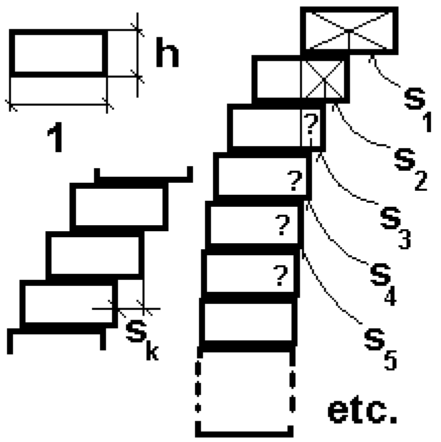
Test ◇ **B1–10//11–02** ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu **unterstreichen**.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen **Strich** zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. DP = doppelte Punktzahl.**

Probl. 1 Ein Ziegelstein $Nr.\,1$ mit konstantem Querschnitt und der Länge 1 sowie der Höhe h wird auf einen zweiten Ziegelstein $Nr.\,2$ mit denselben Massen (wie in der Skizze gezeigt) positioniert, so dass er um die Frei–Strecke s_1 über den ersten Zeigelstein nach vorne in die Luft hinaus ragt und gerade nicht hinunter fällt. Die Gruppe $Nr.\,1\,\&\,2$ wird danauch auf einen ebensolchen Ziegelstein $Nr.\,3$ gelegt, wobei jetzt $Nr.\,2$ die $Nr.\,3$ um die Frei–Strecke s_2 überragt. $Nr.\,1\,\&\,2$ sollen auch nicht fallen. Danach wird die Gruppe $Nr.\,1\,\&\,2\,\&\,3$ auf $Nr.\,4$ gelegt, wobei jetzt die Frei–Strecke s_3 ist und so weiter.



(a) Berechne $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_k,\ \ldots$ **DP !**

(b) Berechne $S := s_1 + s_2 + s_3 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k$

Probl. 2 (a) $f(x) = x \cdot \sin(x) + \dfrac{x}{\sin x}$. Berechne von Hand exakt und vereinfache so weit wie möglich:

i. $f\,'(x)$ ii. $f\,'(x)_{|_{x=\frac{\pi}{2}}}$ ($\leadsto$ $x = \dfrac{\pi}{2}$ einsetzen.)

(b) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Berechne von Hand exakt und vereinfache so weit wie möglich:

$$\int\limits_1^e f(x)\,dx = ?$$

(c) $f(x) = x^e$. Berechne von Hand exakt und vereinfache so weit wie möglich:

i. $\int\limits_1^t f(x)\,dx = ?$ ii. $\dfrac{d\int\limits_1^t f(x)\,dx}{dt} = ?$

(d) $f(x) = \dfrac{x+4}{(x+2)(x+6)}, \ \ [-1, 1].$

i. Skizziere den Graphen.

ii. Zeige von Hand die Berechnung der Partialbruchzerlegung.

iii. Leite die Partialbruchzerlegung vor Hand ab, setze danach $x = 0$.

iv. Bereche die Tangentensteigung an der Stelle $x = 0$ und daraus den Steigungswinkel in Grad.

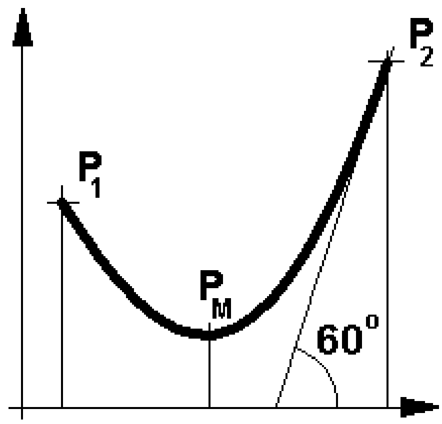
v. Berechne von Hand mit Hilfe der Partialbruchzerlegung $\int\limits_{-1}^{w} f(x)\,dx$.

Probl. 3 Gegeben: $f(x) := a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$

mit $P_1 = P_1(1;\,6),\ \ P_2 = P_1(6;\,9)$.

Der Steigungswinkel der Tangente bei P_2 beträgt 60^o.

