

## Übungen in Analysis 3

◇ M2 14 ◇

### Knickung

**Probl. 1** Folgendes Differentialgleichungssystem beschreibt die Spannungen in einer drehenden Scheibe (vgl. auch unter Handouts, Modellierung der Spannung in einer drehenden Scheibe Stufe D Nr. 10, Link).

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/AnwendMaterial/Handouts.htm>

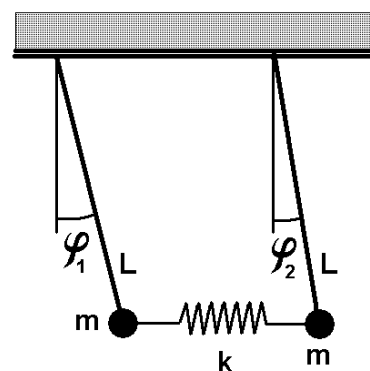
(passwortgeschützt)

$$\begin{cases} x^2 \rho \omega^2 + y(x) - z(x) + x y'(x) & = 0 \\ -(1 + \nu) y(x) + (1 + \nu) z(x) + x (z'(x) - \nu y'(x)) & = 0 \end{cases}$$

Dabei ist bei der Scheibe  $x \in [r, R]$ . Weiter gilt  $y(x) = \sigma_x(x)$ ,  $z(x) = \sigma_\varphi(x)$ .

- Löse das Gleichungssystem unter der Annahme, dass gilt:  $\nu = 0.3$ ,  $r = 5$ ,  $R = 10$ ,  $\rho = 1$ .  
Weiter sollen die Radialspannungen an den Rändern ( $x = r$ ,  $x = R$ ) gleich 0 werden.
- Stelle die Lösungen graphisch dar.
- Wo ist die Radialspannung maximal?
- Wo ist die Tangentialspannung maximal?

**Probl. 2** Wir betrachten das nebenan gezeigte gekoppelte Pendel. Zwei durch eine Feder mit der Federkonstanten  $k$  verbundene Massen  $m$  sind an gleich langen Stangen aufgehängt, welche wir als gewichtslos annehmen.  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  sind die Auschlagswinkel. Diese nehmen wir als klein an, sodass  $L * \sin(\varphi(t))$  den Ausschlag  $y(t)$  approximiert und die Höhenänderung  $h = L * \cos(\varphi(t))$  einer Masse etwa konstant ist. Nun stellen wir durch Betrachtung der durch die Massen verursachten Drehmomente eine Gleichungen auf:



**Gekoppelte Pendel**

Rücktreibende Kraft infolge Auslenkung  $= -m g \sin(\varphi_2) \approx -m g \varphi_2$ .

Rücktreibendes Moment infolge Auslenkung  $= -L m g \sin(\varphi_2) \approx -L m g \varphi_2$ .

Federkraft  $= k L \sin(\varphi_2) \approx k L \varphi_2$ .

Entgegengesetzt wirkendes Moment der Feder  $\approx -L k L \varphi_2 = -k L^2 \varphi_2$ .

Kompensation dieses Moments durch das andere Pendel:  $k L^2 \varphi_1$ .

Gleichgewicht mit „Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung“  $= (m L^2) \varphi_2''$ .

Gleichung für das zweite Pendel:  $(m L^2) \varphi_2'' = -L m g \varphi_2 - k L^2 \varphi_2 + k L^2 \varphi_1$ .

Gleichung für das erste Pendel:  $(m L^2) \varphi_1'' = -L m g \varphi_1 - k L^2 \varphi_1 + k L^2 \varphi_2$ .

Anfangsbedingungen:  $\varphi_1(0) = a$ ,  $\varphi_1'(0) = 0$ ,  $\varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_2''(t) + \frac{g}{L} \varphi_2(t) + \frac{k}{m} \varphi_2(t) - \frac{k}{m} \varphi_1(t) &= 0, \\ \varphi_1''(t) + \frac{g}{L} \varphi_1(t) + \frac{k}{m} \varphi_1(t) - \frac{k}{m} \varphi_2(t) &= 0, \\ \varphi_1(0) = a, \varphi_1'(0) = 0, \varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(0) &= 0\end{aligned}$$

Löse das Differentialgleichungssystem und stelle die Lösungen graphisch dar.

### Probl. 3 Ein Kleinprojekt:

Eine Masse  $m$  von  $1000 \text{ N}$  befindet sich oben auf einem parabelförmigen vereisten Hügel mit der Gleichung  $y(x) = -0.001x^2$  (Masszahlen in Metern) und  $y_{min} = -1000$ . Die Masse  $m$  besitzt eine Initialgeschwindigkeit von  $v_0$ . Der Reibungskoeffizient des vorhandenen Materials auf Eis beträgt  $0.05$ . Nach einer bei  $x_0$  sofort eingeleiteten Bremsung steigt der Reibungskoeffizient sprunghaft auf  $0.8$ .

- Bei welchem  $v_0$  ist bei gegebenem  $x_0$  die letzte Möglichkeit zur Bremsung vorhanden, damit  $m$  noch vor  $y_{min}$  zum Stillstand kommen kann? (Probiere mit  $x_0 =$  Nullstelle von  $y(x) = -1000$  und verallgemeinere das Resultat falls möglich.) Stelle  $v_0(x_0)$  graphisch dar.
- Bei welchem  $x_0$  ist bei gegebenem  $v_0$  die letzte Möglichkeit zur Bremsung vorhanden, damit  $m$  noch vor  $y_{min}$  zum Stillstand kommen kann? (Probiere mit  $v_0 = 0.1 \text{ m/s}$  und verallgemeinere das Resultat falls möglich.) Stelle  $x_0(v_0)$  graphisch dar.
- Wandle die Aufgabe selbständig ab und ziehe daraus Rückschlüsse auf die Problemanik beim Skifahren bzw. beim Hochgebirgssport oder bei Fahrzeugen auf Strassen in vereisten Situationen. (Anwendungen ergeben sich auch bei Transportsystemen in Industrieanlagen.)

*Hinweis:* Man könnte zusätzlich noch den Luftwiderstand einbauen. Dabei wird die Tangentialbeschleunigung um den Term  $\frac{c}{m} v(t)^2$  vermindert bei

$$c = \frac{c_w \rho A}{2}, \quad c_w = 1.00, \quad \rho = \rho_{Luft} = 1.2 \text{ kg/m}^3, \quad A = \text{Stirnfläche von } m.$$

**Probl. 4 Selbststudium:** Studiere das Thema der Wärmeleitung in Stäben. Suche dazu selbständig Literatur. (*Hinweis:* Anhang zum Skript Mathematik II.)