

## Ausbau Matrizenrechnung: Eigenwerte und Eigenvektoren

**Probl. 1** Gegeben sind:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- Berechne  $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$ .
- Berechne die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  von  $A$ . Was fällt bezüglich  $D$  auf?
- Berechne die Eigenvektoren  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  von  $A$ . Was fällt bezüglich  $B$  auf?
- Berechne die Zerlegung von  $\vec{v}$  nach den Eigenvektoren:  $\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \beta_1 \cdot \vec{x}_2$ .
- Berechne  $A \cdot \vec{v}$ .
- Berechne  $\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \beta_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{x}_2$ .

**Probl. 2** Gegeben seien:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

- Berechne  $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$ .
- Berechne die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  von  $A$ .
- Berechne die Eigenvektoren  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$  von  $A$ . Was fällt bezüglich  $D$  auf?
- Berechne die Zerlegung von  $\vec{v}$  nach den Eigenvektoren:  $\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \beta_1 \cdot \vec{x}_2 + \gamma_1 \cdot \vec{x}_3$ .  
Was fällt bezüglich  $B$  auf?
- Berechne  $A \cdot \vec{v}$ .
- Berechne  $\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \beta_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \gamma_1 \cdot \lambda_3 \cdot \vec{x}_3$ .

**Probl. 3** Wähle  $B, D$  und  $\vec{v}$  nach eigener Wahl, sodass  $B^{-1}$  existiert. Führe damit obige Rechnungen ebenfalls durch. Stellt man damit die selben Zusammenhänge fest wie oben?

**Probl. 4** Gegeben ist eine Vektorfunktion  $\vec{v}(t)$ . Dazu ist noch eine Matrix  $A$  gegeben:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + t \\ \ln(t+1) + \sin^2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Skizziere die Kurve  $\vec{v}(t)$ ,  $t \in [0, 7]$ .
- Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$ .
- Skizziere  $A \cdot \vec{v}(t)$ ,  $t \in [0, 7]$ .
- Erkläre die Abbildung mittels der Eigenwerte und Eigenvektoren.