

Übungen in Analysis

◇ E+M 2 05 ◇

Probl. 1 Untersuche die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D_f \mapsto W_f \subseteq \mathbb{R}$ auf Stetigkeit. Fertige dir dazu die Graphen an. Betrachte jeweils auch eine analoge Situation $h : \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}$. (Aus den Graphen kann man leicht die Unstetigkeitsstellen ermitteln: Sprungstellen, Sprunglinien, Bereiche wo die Funktion nicht definiert ist...)

- (a) $h_1(x) = \arcsin(\sin(x))$, $f_1(x, y) = \arcsin(\sin(x + y))$
- (b) $h_2(x) = \arcsin((\sin(x))^2)$, $f_2(x, y) = \arcsin((\sin(xy))^2)$
- (c) $h_3(x) = \arctan(\tan(x))$, $f_3(x, y) = \arctan(\tan(xy))$
- (d) $h_4(x) = \sqrt{\cos(x)}$, $f_4(x, y) = \sqrt{\cos(x - y)}$
- (e) $h_5(x) = \sin(e^{x-x^2})$, $f_5(x, y) = \sin(e^{x-y^2})$
- (f) $h_6(x) = \frac{1}{1 - \cos^2(x)}$, $f_6(x, y) = \frac{1}{1 - \cos(x) \cos(y)}$

Probl. 2 Ermittle jeweils den Gradienten!

- (a) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
- (b) $f(x, y) = e^{\cos(1-x^2-y^2)}$
 - i. Skizziere hier auch das Gradientenfeld (d.h. skizziere in möglichst vielen Punkten der Ebene den Gradienten).
 - ii. Skizziere hier auch die Funktionsfläche.
 - iii. Skizziere ebenfalls die Höhenlinienkarte der Funktion.
 - iv. Versuche, das Gradientenfeld und die Funktionsfläche in einem Graphen zu zeigen.

Probl. 3 Berechne von der Funktion $f(x, y) = e^{\cos(1-x^2-y^2)}$ folgende Dinge:

- (a) Den Gradienten und die Richtungsableitung im Punkte $P_0(1, 1)$.
- (b) Die Richtungsableitung $r(t)$ in den Punkten $P(t, t)$.
- (c) Skizziere $r(t)$ als Funktion von t .

Probl. 4 Berechne von der Funktion $f(x, y) = e^{\cos(1-x^2-y^2)}$ folgende Dinge:

- (a) Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $P_0(1, 1)$.
- (b) Skizziere diese Tangentialebene an die Funktionsfläche.

Probl. 5 Gegeben ist die Gleichung aus der geometrischen Optik

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Für die Messwerte $f = 7 \text{ cm} \pm 0.2 \text{ cm}$, $g = 21.5 \text{ cm} \pm 0.4 \text{ cm}$ soll $b \pm \Delta b$ ermittelt werden.

WIR1