Berechne P_3. **DP !**



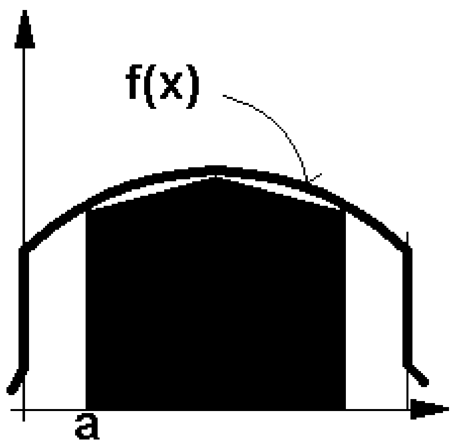
Probl. 4 Gegeben: Kettenlinie

$f(x) = c\,\cosh(\dfrac{x - x_0}{c}) + y_0$ mit

$c = -4,\ \ x_0 = 10,\ \ y_0 = 30$

(a) Die Funktion beschreibt einen Brückenbogen über $I = [0,\ 20]$. Skizziere den Bogen.

(b) Gesucht sind die Masse der maximal grossen Querschnittsfläche eines Schiffes (schwarz in der Skizze), so dass das Schiff gerade noch knapp unter der Brücke durchkommt. Dabei genügt es, den Wert $x = a$ (Skizze) zu bestimmen. **DP !**

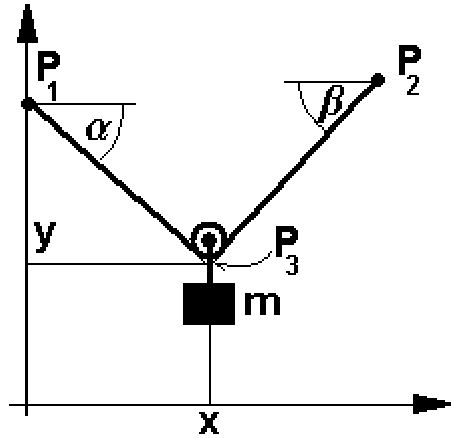


Probl. 5 Über eine Rolle wird an einem Drahtseil eine Masse m bewegt (siehe Skizze). Bekannt sind die Punkte $P_1 = P_1(0;\, 10)$ und $P_2 = P_2(8;\, 12)$ sowie die Seillänge $L = 11$. P_3 hat die Koordinaten x und $f(x)$, also $P_3 = P_3(x;\, f(x))$.

(a) Berechne $y = f(x)$ über $I = (0,\ 8)$.

(b) Suche das Minimum von $f(x)$ in I.

(c) Kontrolliere, ob für gefundene das Minimum von $f(x)$ die Vermutung $|\alpha| = |\beta|$ richtig ist.



Probl. 6 Der Graph der Funktion $h(x) = \sin^2(x) + \dfrac{1}{4}\cos(10\,x)$ wird über dem Intervall $I = [0,\, 2\,\pi]$ um die x–Achse rotiert.

(a) Skizziere den Graphen der Mantellinie des Rotationskörpers.
(b) Berechne die Kurvenlänge des Graphen (Dezimalzahl).
(c) Berechne den Inhalt des Rotationskörpers (Dezimalzahl).
(d) Berechne die Manteloberfläche des Rotationskörpers (Dezimalzahl).

Probl. 7 Gegeben ist eine Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+1)^2$ sowie ein Weg, der durch die Projektion $g(x, y) = (x+10) + (y-6)^2 - 25 = 0$ in der Grundebene beschrieben wird.

(a) Berechne die Extremalstellen von f.
(b) Berechne den tiefsten Punkt des Weges auf der Funktionsfläche.

Probl. 8 Berechne die Lösung, falls möglich:

$$y\,'(x) = \frac{x^3}{y(x)},\quad y(1) = 1$$

Probl. 9 Gegeben ist $f(x) = a_0 + a_1\,\dfrac{x}{1!} + a_2\,\dfrac{x^2}{2!} + a_3\,\dfrac{x^3}{3!} + a_4\,\dfrac{x^4}{4!} + r(x)\cdot x^5$ sowie $g(x) = \cos(x)$.

An der Stelle $x = 0$ soll gelten:
$f(0) = g(0),\ \ f\,'(0) = g\,'(0),\ \ f\,''(0) = g\,''(0),\ \ f^{(3)}(0) = g^{(3)}(0),\ \ f^{(4)}(0) = g^{(4)}(0)$

(a) Versuche daraus die Koeffizienten a_k von f zu berechnen.
(b) Skizziere f und g und bestimme graphisch den Punkt x_1 auf der positiven x–Achse, an dem der Wert $f(x_1)$ vom Wert $g(x_1)$ um mehr als 0.5 abweicht (so genau wie graphisch möglich).

Viel Glück! WIR1 010/11