Lösungen

1

1a

```
pA={x,0};
pB={0,1};
pC={0,0};
pE= 1/2 {-1,1};
pD= 1/2 {x,-x};
pF1=pA+{1,x};
pF=pB+ 1/2 (pF1-pB) //Simplify
```

$$\left\{\frac{1+x}{2}, \frac{1+x}{2}\right\}$$

```
pE-pD
```

$$\left\{-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}, \frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right\}$$

```
(pE-pD).(pF-pC)//Expand
```

0

Rechtwinklig

1b

```
Norm[pE-pD]//Simplify
```

$$\frac{\text{Abs}[1+x]}{\sqrt{2}}$$

```
Norm[pF-pC]
```

$$\frac{\text{Abs}[1+x]}{\sqrt{2}}$$

```
(Norm[pE-pD]//Simplify) == (Norm[pF-pC]//Simplify)
```

True

1c Jetzt geometrisch sichtbar

Zu (c) - es ist mir nicht bekannt, ob das Problem in der Literatur irgendwo zu finden ist. Es stammt von mir.

Bei C hat das Dreieck einen rechten Winkel. Ebenso ist der Winkel zwischen DE und CF resp. CG ein rechter, wie unter (a) gezeigt werden muss. Daher ist CG resp.HG parallel zu DA. Beachten sie, dass die Verlängerungen der Seiten der beiden kleinen Quadrate bei A und bei C sich in der Nähe von G schneiden. Nennen wir den Punkt P. Da AC und DB rechtwinklig zueinander stehen, ist auch GP rechtwinklig zu PH. und der Winkel HGP misst 45 Grad. (P und F liegen übrigens dann auf dem Thaleskreis über AB, was aber nicht gebraucht wird.)
Nun ist GC = 2 AD = 2 DC und HC = 2 BE = 2 EC und damit GC + HC = 2 DE. Benütze nun (b). Dannn ist DE = CF = 1/2 (GC + HC)= CG + 1/2 GH, F ist also der Mittelpunkt von GH (unter der Voraussetzungt, dass ich jetzt alle Punkte richtig geschrieben habe...).
Dann wir der Quotient 1.

2

2 a

```
A={{1,2,3},{3,2,1},{1,3,-2}}; A//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

```
Det[A]
```

28

2 b

```
B={{0,0,1,2,3},{1,0,u,v,w},{0,0,3,2,1},{0,2,g,h,j},{0,0,1,3,-2}}; B//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & g & h & j \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

```
Det[B]
```

−56

2 c

```
Remove[a,b,c]
```

```
v={r,s,t}; w={a,b,c};
M={w,w+v,w+2v}; Det[M]
```

```
0
```

Zeilen linear abhängig, da Differenz von Zeilen linear abhängig, nach den Elementarsubstitutionen!

3

```
pA={14,10,0};
pB={11,7,12};
pC={0,2,8};
```

3 a

```
(pB-pA).(pB-pC)
```

```
0
```

==> rechtwinklig

```
Norm[(pB-pA)]
```

$9\sqrt{2}$

```
Norm[(pB-pA)]//N
```

```
12.7279
```

```
Norm[(pB-pA)]==Norm[(pB-pC)]
```

```
True
```

3 b

```
pD = pA+(pC-pB)
```

$\{3, 5, -4\}$

3 c

```
pM = pA+1/2 (pC-pA)
```

$\{7, 6, 4\}$

```
g[t_]:= pM+t Cross[pB-pA,pB-pC]; g[t]
```

$\{7-72\,t,\ 6+144\,t,\ 4+18\,t\}$

```
solv1=Solve[Det[{pB-pA,pB-pC,g[t]-pM}]/3==3888,{t}]//Flatten
```

$\left\{t \to \frac{4}{9}\right\}$

```
%//N
```

$\{t \to 0.444444\}$

```
pS1=g[t]/.solv1
```

$\{-25, 70, 12\}$

```
solv2=Solve[Det[{pB-pA,pB-pC,g[t]-pM}]/3==-3888,{t}]//Flatten
```

