Übungen in Analysis ◇ E+M 2 06 ◇

Probl. 1 Schreibe $|grad(f(x,y))|^2$ in Polarkoordinaten!

Probl. 2 Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 1 - x^2 - 2\,(y+1)^2.$$

(a) Berechne die Lage allfälliger Extrema.

(b) Berechne die Richtungsableitung im Punkte $P = (0,2)$ in die Richtung eines Vektors, der aus $\vec{e}_1$ durch Drehung in positiver Richtung um 30^o entstanden ist.

(c) Berechne den Steigungswinkel der Tangente im Punkte P_0.

(d) Berechne den maximalen Steigungswinkel der Tangente in P_0.

(e) Berechne eine Gleichung der Tangentialebene Φ in diesem Punkte und daraus die Schnittpunkt von Φ mit der x–Achse.

(f) Durch $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\,(t-1)\,(t+2) - 2 \\ t \end{pmatrix}$ ist in der Grundebene eine Kurve definiert. Über dieser Kurve ist auf der Funktionsfläche die Spur $|\gamma|$ eines Weges γ definiert. Skizziere die Funktionsfläche und $|\gamma|$ sowie eine Höhenlinienkarte.

(g) Berechne den maximalen Punkt auf $|\gamma|$.

(h) Berechne die totale Ableitung von $f(x(t), y(t))$ nach t.

Probl. 3 Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{10}{3\,(x-1)^2 + 5\,(y+1)^2 + 10} + \frac{14}{2\,(x+1)^2 + 5\,(y-2)^2 + 10}.$$

(a) Skizziere den Graphen und ebenfalls die Höhenlinienkarte der Funktion.

(b) Berechne die Lage allfälliger Extrema.

(c) Berechne die Richtungsableitung im Punkte $P_0 = (0,2)$ in die Richtung eines Vektors, der aus $\vec{e}_1$ durch Drehung in positiver Richtung um 30^o entstanden ist.

(d) i. Berechne in P_0 die Tangentialebene und den Durchstosspunkt der z–Achse durch diese Ebene.

ii. Berechne den grössten Neigungswinkel dieser Ebene.

iii. Berechne die Lage desjenigen Punktes, über dem die Funktion $f(x,y)$ den grössten Wert auf dem Weg annimmt, der über der Kurve $g(x,y) = y - x^2 = 0$ definiert ist.

% Rückseite

Probl. 4 (a) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f_1(x) = e^{-x^2}, \ x_0 = 0, \ n = 8$. Dabei soll die Potenzreihenentwicklungen von e^x verwendet werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)

(b) Berechne approximativ mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung bis zum n–ten Glied:
$\int\limits_{-2}^{2} f_1(x)\, dx = ?$

i. für $n = 8$,

ii. für $n = 100$.

iii. Vergleiche die Ergebnisse mit dem Taschenrechnerresultat bei numerischer Integration.

(c) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f_2(x) = \cos(x^2) + e^{x^2}, \ x_0 = 0, \ n = 8$. Dabei sollen die Potenzreihenentwicklungen von e^x sowie von $\cos(x)$ verwendet werden. (Das Vorgehen muss sichtbar sein.)

(d) Berechne von Hand die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f_3(x) = \sqrt{x}, \ x_0 = 1, \ n = 6$.

(e) Berechne den Konvergenzradius der Potehnzreihen von $f_3(x), \ x_0 = 1$

(f) Berechne den Konvergenzradius der Potehnzreihevon $f_4(x) = ln(x) - \sin(x), \ x_0 = 1$.
(Es darf hier auch ein Plausibilitätsargument verwendet werden.)

(g) Berechne den Grenzwert von Hand: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{16} + \frac{1}{81} \pm \ldots$

(h) Berechne $\lim\limits_{n \to \infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - ln(n)$.