

Test

◇ M2-07/08-02 ◇

- Wichtig:**
- ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
 - ♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
 - ♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
 - ◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
 - ♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

Probl. 1 Sei die 2π -periodische Funktion $f(x)$ gegeben durch $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $(0, 2\pi)$.

- (a) Bestimme die Fourierreihe von f .
 (b) Berechne damit die folgenden Reihen:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Hinweis: Dirichletsche Bedingung für die Konvergenz ... An den Sprungstellen Konvergenz gegen das arithmetische Mittel ... Parseval ...

- (c) Durch f wird nun eine Funktion beschrieben, die im Labor mittels Überlagerung von Sinus- und Cosinusfunktionen erzeugt werden soll. Man verwendet dazu einfach die ersten hundert Glieder der jeweiligen Summen in der Fourierreihe von f und bricht dann ab. Wie verhält sich voraussichtlich die so konstruierte Näherungsfunktion an den Sprungstellen von f ?
(Stichwortartige Begründung.)
- (d) Skizziere und beschreibe die einfachste stetige Funktion, die als Fourierreihe eine reine Sinusreihe hat, 8π -periodisch ist und auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ durch $f(x) = x^2$ gegeben ist. Begründe die Wahl.

Probl. 2 (a) Suche die Fourierreihe für die Funktion

$$f_1(t) = \begin{cases} t & t \in [0, \pi) \\ \text{sonst periodisch} & T = \pi \end{cases}$$

- (b) Bestimme mit Hilfe der jetzt bekannten Fourierreihe die Fourierreihe der zweiten Funktion

$$f_2(t) = \begin{cases} 3 - t & t \in [0, \pi) \\ \text{sonst periodisch} & T = \pi \end{cases}$$

Probl. 3 (a) Suche die Fourierreihe für die Funktion

$$f_3(x) = \begin{cases} 2 + 2 \cos(x) & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{sonst periodisch} & \text{Periode} = \pi \end{cases}$$

- (b) Kann man bei dieser Reihe beurteilen, ob und allenfalls wie das Gibbs'sche Phänomen hier zur Wirkung kommt?
- (c) Differenziere diese Fourierreihe gliedeweise. Welche Fourierreihe $f_4(x)$ entsteht jetzt und konvergiert diese Reihe noch?
- (d) Im Falle der Konvergenz: Welche allenfalls einfache Funktion wird durch f_4 dargestellt?
- (e) Schreibe die oben gegebene Fourierreihe $f_4(x)$ in komplexer Darstellung.
- (f) Bestimme daraus das Amplitudenspektrum und das Phasenspektrum (die ersten 4 Werte genügen allenfalls, falls man kein allgemeines Gesetz sieht).

Probl. 4 Gegeben sind die Messwerte $\{(0, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (5, 3), (6, 2), \dots\}$. Wie man sieht, zeigt sich nach den ersten 3 Messwerten eine Periodizität: $y_k = y_{k+3}$.

- (a) Bestimme mittels DFT eine Fourierreihe für diese Messserie und stelle die erhaltene Funktion sowie die Messwerte in einer Skizze dar.
- (b) Ist es hier möglich, eine FFT zu machen?
- (c) Beschreibe in wenigen Sätzen, wie man die Messungen gewinnen müsste, um mit FFT arbeiten zu können.

Probl. 5 Sei $H(x)$ die Einheitssprungfunktion mit der Sprungstelle $x = 0$ und $H(x - k)$ diejenige mit der Sprungstelle $x = k$. Weiter sind folgende Funktionen gegeben:

$$f_1(x) = (H(x + 2) - H(x - 2)), \quad f_2(x) = (4 - x^2) (H(x + 2) - H(x - 2)),$$

$$F_3(\Omega) = \frac{(\cos(\Omega) + \sin(\Omega))}{\Omega}$$

- (a) Skizziere die Funktion $f_1(x)$.
- (b) Skizziere die Funktion $f_2(x)$.
- (c) Berechne die Fouriertransformierte von $f_1(x)$
- (d) Berechne die Fouriertransformierte von $f_2(x)$
- (e) Berechne die inverse Fouriertransformierte von $F_3(\Omega)$

Probl. 6 Technisch-wissenschaftliche Fachlektüre, Testverständnis:

Lese das beiliegende Blatt aufmerksam durch und beantworte die folgenden Fragen:

- (a) Im Text wird gezeigt, dass man mit Hilfe eines Separationsansatzes zu Basislösungen gelangen kann. Welche unbekanntenen Funktionsanteile im Zusammenhang mit den Basislösungen kann man dann mit Hilfe der Fouriertransformation berechnen?
- (b) Sei $c = 1$ und $f(x) = 1, x \in [-1, 1], f(x) = 0$ sonst. Sei $g(x) = f(x - 100) \cdot f(x)$. Berechne $\hat{f}(\lambda)$ und $\hat{g}(\lambda)$.
- (c) Berechne damit die Lösung für das eingangs gestellte Problem und die eben gegebenen Parameter resp. Funktionen für $x = t = 1$.

Viel Glück!

