

Probl. 1 Daten:

151	0	161	5	171	6
152	0	162	7	172	4
153	1	163	5	173	3
154	1	164	5	174	2
155	2	165	6	175	3
156	3	166	7	176	1
157	3	167	5	177	1
158	5	168	5	178	1
159	6	169	6	179	0
160	4	170	5	180	0

Durch diese Messdaten ist eine natürliche Klasseneinteilung gegeben. Die relative Klassenhäufigkeit wird als Wahrscheinlichkeit angenommen. Berechne μ .

Probl. 2 Es wird mit drei Würfeln gewürfelt. Die Summen der Augenzahlen werden als Werte der Zufallsvariablen definiert. Berechne μ .

Probl. 3 Ein Tennisball wird auf ein Hausdach geworfen, von wo er in die 14 m lange Dachrinne hinunterrollt. Für Längenposition auf der Dachrinne verwenden wir ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in der Mitte der Rinne. Für die Auftreffposition ist eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x) = a \cdot (e^{-x^2} - b)$ so zu modellieren, dass für die Verteilungsfunktion $F(x)$ gilt: $F(-7) = 0$, $F(+7) = 1$.

- (a) Berechne a und b .
- (b) Skizziere f und F .

Probl. 4 Weitere Fragen zur Statistik (wichtig für Modulprüfung)

- (a) Was ist ein Punktschätzer für einen Parameter? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 78 ff oder wikipedia.)
<http://de.wikipedia.org/wiki/Punktsch%C3%A4tzer>
<http://de.wikipedia.org/wiki/Stichprobe>
- (b) Warum braucht man den Begriff „Punktschätzer“? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 78 ff oder wikipedia.)
- (c) Beispiele für Parameter, die man schätzen muss? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 78 ff.)
- (d) Was ist die Erwartungstreue bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)
- (e) Was ist die Konsistenz bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)
- (f) Was ist die Wirksamkeit bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)

- (g) Was ist die Effizienz bei einer Schätzung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 81 ff.)
- (h) Wann ist eine Schätzung optimal? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 80 ff.)
- (i) Was ist die Maximum–Likelihood–Verteilung? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 83 ff.)
Kann bei der ersten Lesung ausgelassen werden.
- (j) Wie steht es mit der Genauigkeit eines Punktschätzers? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 86 ff.)
- (k) Was ist ein Vertrauensintervall? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 86 ff oder wikipedia.)
<http://de.wikipedia.org/wiki/Vertrauensintervall>
- (l) Was ist ein Konfidenzintervall? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 86 ff oder wikipedia.)
<http://de.wikipedia.org/wiki/Konfidenzintervall>
- (m) Was ist der Konfidenzkoeffizient $\gamma = 1 - \alpha$? (Siehe z.B. Ergänzungen p. 86 ff.)
- (n) Was ergibt sich für eine Vertrauensintervalllänge, wenn in Beispiel 2 (siehe Ergänzungen p. 87) die Werte wie folgt gewählt werden: $P = 0.95$, $c = 1.96$, $\bar{x} = 4$, $\sigma = 3$, $n = 1000$?
- (o) Was ist ein statistischer Test? (Siehe z.B. wikipedia.)
http://de.wikipedia.org/wiki/Statistischer_Test
- (p) Was ist der Vorzeichentest? (Siehe z.B. wikipedia.)
<http://de.wikipedia.org/wiki/Vorzeichentest>
- (q) Was ist der Rangtest? (Siehe z.B. wikipedia.)
<http://de.wikipedia.org/wiki/Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test>

Probl. 5 In der Literatur (*)¹ ist folgender Sachverhalt beschrieben:

Zur Bestimmung der Streckgrenze einer Stahlsorte A hat man $n = 145$ Messungen durchgeführt. Daraus konnte man das arithmetische Mittel zu $\bar{x} = 314.0 \text{ N/mm}^2$ bestimmen. \bar{x} ist bekanntlich ein geeigneter Punktschätzer für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit. Aus der Erfahrung weiss man, dass das Streumass σ der Grundgesamtheit ziemlich genau durch den Wert $\sigma^2 = 1000 \text{ (N/mm}^2\text{)}^2$ gegeben ist. Weiter weiss man aus der Erfahrung, dass die mittlere Streckgrenze mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit eine normalverteilte Zufallsgrösse \bar{X} ist (mit der Normalverteilung $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$).

