Test ◇ **B1–(09/10)–03** ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär sind und dass $M + M^T = A^{-1} \cdot A^T$, $X \cdot X = X^2$ gilt:

$$(A \cdot X \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot X \cdot A^{-1}) + A^T \cdot X \cdot A^{-1} = M - A^{-1} + M^T + A \cdot X^2 \cdot A^{-1}.$$

Probl. 2 Gegeben sind 2 Geraden, welche als Näherungen für die Lage von zwei Drahtseilen gelten:

$$g_1 : \ \vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \ \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Das höher gelegene Seil soll eine Seilbahn aufnehmen, das tiefer gelegene Seil ist eine elektrische Leitung. Daher soll man den kürzesten Abstand der beiden Seile, und damit der Geraden berechnen. Führe die Berechung durch.

Probl. 3 Gegeben ist eine Ebene $\Phi : \ \vec{v}(\lambda, \mu) = \overrightarrow{OA} + \lambda \ \overrightarrow{AB} + \mu \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dazu kennt man noch den Punkt $Q(10; -10; 12)$

(a) Berechne das Volumen des Tetraeders, welches gegeben ist durch A, B, C, Q.
(b) Berechne daraus den Abstand des Punktes Q von Φ.
(c) Berechne den Lotfusspunkt L von Q auf Φ.
(d) Berechne den an L gespiegelten Punkt Q' zu Q.
(e) Berechne den Winkel $\angle(QAQ')$.

Probl. 4 Ein Punkt P_0 liegt in der Ebene $\Phi_1 : \ 3\,x + 4\,y - 5\,z - 12 = 0$ und ebenfalls in der Ebene $\Phi_2 : \ -4\,x + 5\,y + 3\,z + 12 = 0$. Zudem soll P_0 vom Punkt $Q(1, 2, 10)$ einen minimalen Abstand haben. Bestimme P_0 numerisch.

Probl. 5 Gegeben sind die Gleichungssysteme

(a)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2\,x + 3\,y + 4\,z &= 1 \\ x + 2\,y + 3\,z &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2\,x + 3\,y + 4\,z &= 2 \\ x + 2\,y + 3\,z &= 1 \end{aligned}$$

Demonstriere damit den Gauss–Jordan–Algorithmus und finde jeweils die allgemeine Lösung und dazu jeweils die Dimension von $\mathbb{L}$!

%

Probl. 6 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. %

(a) Für welche Werte von x existiert die Inverse von A?

(b) Berechne $(A \cdot B)$.

(c) Berechne $(3 \cdot A^{-1} \cdot B)$ für $x = \dfrac{1}{3}$.

(d) Berechne $(3 \cdot B \cdot A^{-1})$ für $x = \dfrac{1}{3}$.

(e) Berechne $(B \cdot A \cdot B \cdot A^{-1})$ für $x = 1$.

(f) Berechne $(B \cdot B^T \cdot A \cdot A^T)$ für $x = 1$.

(g) Berechne $((B^{-1} \cdot A^{-1})^T)^{-1}$ für $x = 1$.

Probl. 7 Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Bilde den Punkt $P_0(5, 8)$ mittles M ab, d.h. bilde den Vektor $\overrightarrow{OP_0}$ ab. Drehe dann den Bildpunkt P_1 um -12^o um den Ursprung. Bilde danach den durch die Drehung erhaltenen Bildpunkt P_2 mittels M^{-1} ab.

(a) Berechne die Matrix für die gesamte Abbildung numerisch.

(b) Berechne den Bildpunkt P_3 der gesamten Abbildung.

Probl. 8 Gegeben ist ein Dreieck durch die Punkte $P_1(1;1;0)$, $P_2(1;0;1)$, $P_3(0;1;2)$. Damit ist eine Ebene Φ definiert. g ist die Normalengerade durch den Schwerpunkt S des Dreiecks.

(a) Berechne einen Richtungsvektor $\vec{v}$ mit der Länge 1 von g numerisch.

(b) Berechne den Punkt $P_4 \in g$ mit der z–Koordinate $z = 15$.

(c) Konstruiere eine Matrix M, welche den Vektor $\vec{e}_1$ auf $\vec{v}$, den Vektor $\vec{e}_2$ auf $\overrightarrow{P_1P_2}$ und den Vektor $\vec{e}_3$ auf $\overrightarrow{P_1P_3}$ abbildet.

(d) Bilde mit Hilfe von M den Vektor $\overrightarrow{OP_1} + 2\ \overrightarrow{P_1P_2} + 2\ \overrightarrow{P_1P_3}$ ab.

(e) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle(P_1P_2P_3)$.

(f) Die Vektoren $\overrightarrow{OP_k}$, $k = 1, 2, 3$ werden mit dem zugehörigen Faktor k gestreckt. Berechne den Flächeninhalt des entstehenden neuen Dreiecks.

Viel Glück!