$\left\{t \to -\frac{4}{9}\right\}$

```
%//N
```

$\{t \to -0.444444\}$

```
pS1=g[t]/.solv2
```

$\{39, -58, -4\}$

4

```
pA = {-1,9,9}; pB = {1,10,11}; pC = {-5,5,9};

k[x_,y_,z_]:= x^2+y^2+z^2-4z-5;
k[{x_,y_,z_}]:= k[x,y,z];
ϕ[λ_,μ_]:= pA+ λ (pB-pA) + μ (pC-pA);
pM = {0,0,2};
r=3;

k[x,y,z] == (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 -r^2//ExpandAll
```

True

```
Cross[(pB-pA),(pC-pA)]
```

$\{8, -8, -4\}$

```
gϕ[t_]:= pM + t Cross[(pB-pA),(pC-pA)]
```

4 a

```
solv1 = Solve[ϕ[λ,μ]==gϕ[t],{λ,μ,t}]//Flatten
```

$\left\{\lambda \to -2,\ \mu \to \frac{1}{4},\ t \to -\frac{3}{4}\right\}$

```
pS0 = gϕ[t]/.solv1
```

$\{-6, 6, 5\}$

```
%//N
```

$\{-6., 6., 5.\}$

```
k[gϕ[t]]==0
```

$-5-4\,(2-4\,t)+(2-4\,t)^2+128\,t^2==0$

```
solv2=Solve[k[gϕ[t]]==0,{t}]//Flatten
```

$\left\{t\to-\frac{1}{4},\ t\to\frac{1}{4}\right\}$

```
%//N
```

{t → −0.25, t → 0.25}

```
pS1 = gϕ[t]/.solv2[[1]]
```

{−2, 2, 3}

```
pS2 = gϕ[t]/.solv2[[2]]
```

{2, −2, 1}

```
%//N
```

{2., −2., 1.}

4 b

```
Norm[pS0-pS1]
```

6

```
%//N
```

6.

```
Norm[pS0-pS2]
```

12

```
%//N
```

12.

4 c

```
gMAB[t_]:= pM + t r (pB-pA)/Norm[(pB-pA)]
```

```
gMAB[1]
```

{2, 1, 4}

```
gMAB[-1]
```

{−2, −1, 0}

```
gAB[t_]:= pA + t (pB-pA)
```

```
Simplify[(gAB[t]-gMAB[1]).(gMAB[1]-gMAB[-1])]==0
```

$6\ (4 + 3\ t) == 0$

```
solv1=Solve[(gAB[t]-gMAB[1]).(gMAB[1]-gMAB[-1])==0,{t}]//Flatten
```

$\left\{t \to -\frac{4}{3}\right\}$

```
%//N
```

$\{t \to -1.33333\}$

```
pP1 = gAB[t]/.solv1
```

$\left\{-\frac{11}{3}, \frac{23}{3}, \frac{19}{3}\right\}$

```
%//N
```

$\{-3.66667, 7.66667, 6.33333\}$

```
solv2=Solve[(gAB[t]-gMAB[-1]).(gMAB[1]-gMAB[-1])==0,{t}]//Flatten
```

$\left\{t \to -\frac{10}{3}\right\}$

```
%//N
```

$\{t \to -3.33333\}$

```
pP2 = gAB[t]/.solv2
```

$\left\{-\frac{23}{3}, \frac{17}{3}, \frac{7}{3}\right\}$

```
%//N
```

$\{-7.66667, 5.66667, 2.33333\}$

4 d

```
pM = {0,0,2};
r=3;
```

4 e

```
Norm[Cross[pA,pM]]/2
```

$\sqrt{82}$

```
Norm[Cross[pA,pM]]/2 //N
```

9.05539