Test $\diamondsuit$ **M2–09/10–02** $\diamondsuit$

Wichtig: $\heartsuit$ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
$\clubsuit$ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
$\spadesuit$ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
$\diamondsuit$ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
$\heartsuit$ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

Probl. 1 Gegeben ist die $2\,\pi$–periodische Funktion $f_1(t) = -t$, Fundamentalintervall $FI = (-\pi,\, \pi)$.

(a) Zeige die Berechnung der Fourierreihe $\tilde{f}_{1,\,6}(t)$ bis $n = 6$ exakt.

(b) Berechne $\Delta_{rel} = (\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^2(t)\,dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_{1,\,6}^2(t)\,dt)/(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^2(t)\,dt)$. (*Hinweis:* Parseval)

(c) Beurteile, ob es sich bei der Fourierreihe um eine reine Cosinus- oder Sinusreihe handelt.

(d) Bestimme die allgemeine Form der Reihe ($n = \infty$).

(e) Berechne den Wert der Reihe an der Stelle $t = \frac{\pi}{2}$ exakt: $f(\frac{\pi}{2}) = \sum\limits_{?}^{?}\, ? = ?$

(f) Berechne die Werte $\tilde{f}_{1,\,n}(\frac{\pi}{2})$ für $n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, 6$ numerisch und beobachte, ob sich die Werte in eine Richtung bewegen oder ob und somit wie sie oszillieren. Beschreibe das Verhalten.

(g) Skizziere den Graphen der Fourierreihe $\tilde{f}_{1,\,6}(t)$ (für $n = 6$) über dem angegebenen Fundamentalintervall.

(h) Lese aus dem Graphen für $n = 6$ ab, wieviele horizontale Tangenten es an den Graphen innerhalb einer Periode gibt.

(i) Bestimme die komplexe Form der Fourierreihe bis $n = 6$ exakt (nicht numerisch).

Probl. 2 Gegeben ist die 1–periodische Funktion $f_2(t) = -t$ auf dem $FI = (-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2})$. Gegenüber der letzten Aufgabe hat somit die Periode T und das FI geändert.

(a) Ermittle die Fourierreihe $\tilde{f}_{2,\,6}(t)$ (bis $n = 6$) exakt.

(b) Bestimme die allgemeine Form der Reihe ($n = \infty$).

(c) Berechne den Fehler, d.h. die Abweichung der Reihe bis $n = 6$ an der Stelle $t = \frac{1}{4}$ exakt.

(d) Skizziere den Graphen der Fourierreihe $\tilde{f}_{2,\,6}(t)$ (für $n = 6$) über dem angegebenen FI.

(e) Bestimme die komplexe Form der Fourierreihe bis $n = 6$ exakt (nicht numerisch).

Probl. 3 Sei die 2π–periodische Funktion $f_3(t)$ gegeben durch $f(t) = (|-t+\pi| + \cos(\frac{t}{2}))$ über dem $FI = (-\pi,\, \pi)$.

(a) Bestimme die Fourierreihe $\tilde{f}_{3,4}(t)$ von $f_3(t)$ bis und mit $n = 4$ (Koeffizienten numerisch).

(b) Bestimme den Graphen der Fourierreihe $\tilde{f}_{3,4}(t)$ von $f_3(t)$ (bis und mit $n = 4$).

Probl. 4 (a) Suche die 2π–periodische Fourierreihe für die Funktion (bis $n = 6$ oder allgemein):

$$f_4(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 & t \in [0,\, \pi) \\ 0 & t \in [\pi,\, 2\pi) \end{cases}$$

(b) Die Fourierreihe $f_4(t)$ kann man als Funktion für eine periodisch ein– und ausgeschaltete konstante Spannung interpretieren. Was hat daher eine solche Spannung mit harmonischen Schwingungen zu tun?

(c) Beurteile, ob bei der Reihe für $f_4(t)$ das Gibbs'sche Phänomen zur Wirkung kommt!

(d) Differenziere die Fourierreihe für $f_4(t)$ und zeichne den Graphen für ein selbst gewähltes vernünftiges n. Beurteile, ob man das Resultat hier angesichts der einfach bestimmbaren Ableitung der Funktion $f_4(t)$ praktisch verwenden könnte.

(e) Ersetze t in $f_4(t)$ durch $c \cdot x$ und wähle c so, dass $g_4(c \cdot x) = f_{4,c}(x)$ eine Funktion mit der Periode $T = 2$ wird.

(f) Bestimme die Fourierreihe der Funkton $h_{4,\sin}(t) = f_4(t) \cdot \sin(t)$.

Probl. 5 Gegeben sind die Messwerte $(0,\, 0)$, $(\frac{2\pi}{3},\, 1)$, $(2\,\frac{2\pi}{3},\, 3)$, $(3\,\frac{2\pi}{3},\, 0)$, $(4\,\frac{2\pi}{3},\, 1)$, $(5\,\frac{2\pi}{3},\, 3)$, $(6\,\frac{2\pi}{3},\, 0)$, … Wie man sieht, zeigt sich nach den ersten 3 Messwerten eine Periodizität: $y_k = y_{k+3}$. Bestimme die Koeffizienten $\tilde{c}_s$ für die DFT.

Probl. 6 Sei $f(x) = e^{-x^2}$

(a) Zeige die Berechnung der Fouriertransformierten $\hat{f}(\Omega)$ von $f(x)$, falls diese existiert.

(b) Skizziere $f(x)$ und $\hat{f}(\Omega)$, falls diese möglich ist.

(c) Was ist bemerkenswert am Resultat?

Probl. 7 Sei $f_{a,b,c}(x) = c$ für $x \in [a,\, b]$ — und $f_{a,b,c}(x) = 0$ für $x \notin [a,\, b]$

(a) Ermittle die Fouriertransformierte $\hat{f}(\Omega)$ von $f_{a,b,c}(x) = f_{1,2,3}(x)$.

(b) Ermittle die Fouriertransformierte $\hat{f}(\Omega)$ von $f_6(x) = f_{1,2,3}(x) + f_{4,5,6}(x)$.

Viel Glück!