

## Test

◇ M1–10–02 ◇

- Wichtig:**
- ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
  - ♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
  - ♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
  - ◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
  - ♡ **Alle lösbaren Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
  - ♠ Unlösbare Aufgaben sind zu kommentieren.
  - ♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

**Probl. 1 Achtung: In dieser Aufgabe zählen nur richtige Resultate. Passieren Folgefehler, so sind die später erreichten falschen Resultate wertlos. Daher sind Kontrollen und Plausibilitätsüberlegungen angebracht!**

Durch  $A = A(3; 1; 4)$  ist die Achse  $\overrightarrow{OA}$  gegeben. Sei  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ . Dazu kennt man noch  $P_1 = P_1(2; 0; 6)$ .

- (a) Wähle den Vektor  $\vec{b} = \vec{e}_1$  und konstruiere mit  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  sowie  $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{c}$  zwei Vektoren, welche senkrecht auf  $\vec{a}$  stehen. Berechne damit die Einheitsvektoren  $\vec{e}_a, \vec{e}_c, \vec{e}_d$  für die Richtungen  $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ , numerisch und schreibe danach die Resultate so auf, dass sie beim Korrigieren sofort sichtbar sind.
- (b) Konstruiere eine Matrix  $M_1$ , welche  $\vec{e}_1$  in  $\vec{e}_a$  abbildet und  $\vec{e}_2$  in  $\vec{e}_c$  sowie  $\vec{e}_3$  in  $\vec{e}_d$ .
- (c) Bilde mit Hilfe von  $M_1^{-1}$  den Ortsvektor  $\overrightarrow{OP_1}$  in  $\overrightarrow{OP'_1}$  ab.
- (d) Konstruiere zwei Matrizen, welche  $\overrightarrow{OP'_1}$  um die  $\vec{e}_1$ -Achse (mit Blick Richtung  $O$ ) in  $\overrightarrow{OP'_2}$  um den Winkel  $\frac{2\pi}{3}$  und  $\overrightarrow{OP'_2}$  um  $\frac{4\pi}{3}$  in  $\overrightarrow{OP'_3}$  drehen.
- (e) Bilde  $\overrightarrow{OP'_2}$  und  $\overrightarrow{OP'_3}$  wieder mit  $M_1$  zurück ab in  $\overrightarrow{OP_2}$  und  $\overrightarrow{OP_3}$ . Damit erhält man eine Dreieckspyramide  $OP_1P_2P_3$  mit der Spitze in  $O$ . ( $P_2, P_3 = ?$ )
- (f) Berechne das Volumen der Pyramide.

**Probl. 2** Gegeben ist die Ebene  $\Phi: \vec{r} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ ,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Konstruiere eine Matrix  $M_2$ , welche den Ortsvektor irgend eines Punktes  $P$  in Richtung  $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  auf  $\Phi$  projiziert.
- (b) Projiziere das Dreieck  $\triangle(ABC)$  auf  $\Phi$ . Das heisst: Berechne die Koordinaten der projizierten Punkte  $A', B', C'$ .  $A = A(1; 0; 0)$ ,  $B = B(0; 1; 0)$ ,  $C = C(0; 0; 1)$ .
- (c) Berechne den Flächeninhalt von  $\triangle(ABC)$  und vergleiche diesen mit dem Inhalt von  $\triangle(A' B' C')$ .

**Probl. 3**  $M_3 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

- (a) Berechne die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von  $M_3$   
 (b) Finde ein Polynom  $P_2(X)$  mit  $X = M_3$ , dessen Wert  $P_2(M_3)$  gerade  $M_3^{-1}$  ist:  
 $P_2(M_3) = c_2 M_3^2 + c_1 M_3 + c_0 E.$  *Hinweis: Caley-Hamilton.*

**Probl. 4**  $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Berechne  $M_4^2, M_4^3, M_4^4.$  Was fällt auf?  
 (b) Berechne  $M_4^2 \cdot M_4^2, M_4^3 \cdot M_4$  und  $M_4 \cdot M_4^4.$  Was fällt auf?

**Probl. 5** Gegeben sind die Gleichungssysteme  $M_5 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$  und  $M_5 \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$  mit

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- (a) Untersuche, ob eines der beiden Systeme lösbar ist und berechne dann allenfalls die Lösung(en).  
 (b) Berechne die Ordnung (= Dimension(Urbildraum)) der beiden Systeme.  
 (c) Berechne in allfälligen Fällen, dann wenn Lösungen vorhanden sind, die Dimension des Lösungsraumes (=Dimension(Kern)).  
 (d) Berechne den Rang der Matrix  $M_5.$   
 (*Hinweis: Den Rang kann man entweder direkt berechnen. Man kann aber auch obige Resultate zur Hilfe nehmen und den Rangsatz anwenden.*)

**Probl. 6 Zusatzaufgabe:**

Gegeben ist die Gleichung  $-2x_1^2 + \frac{4x_2x_1}{\sqrt{3}} + 2x_2^2 = 52.$

- (a) Untersuche ob man hier das Muster  $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$  in der Form  $\vec{x}^T \cdot S \cdot \vec{x}$  mit Hilfe von  $S = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$  und  $X^{-1} = X^T$  schreiben kann.  
 (b) Schreibe, falls das möglich ist, die eingangs gegebene Gleichung in der Form  $\vec{x}^T \cdot S \cdot \vec{x} = \vec{x}^T \cdot X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} \cdot \vec{x}$  mit  $X^{-1} \cdot \vec{x} = \vec{y}$  etc. Was ist die einfachste Form der entstehenden Gleichung und was stellt sie geometrisch dar?

Viel Glück!