Fouriertransformationen und partielle Differentialgleichungen

Bsp.: Wir studieren das Beispiel einer einfachen Wellengleichung mit nur einer Ortsvariablen. Sei dabei $|u(x, t)|$ beschränkt und $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\begin{aligned} c^2 u''_{xx} - u''_{tt} &= 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(x, 0) &= f(x) & x \in \mathbb{R}, (ABD) \\ u_t'(x, 0) &= g(x) & x \in \mathbb{R}, (ABD) \end{aligned}$$

Wir machen den Separationsansatz: $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Daraus folgt:

$$X \cdot T''_{tt} = c^2 \cdot X''_{xx} \cdot T \Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot X \cdot T''_{tt} = X''_{xx} \cdot T \Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''_{tt}}{T} = \frac{X''_{xx}}{X} := \pm \lambda^2, \lambda \in \mathbb{R}$$

Da die linke und die rechte Seite der letzten Gleichung von verschiedenen Variablen abhängen, erhalten wir daraus zwei separate Gleichungen. Jeweils der linke Ausdruck ist gleich $\pm \lambda^2$. \leadsto

$$T''_{tt} = \pm \lambda^2 c^2 T \quad \text{und} \quad X''_{xx} = \pm \lambda^2 \cdot X$$

Je nach „+“ oder „-“ erhalten wir damit die Lösungspaare:

$$T = C_1 \cdot e^{\pm \lambda c t}, \quad X = C_2 \cdot e^{\pm \lambda x} \quad \text{und} \quad T = A \cdot e^{\pm i \lambda c t}, \quad X = B \cdot e^{\pm i \lambda x}$$

Das ergibt die folgenden Kombinationen:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= C_1 \cdot e^{i \lambda(x-ct)} \\ u_2(x, y) &= C_2 \cdot e^{i \lambda(x+ct)} \\ u_3(x, y) &= C_3 \cdot e^{-i \lambda(x-ct)} \\ u_4(x, y) &= C_4 \cdot e^{-i \lambda(x+ct)} \end{aligned}$$

Diese vier Funktionen lassen sich trigonometrisch als Linearkombinationen von $\cos(\pm \lambda(x+ct)) = \cos(\lambda(x+ct))$ und $\cos(\pm \lambda(x-ct)) = \cos(\lambda(x-ct))$ sowie $i \sin(\pm \lambda(x+ct)) = \pm i \sin(\lambda(x+ct))$ und $i \sin(\pm \lambda(x-ct)) = \pm i \sin(\lambda(x-ct))$ linear zusammensetzen. Dafür genügt aber schon die Basis $\{\cos(\lambda(x+ct)), \cos(\lambda(x-ct)), i \sin(\lambda(x+ct)), i \sin(\lambda(x-ct))\}$. Diese Basis lässt sich, wie man leicht sieht, aus $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ gewinnen, womit $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ als Basislösungen genügen. Damit ist bei gegebenen λ die folgende Funktion $u_\lambda(x, t)$ eine Lösung:

$$u_\lambda(x, t) = C_1(\lambda) \cdot e^{i \lambda(x-ct)} + C_2(\lambda) \cdot e^{i \lambda(x+ct)} = e^{i \lambda x} \cdot (C_1(\lambda) \cdot e^{-i \lambda c t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i \lambda c t})$$

Wir definieren nun: $l := \frac{2\pi}{\lambda}, \nu := \frac{c}{l}, \omega = 2\pi\nu \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \nu = \frac{c}{l} = \frac{c\lambda}{2\pi} \Rightarrow \lambda c = \omega$

Damit wird: $u_\lambda(x, t) = e^{i \lambda x} \cdot (C_1(\lambda) \cdot e^{-i \omega t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i \omega t})$

Nun gilt für $c^2 u''_{xx} - u''_{tt} = 0$ das „Superpositionsprinzip“: Zu zwei Lösungen $u_{\lambda_1}(x, t)$ und $u_{\lambda_2}(x, t)$ ist auch jede Linearkombination $\alpha u_{\lambda_1}(x, t) + \beta u_{\lambda_2}(x, t)$ Lösung. Speziell ist also $u_{\lambda_1}(x, t) + u_{\lambda_2}(x, t)$ eine Lösung. Da für λ einzig die Forderung $\lambda \in \mathbb{R}$ gemacht worden ist, kann λ nicht als diskreter Summationsindex angenommen werden. Statt von einer Summenlösung mit beliebig vielen Summanden müssen wir daher eine Integrallösung als „Superposition“ annehmen:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i \omega t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i \omega t}) \cdot e^{i \lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i \lambda c t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i \lambda c t}) \cdot e^{i \lambda x} d\lambda$$

Dabei erhalten wir als Anfangsbedingungen für $t = 0$ die Anfangsintegrale:

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = f(x) \quad \text{und}$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = g(x)$$

Diese Integrale erkennen wir aber als die **Fourier-Rücktransformaten** von $v(\lambda) := (C_1(\lambda) + C_2(\lambda))$ und von $w(\lambda) := i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda))$. Daher sind $v(\lambda)$ und $w(\lambda)$ die **Fourier-Transformierten** von $f(x)$ und $g(x)$.

Dazu kennen wir die Formeln:

$$v(\lambda) := (C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

$$w(\lambda) := i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

$$\Rightarrow C_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left(v(\lambda) - \frac{w(\lambda)}{i\lambda c} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) - \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right), \quad C_2(\lambda) = \frac{1}{2} \left(v(\lambda) + \frac{w(\lambda)}{i\lambda c} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) + \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda ct}) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) - \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right) \cdot e^{-i\lambda ct} + \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) + \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right) \cdot e^{i\lambda ct} \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hat{f}}{2} (e^{-i\lambda ct} + e^{i\lambda ct}) - \frac{1}{\lambda c} \frac{\hat{g}}{2i} (e^{-i\lambda ct} - e^{i\lambda ct}) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f} \cos(\lambda ct) - \frac{1}{\lambda c} \hat{g} \sin(\lambda ct) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

Folgerung: Damit erhalten wir die folgende **Lösung** von $c^2 u''_{xx} - u''_{tt} = 0$ und obigen Anf'bed.:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(\lambda) \cos(\lambda ct) - \frac{1}{\lambda c} \hat{g}(\lambda) \sin(\lambda ct) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda \quad \text{mit}$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx, \quad \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$