

Übungen in Analysis

◇ E+M 2 10 ◇

Für die folgenden Aufgaben ist notfalls ein Computer zu verwenden (Skizze!):

Probl. 1 Berechne den Inhalt der Fläche der folgenden Funktion:

(a) $f(x, y) = \sin(x + y)$, $D_f = \{(x, y) \mid x \in [0, \pi], y \in [-\pi, \pi]\}$

(b) $f(x, y) = \sin(x + y)$, $D_f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}\}$

(c) $f(x, y) = \sin(xy) + \sin(x)$, $D_f = \{(x, y) \mid x \in [0, \pi], y \in [-\pi, \pi]\}$

Probl. 2 Berechne das Oberflächenintegral $\int_G h(x, y) dG$ über die Oberfläche der Funktion f :

$$h(x, y) = x + xy + y^2, \quad f(x) = 1 - x^2 - y^2, \quad G = ([0, 1] \times [0, 1]) \cap \{x, y \mid x \geq y\}$$

Probl. 3 Berechne den Inhalt der Fläche der folgenden Funktion, welche in Polarkoordinaten gegeben sind:

(a) $f(\alpha, r) = \sin(\alpha) e^r$, $D_f = \{(\alpha, r) \mid \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}], r \in [0.5, 1]\}$

(b) $f(\alpha, r) = \sin(\alpha) e^r$, $D_f = \{(\alpha, r) \mid \alpha \in [r, 2r], r \in [0.5, 1]\}$

(c) $f(\alpha, r) = \sin(\alpha) e^r$, $D_f = \{(\alpha, r) \mid r \in [\alpha, 2\alpha], \alpha \in [0, 1]\}$

Probl. 4 Berechne den Inhalt der folgenden Körper:

(a) $0 \leq z \leq f(x, y) = \cos(x + y)$, $x^2 + y^2 \leq (\frac{\pi}{2})^2$

(b) $0 \leq z \leq f(x, y) = y$, $x^2 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$

Probl. 5 Berechne die Oberfläche der folgenden Flächen, welche durch Vektorfunktionen gegeben sind:

(a) $\begin{pmatrix} r + \cos(\alpha) \\ r^2 + \sin(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) - r + \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $r \in [0, 2]$

(b) $\begin{pmatrix} 4 \cos(\alpha)(\cos(\beta) + 1) \\ 4 \sin(\alpha)(\cos(\beta) + 1) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\beta \in [0, 2\pi]$

(c) $\begin{pmatrix} \cos(\beta) \sin(\alpha) + \frac{1}{4} \sin(2\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in [0, 2\pi]$

Probl. 6 Gegeben ist die Funktion $f(u, v) = e^{\sin(u) - \cos(v)}$ auf dem Gebiet $G = \{(u, v) \mid u, v \in [0, 2\pi]\}$. Berechne $\int_G f(u, v) dG$.

Probl. 7 Krümmung

Bestimme die Krümmung der folgenden Kurven und skizziere die Situation mit dem Krümmungskreis:

(a) $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

(b) $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$

(c) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

(d) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$

(e) $\begin{pmatrix} 0.5 t \cos(t) \\ t \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$, $t_0 = 6$