## Test ◇ B1–(11/12)–04 ◇

---

**Wichtig:** ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

**Probl. 1** $M = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 4 \\ 8 & -11 & 4 \\ 8 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne die Eigenwerte von $M$.
(b) Berechne die Eigenvektoren von $M$.
(c) Berechne die Eigenwerte von $M^{-1}$.
(d) Berechne die Eigenvektoren von $M^{-1}$.
(e) Berechne die Eigenwerte von $M^T$.
(f) Berechne die Eigenvektoren von $M^T$.
(g) $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ definieren zusammen mit $O$ ein Parallelogramm „$Par$“. Berechne den Inhalt „$Inh(Par)$“ und auch denjenigen des Bildparallelogramms „$Inh(M \cdot Par)$“.
(h) Berechne die Determinante von $M$ und vergleiche das Resultat mit $\dfrac{Inh(M \cdot Par)}{Inh(Par)}$.

**Probl. 2** Die Matrix $A$ definiert eine Abbildung, welche die Fixgerade $g: \ \vec{x}(t) = t \cdot \vec{v}_1$ hat ($\vec{v}_1$ wie in der letzten Aufgabe) und welche den Vektor $\vec{v}_2$ ($\vec{v}_2$ wie in der letzten Aufgabe) in $\vec{v}_2\,' = -2\,\vec{v}_2$ sowie $\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ in $\vec{w}\,' = 3\,(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ abbildet.

(a) Berechne die Matrix $A$.
(b) Sei $\overrightarrow{OQ} = 2\,\vec{v}_1 - 3\,\vec{v}_2$. Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,'$ von $\overrightarrow{OQ}$ bei der Abbildung mit $A$.
(c) Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,''$ von $\overrightarrow{OQ}\,'$ bei der Abbildung mit $A$.

**Probl. 3** Gesucht ist eine Matrix $B$, welche einen Vektor an der durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie $O$ gegebenen Ebene orthogonal spiegelt.

(a) Berechne $B$.
(b) Bilde mit $B$ den Punkt $P(5; 4, 2)$ ab.
(c) Sei $B^2 = B \cdot B, \ B^{k+1} = B^k \cdot B$. Berechne $B^{100}$.

**Probl. 4** Löse die Matrixgleichung nach $X$ auf und vereinfache, falls dies möglich ist.

$$(U^{-1} \cdot W)^{-1} \cdot (U^{-1} \cdot W) \cdot X \cdot W^T - E = (((U^{-1})^T \cdot W^T)^{-1})^T$$

%

**Probl. 5** Gegeben sind die Punkte

$$P_1(5;\,0;\,1),\;\; P_2(4;\,1;\,-1),\;\; P_3(3.5;\,2;\,10),\;\; P_4(2;\,6;\,1),\;\; P_5(-1;\,5;\,8),\;\; P_6(-2;\,12;\,0).$$

(a) Berechne eine Matrix $G$, welche $P_1$ in $P_4$ und $P_2$ in $P_5$ und $P_3$ in $P_6$ abbildet.

(b) Wenn man den Punkte $P_1$ um $\varphi = +12^o$ um die $x$–Achse dreht, erhält man den Punkt $P_7$. (Durch die Drehung wird die positive $y$–Achse in Richtung positive $z$–Achse bewegt.) Erstelle die Drehmatrix $D_\varphi$. numerisch.

(c) Berechne $P_7$ mit Hilfe von $D_\varphi$.

(d) Bilde mit Hilfe von $G$ den Punkt $P_7$ ab.

WIR1-12

Viel Glück!