Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 14 ◇

Eigenwertprobleme: Diverse Anwendungen

Probl. 1 Gegeben sind die Punkte $P_1(2,1),\ P_2(3,2),\ P_3(1,3)$. Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = 71^o$. Drehe damit das Dreieck $F_1 = \triangle(P_1P_2P_3)$ um φ und berechne die Eckpunkte des Bilddreiecks $F_2 = \triangle(Q_1Q_2Q_3)$. Skizziere die Situation.

Probl. 2 Gegeben ist Gerade $g: \ \vec{v} = \vec{0} + t \cdot \vec{x}_1$ mit $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte P_1, P_2, P_3 aus der obigen Aufgabe. Konstruiere die Spiegelungsmatrix $S(g)$. Spiegele damit das Dreieck $F_1 = \triangle(P_1P_2P_3)$ und berechne die Eckpunkte des Bilddreiecks $F_3 = \triangle(S_1S_2S_3)$. Skizziere die Situation.

Probl. 3 Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $S(g)$ in der letzten Aufgabe. Was fällt auf?

Probl. 4 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Kontrolliere, ob diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden zusammen mit dem Ursprung O eine Ebene Φ. $\vec{u}$ zeigt die Projektionsrichtung bei der Projektion auf Φ an. Konstruiere die Projektionsmatrix und projiziere das Dreieck $F_3 = \triangle(T_1T_2T_3)$ auf die Ebene Φ (Dreieck $F_4 = \triangle(N_1N_2N_3)$). Dabei ist $T_1 = T_1(0,2,3),\ T_2 = T_2(1,1,0),\ T_3 = T_3(2,0,2)$.

Probl. 5 Suche die Matrix, welche in der letzen Aufgabe die Punkte P_k in die Punkte M_k abbildet. Dabei ist $\overrightarrow{OM_k} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OT_k} + \overrightarrow{ON_k})$. Berechne dazu die Eigenwerte und die Eigenvektoren. Fällt etwas auf?

Probl. 6 Durch die Gerade $g: \ \vec{x} = \vec{0} + t \cdot \vec{a},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ist eine Drehachse im Raum gegeben. Das oben genannte Dreieck $F_3 = \triangle(T_1T_2T_3)$ soll um g mit Blickrichtung $-\vec{a}$ um $+56^o$ gedreht werden. Konstruiere die Drehmatrix und berechne die Eckpunkte $R_1,\ R_2,\ R_3$ des gedrehten Dreiecks.

Probl. 7 Durch den Ursprung O, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Ebene Φ im Raum gegeben. Das oben genannte Dreieck $F_3 = \triangle(T_1T_2T_3)$ soll an Φ gespiegelt werden. Konstruiere die Spiegelungsmatrix und berechne die Eckpunkte $S_1,\ S_2,\ S_3$ des gespiegelten Dreiecks. (Hinweis: Verwende Eigenwerte und Eigenvektoren.)
Kontrolliere, ob die Mittelunkte M_k der Strecken $\overline{T_kS_k}$ in Φ liegen.

WIR