Test ◇ M2–07/08–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Laplace-Transformationen

Probl. 1 Gegeben ist die Differentialgleichung

$$4\,y''(t) - y(t) = t$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$.

(a) Berechne die Laplace–Transformierte Gleichung.

(b) Berechne daraus die Transformierte $Y(s)$ von $y(t)$ sowie die Partialbruchzerlegung von $Y(s)$.

(c) Berechne anschliessend durch Rücktransformatien die Lösung.

(d) Skizziere die Lösung zwischen $t = 0$ und $t = 5$.

Probl. 2 Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'''(t) - y(t) = \delta(t)$$

mit den Randbedingungen $y(0) = y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 1$.

(a) Berechne die Partialbruchzerlegung von $Y(s)$.

(b) Berechne anschliessend durch Rücktransformatien die Lösung.

(c) Skizziere die Lösung zwischen $t = 0$ und $t = 6$.

Probl. 3 Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(t) - y(t) = f(t)$$

mit der Anfangswertbedingung $y(0) = 1$. Dabei ist $f(t) = \sin(t)$ auf dem Intervall zwischen 0 und $T = \frac{\pi}{2}$. Weiter ist $f(t)$ periodisch mit der Periode T.

(a) Berechne die Laplace–Transformierte von $f(t)$.

(b) Berechne damit die Transformierte $Y(s)$ von $y(t)$ sowie die Partialbruchzerlegung von $Y(s)$.

(c) Die Berechnung der Lösung durch Rücktransformation von Hand oder durch ein nicht sehr ausdifferenziertes Computeralgebraprogramm wird vermutlich zeitlich mit sehr grossen Aufwand verbunden sein. Dennoch kann man anhand eines bekannten mathematischen Satzes entscheiden, ob sich das System stabil verhält, d.h. wie $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ sich verhält. Berechne diesen Limes!

Probl. 4 Gegeben ist das System

$$y'(t) + z'(t) = 0, \;\; y(t) + 2z(t) - 2y'(t) - z'(t) = u(t), \;\; u(t) = h(t) - h(t-1).$$

Dabei ist $h(t)$ der bekannte Einheitssprung. Anfangswertbedingungen: $y(0) = 0, \;\; z(0) = 0$.

(a) Berechne die Lösung rechts von 0 mit Hilfe von Laplace-Transformationen.

(b) Skizziere die Lösungen.

Probl. 5 Gegeben ist die Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$. Berechne den zu $t = 0$ gehörenden Punkt der Evolute.

Viel Glück!