

Test

◇ E+M1 02 Analysis ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

Probl. 1 Berechne die nachfolgenden Ableitungen von Hand. (Die Herleitung wird bewertet, sofern das Resultat nicht unmittelbar sichtbar ist.) Vereinfache die folgenden Resultate so weit wie möglich. Es ist eine möglichst kurze Schreibweise anzustreben:

- (a) $f(x) = (t+1)x^{101} + tx^{22} + (t-1)x^5 + t(x-1)$, $f'(x) = ?$ (t ist Parameter.)
 (b) $f(x) = (t+1)x^{101} + tx^{22} + (t-1)x^5 + t(x-1)$, $t = 1$, $f'(1) = ?$ (numerisch)
 (Gemeint ist immer „erst ableiten, nachher einsetzen“.)
 (c) $f(x) = (a-1)x^{-a} + ax^a$, $a, x > 0$, $f'(a) = ?$ (vereinfachen!)
 (d) $f(x) = \sin(x) \ln(x)$, $f'(x) = ?$
 (e) $f(x) = \sin(x) \ln(x)$, $f'(\frac{\pi}{4}) = ?$ (numerisch)
 (f) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^3} + e^{\sin(x)}$, $f'(x) = ?$
 (g) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^3} + e^{\sin(x)}$, $f'(\pi) = ?$ (numerisch)
 (h) $f(x) = e^{3x^3-2x+1}$, $\arctan(f'(1)) = ?$ (numerisch, Steigungswinkel!)

Probl. 2 Berechne für die nachfolgenden Funktionsgraphen die erste und die zweite Ableitung und daraus die x -Stellen der allfälligen Extrema und Wendepunkte:

- (a) $f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)}$
 (b) $f(x) = \frac{\sin(x)(x-3)}{x(x-4)^2} + 1$ (nur 1. positives Extremum)
 (c) $f(x) = e^{-(x+3)^2}$
 (d) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$, $D_f = [0, 4\pi^2]$

Probl. 3 Berechne für die nachfolgenden Funktionsgraphen jeweils $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, falls der Grenzwert existiert.

- (a) $f(x) = \frac{2(x-3)(x-2)}{(2x-4)^2}$
 (b) $f(x) = \frac{\sin(x)(x-3)}{x(x-4)^2} + 1$
 (c) $f(x) = e^{-x^2+2x} \cdot x + \frac{\cos(x)+1}{x}$
 (d) $f(x) = \sin(e^{-x} + \frac{1}{x})$

- Probl. 4** (a) Wir betrachten die Figur, welche durch die x -Achse (Gerade g_x), die Funktionskurve von $y = f(x) = \sin(x)$ sowie die Senkrechte zur x -Achse durch $x = \frac{\pi}{2}$ (Gerade g_y) gebildet wird.
- i. In die durch g_x , g_y und f begrenzte Fläche wird ein achsenparalleles Rechteck gelegt und über diesem Rechteck ein Quader der Höhe „Länge plus Breite“ errichtet. Mache dir von dieser Situation eine Skizze.
Berechne die Länge und die Breite dieses Quaders, wenn sein Volumeninhalt maximal sein muss.
 - ii. Um die durch g_x , g_y und f begrenzte Fläche wird ein achsenparalleles Dreieck gelegt, welches mit der Hypotenuse die Sinuslinie berührt. Mache dir von dieser Situation eine Skizze.
Berechne die Länge dieses Dreiecks (Länge der Seite auf der x -Achse), wenn sein Flächeninhalt minimal sein muss.
- (b) Zwischen den Graphen von $f(x) = -x^{2n} + 2$, $n \in \mathbb{N}$, und die x -Achse wird ein achsenparalleles Rechteck gelegt. Berechne die Länge und die Breite dieses Rechtecks in Abhängigkeit von n , wenn der Umfang des Rechtecks maximal sein muss.