

Eigenwertprobleme: Inverse, Transponierte, Diagonalisierung

Probl. 1 (a) Sei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

i. Bilde $X = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

ii. Berechne $\det(X)$. Ist $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ l.u.?

iii. Bilde $D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ und berechne damit $A = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$.

iv. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von A . Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

v. Vergleiche $\det(A)$ mit $\det(D_\lambda)$.

(b) Sei $A_1 = A^{-1}$.

i. Berechne A_1 .

ii. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von A_1 . Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

iii. Vergleiche $\det(A_1)$ mit $\det(D_\lambda^{-1})$.

(c) Sei $A_2 = A^T$.

i. Berechne A_2 .

ii. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von A_2 . Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

iii. Vergleiche $\det(A_2)$ mit $\det(D_\lambda)$.

Probl. 2 (a) Sei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i. Bilde $Y = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

ii. Berechne $\det(Y)$. Ist $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ l.u.?

iii. Bilde $E_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ und berechne damit $B = Y \cdot E_\lambda \cdot Y^{-1}$.

iv. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von B . Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

v. Vergleiche $\det(B)$ mit $\det(E_\lambda)$.

(b) Sei $B_1 = B^{-1}$.

i. Berechne B_1 .

ii. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von B_1 . Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.

- iii. Vergleiche $\det(B_1)$ mit $\det(E_\lambda^{-1})$.
- (c) Sei $B_2 = B^T$.
- i. Berechne B_2 .
 - ii. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von B_2 . Vergleiche mit den eingangs gegebenen Werten.
 - iii. Vergleiche $\det(B_2)$ mit $\det(E_\lambda)$.