Test ◇ **B1–(11/12)–03** ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne $\vec{x} = (2\,B - A) \cdot \vec{v}$.

(b) Berechne $\vec{x}$ in $(2\,B + A) \cdot \vec{x} = \vec{v}$. Ist $\vec{x}$ eindeutig bestimmt?

Probl. 2 Gegeben sind zwei Ebenen:

$$\Phi_1 : \ \vec{v}_1(\lambda, \mu) = \overrightarrow{OA_1} + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 : \ \vec{v}_2(\nu, \sigma) = \overrightarrow{OA_2} + \nu\,\vec{c} + \sigma\,\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Weiter kennt man noch den Punkte $Q(-5; -6; 8)$.

(a) Berechne den kleinsten Schnittwinkel zwischen Φ_1 und Φ_2 in Grad.

(b) Berechne den Fusspunkt des Lots (Senkrechte) von Q auf Φ_1.

(c) Berechne den Abstand des Punktes Q von Φ_2.

(d) Ermittle die Distanz von Q zur Schnittgeraden $\Phi_1 \cap \Phi_2$.

Probl. 3 Gegeben ist die Matrix $A(r) = (\vec{a}_1(r), \ \vec{a}_2, \ \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} r & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne nachvollziehbar von Hand die Determinante von $A(r)$.

(b) Untersuche, ob es einen Wert für r gibt, für den $A(r) = 0$ ist.

(c) Wie muss r gewählt werden, damit $\{\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ \vec{a}_3\}$ linear unabhängig ist?

(d) Wähle r (falls möglich) so, dass der durch $\{\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ \vec{a}_3\}$ definierte Spat den Volumeninhalt 1 besitzt.

Probl. 4 Gegeben ist ein achsenparalleler Würfel mit der Kantenlänge s, dem ein Oktaeder eingeschrieben wird. (Die Ecken des Oktaeders sitzen in den Mitten der Würfelflächen.)

(a) Berechne ersichtlich das Volumenverhältnis von Würfel und Oktaeder.

(b) Berechne für $s = 2$ die Distanz zweier gegenüber liegender Oktaederflächen.

(c) Berechne ersichtlich den Winkel zwischen zwei Oktaederflächen in Grad.

Probl. 5 Gegeben sind die Punkte $P_1(5;\,0)$, $P_2(4;\,1)$, $P_3(3.5;\,2)$, $P_4(2;\,6)$, $P_5(-1;\,5)$. Die Paare $(P_1,\,P_2)$, $(P_2,\,P_3)$, $(P_3,\,P_4)$, $(P_4,\,P_5)$ definieren zusammen mit O jeweils ein Parallelogramm.

(a) Berechne den Flächeninhalt des Gebildes.

(b) Wenn man den Punkte P_5 um $\varphi = 34.7^o$ dreht, erhält man den Punkt P_6. Erstelle die Drehmatrix D_φ numerisch.

(c) Berechne P_6 mit Hilfe von D_φ.

Probl. 6 Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 1 - 2\,i$, $z_2 = -2 - 3\,i$, $z_3 = -1 - 5\,i$.

(a) Berechne $w_1 = 5\,z_1^2 - \dfrac{z_2}{z_3}$ in der Form $a + i\,b$.

(b) Berechne alle fünften Wurzeln aus z_1 und stelle die Resultate in einer gut lesbaren Skizze dar.

(c) Berechne die Summe aller vorhin berechneten fünften Wurzeln.

Probl. 7 Gegeben sind die Punkte $A(2,\,1,\,0)$, $B(3,\,8,\,0)$, $C(-1,\,-3,\,5)$, $D(6,\,-9,\,4)$.

(a) Stelle die vier Punkte in einer Skizze dar und ermittle, ob diese Punkte ein Tetraeder bilden (Begründung).

(b) Berechne den Oberflächeninhalt des Tetraeders, falls es existiert.

Probl. 8 Durch den Punkt $M(2,\,1,\,5)$ und $r = 4$ ist eine Kugel definiert. Im Punkte $T(1,\,-0.5,\,z)$ mit $z < 5$ ist die Tangentialebene Φ an die Kugel gegeben. Berechne den Durchstosspunkt von Φ mit der x–Achse, falls dieser existiert.

WIR1-12

Viel Glück!