}[t\,\omega]}{16-4\,\omega^2+\omega^4}$$

In[118]:=
```
col4 = col3/. {Cos[ω t]->1, Sin[t ω]->0}
```
Out[118]=
$$-\frac{2\,\omega}{16-4\,\omega^2+\omega^4}$$

In[119]:=
```
col5 = col3/. {Cos[ω t]->0, Sin[t ω]->1}
```

Out[119]=

$$-\frac{-4+\omega^2}{16-4\,\omega^2+\omega^4}$$

In[120]:=
```
cω1 = col4/Sqrt[col4^2+col5^2]//Simplify
```

Out[120]=

$$-2\,\omega\,\sqrt{\frac{1}{16-4\,\omega^2+\omega^4}}$$

In[121]:=
```
cω2 = col5/Sqrt[col4^2+col5^2]//Simplify
```

Out[121]=

$$-(-4+\omega^2)\,\sqrt{\frac{1}{16-4\,\omega^2+\omega^4}}$$

In[122]:=
```
schwing = -(Sqrt[col4^2+col5^2](Sin[α] Cos[ω t]+Cos[α] Sin[t ω])//Simplify)/.
α->ArcSin[cω1]
```

Out[122]=

$$-\sqrt{\frac{1}{16-4\,\omega^2+\omega^4}}\;\mathrm{Sin}\left[t\,\omega-\mathrm{ArcSin}\left[2\,\omega\,\sqrt{\frac{1}{16-4\,\omega^2+\omega^4}}\right]\right]$$

In[123]:=
```
aml=-Sqrt[col4^2+col5^2]//Simplify
```

Out[123]=

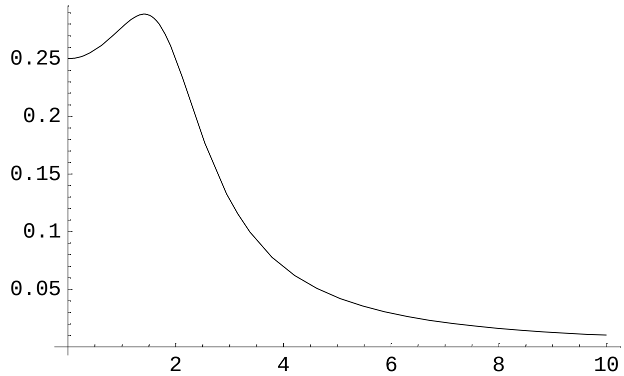
$$-\sqrt{\frac{1}{16-4\,\omega^2+\omega^4}}$$

In[124]:=
```
aml//InputForm
```

Out[124]//InputForm=
```
-Sqrt[(16 - 4*ω^2 + ω^4)^(-1)]
```

In[125]:=
```
amplitude[ω_]:=1/Sqrt[16 - 4*ω^2 + ω^4]
```

In[126]:=
```
Plot[amplitude[ω],{ω,0,10}];
```



In[127]:=
```
Solve[D[amplitude[x],x]==0,{x}]
```
Out[127]=
$\{\{x \to 0\}, \{x \to -\sqrt{2}\}, \{x \to \sqrt{2}\}\}$

In[128]:=
```
N[%]
```
Out[128]=
$\{\{x \to 0.\}, \{x \to -1.41421\}, \{x \to 1.41421\}\}$

6. Bemerkung: Die Amplitudenformel gibt dasselbe Resultat:

In[129]:=
```
Sqrt[2^2-2*1^2]//N
```
Out[129]=
1.41421