

Test

◇ M2–10/11–01 ◇

- Wichtig:**
- ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
 - ♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
 - ♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
 - ◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
 - ♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
- Viel Glück!**

Laplace-Transformationen, Differentialgleichungen, Statistik, Kombinatorik

Probl. 1 Abgabe des vorgängig behandelten Problems mit einer Modellierung eines oder mehrerer Körper und / oder mit der Evolvente und der Evolute:

- (a) Output mit Namen, Datum und Klasse beschriftet.
- (b) Zudem nach der Prüfung elektronisch per Mail mit Namen und Klasse im Filename erkennbar. (Achtung: Wenn möglich nur Source Code übermitteln, sofern ein Programm benutzt worden ist, auf das im Schulnetzwerk ein uneingeschränkter Zugriff existiert.)

Probl. 2 $f(t) = \sin(3t + \pi) + \cos(3t) + t \cdot e^{-3t}$, $f(t) \circ \bullet F(s)$

- (a) Zeige die Berechnung der Laplace-Transformierten $F(s)$ mit Hilfe von Tabellen (Resultat in natürlicher Form mit drei Summanden, so weit wie möglich vereinfacht).
- (b) Berechne $F(3)$ (einfachstes Endresultat).
- (c) Was ergibt sich bei der Berechnung von $F(-3)$? (Kommentar?)

Probl. 3 Berechne die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t)$. Dabei ist $f(t)$ intervallweise wie folgt definiert:

$$f(t) := t \text{ für } t \in (-\infty, 1), \quad f(t) := 1 \text{ für } t \in [1, \frac{\pi}{2}), \quad f(t) := \sin(t) \text{ für } t \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$$

Das Resultat ist in Form einer Partialbruchentwicklung zu geben, wobei eine etwa auftretende Funktion e^{-s} als $\rho(s)$ zu schreiben ist.

Probl. 4 Gegeben ist das Differentialgleichungssystem mit den Anf'bed. $x(0) = 0$, $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned} x'(t) - 2y(t) &= \delta(t) \\ x(t) + y'(t) &= -\sin(t) \end{aligned}$$

- (a) Berechne das transformierte Gleichungssystem.
- (b) Berechne die Transformierten $X(s)$ und $Y(s)$ in einfacher Darstellung (Partialbruchzerlegung!).
- (c) Berechne, falls möglich, die Rücktransformierten $x(t)$ und $y(t)$.

Probl. 5 Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 1$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y_0' = 1$.

- Berechne die Laplace-Transformierte $Y(s)$ in Partialbruchdarstellung.
- Berechne daraus die Rücktransformierte $y(t)$ in ausmultiplizierter Form.
- Erstelle eine saubere Skizze von $y(t)$ für $t \in [0, 7]$.
- Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$?

Probl. 6 Gegeben sind zwei Datensätze M_1 und M_2 . Dabei handelt es sich um die Durchmesser von je einer Stichprobe aus zwei Sendungen mit Bolzen, gemessen in Millimetern:

$$M_1 = \{6.36, 6.56, 6.42, 6.27, 6.36, 6.47, 6.29, 6.54, 6.3, 6.55, \\ 6.46, 6.49, 6.38, 6.4, 6.35, 6.41, 6.56, 6.25, 6.34\}$$

$$M_2 = \{6.55, 6.48, 6.51, 6.51, 6.43, 6.51, 6.35, 6.46, 6.31, 6.31, \\ 6.58, 6.51, 6.54, 6.35, 6.39, 6.59, 6.4, 6.5, 6.57\}$$

- Berechne für jede Stichprobe die folgenden statistische Kenngrößen: Die Lagemasse Minimum, Maximum, arithmetisches Mittel und den Median.
- Berechne für jede Stichprobe die Streumasse Standardabweichung und Quartilsdifferenz.
- Entscheide, ob es in der Stichprobe „schwache Ausreisser“ gibt, welche um mehr als 2 mal die Standardabweichung vom Mittelwert entfernt liegen.
- Zeichne für die Stichproben nebeneinander die beiden Box- and Whisker-Plots und beurteile damit, ob die Exemplare in den beiden Sendungen von demselben Lieferanten in Ostasien stammen können.

Probl. 7 Du bist Abteilungsleiter in einer Firma mit 14 Mitarbeitern in deiner Abteilung. Deine Leute arbeiten an Maschinen, welche alle in einer Reihe in einer langen Halle stehen.

- Auf wieviele Arten kannst du zur Lärmverminderung die Halle der Breite nach in drei Räume aufteilen, indem man exakt zwei Zwischenwände einbaut?
- Auf wieviele Arten kannst du die Mitarbeiter in 3 Gruppen so einteilen, dass zwei Gruppen zu 5 und eine Gruppe zu 4 Mitarbeitern entstehen?
- Auf wieviele Arten kannst du die Gruppen bilden und darin noch je einen Gruppenchef wählen?

Probl. 8 Du warst geschäftlich auf einer Insel, von welcher bekannt geworden ist, dass dort eine gewisse Mücke aufgetaucht sei, die eine schwere Krankheit überträgt. Auch ist es Tatsache, dass von 10 beliebig oft gestochenen Menschen im Mittel einer infiziert wird. Die Krankheit hat eine Inkubationszeit von 3 Monaten, bis sie ausbricht. Momentan steht aber ein Test zur Verfügung, welcher jedoch nur in 70 % der Fälle das richtige Resultat liefert. Falls du nicht infiziert bist und du dich fälschlicherweise behandeln lässt, sind die Nebenwirkungen etwa halb so schwerwiegend wie im Fall, dass dich die Krankheit trifft. Stelle die vorhandenen Wahrscheinlichkeiten einander gegenüber. Fülle damit ein Urteil darüber, ob es vorteilhaft für dich ist, den Test zu machen mit der davon abhängigen Behandlung.