Daraus möchte man Genauigkeitsschranken oder Vertrauensgrenzen für den Mittelwert μ der Halbjahresproduktion bestimmen. Es ist bei der Firma üblich, in solchen Fällen Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau $\varepsilon =$ oder $\lambda = 0.99 = 1 - \alpha$ anzugeben. Bestimme das Konfidenzintervall $[c_{\alpha/2}, c_{1-\alpha/2}]$.

Probl. 6 Bei der Produktion von Süssigkeiten werden 2 Typen von verschiedenfarbigen Bonbons mit unterscheidbaren Aromen hergestellt. Bis anhin wurden die Typen getrennt verpackt und in alle Welt versandt: Rote mit der Verpackungsaufschrift R und blaue mit er Aufschrift B . Nun hat es sich gezeigt, dass die Etiketten mit den Aufschriften R und B in verschiedenen asiatischen Ländern, wo die Abpackung in lokale Verkaufstüten stattfindet, nicht richtig gelesen werden können, da dort andere Schriften verwendet werden. Die eine Abpackungsstation hatte daher öfters nur R erhalten, die andere nur B . Das hat zu Gewinneinbrüchen geführt.

¹Gefunden in: Storm, Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle, Fachbuchverlag Leipzig, Köln

Es soll daher untersucht werden, welche Risiken ein Mischversand bietet. Man möchte somit 2000 Bonbons vom Typ R und 2000 vom Typ B in Versandkisten schütten und gut mischen. Lokal sollen dann daraus Tüten von je 20 Bonbons abgepackt werden. Man geht dabei von einer zufälligen Ziehung einer Stichprobe mit $n = 20$ aus.

- Handelt es sich beim Ziehen der Stichprobe um ein Bernoulliexperiment? Ermittle allenfalls die Wahrscheinlichkeitsfunktion.
- Ermittle die Chance, mit der in einer Verkaufstüte mindestens 5 Bonbons vom Typ R und mindestens 5 vom Typ B zu finden sind.
- Formuliere das Ergebnis in der Sprache der Vertrauensintervalle und berücksichtige dabei das Konfidenzniveau.

Probl. 7 Mit Automaten werden Präzisionswellen für Mikromotoren in der Computertechnik fabriziert. Diese sollen zu zu einem hohen Grade langfristig zuverlässig sein. Daher wird die Qualität dauernd überwacht. In Experimenten werden die Automaten der Reihe nach überwacht. Automat $A1$ zeigt nun bei einer Analyse die folgenden Ausschusszahlen pro Minute:

Defekte pro Min.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Abs. Häufigkeit	56	202	381	526	530	404	270	56	137	44	26	9	3

In 56 Fällen wurden danach bei der Messung 0 defekte Wellen registriert. Mehr als 12 defekte Wellen kamen bei der Überwachung nicht vor.

Man weiss aus der Erfahrung, dass die gemessene Verteilung gut durch eine Poisson-Verteilung angenähert werden kann. Dabei ist $x_0 = 0$, $x_1 = 1, \dots, x_{12} = 12$. Dazu gehören die gemessenen Häufigkeiten $h_0 = \frac{56}{(56+202+\dots+3)}$, $h_1 = \frac{202}{(56+202+\dots+3)}$.

- Der Parameter λ oder μ bei der Poisson-Verteilung soll durch den Mittelwert aller Messungen \hat{x}_i geschätzt werden. Ermittle damit die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 12 Ausschusswellen pro Minute produziert werden: $P_a(X > 12) = ?$ (Verlustgrenze für die Firma.)
- Der Parameter λ oder μ bei der Poisson-Verteilung soll durch die Varianz σ^2 geschätzt werden, denn bei der Poisson-Verteilung ist $\mu = \sigma^2$. Ermittle auch bei diesem Verfahren die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 12 Ausschusswellen pro Minute produziert werden: $P_b(X > 12) = ?$ (Verlustgrenze für die Firma.)