

Übungen in Analysis 3

◇ M2 15 ◇

Partielle Differentialgleichungen, Wärmeleitgleichung

Probl. 1 Wärmeleitgleichung I: $\frac{\partial u}{\partial t} = 9 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 10$ mit den homogenen Randbedingungen und den Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } u(0, t) = 0 = u(10, t) \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) \text{ für } 0 \leq x \leq 10.$$

(a) Löse die Wärmeleitgleichung! Dabei genügt ein numerisches Näherungsergebnis bis und mit den 10 ersten Gliedern der zu erwartenden Summe.

(b) Stelle die Lösung in Graphen dar für $t = 0, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \dots, \frac{1}{2}$.

Probl. 2 Wärmeleitgleichung II: $\frac{\partial u}{\partial t} = 9 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 10$ mit den Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } u(0, t) = 1, \quad u(10, t) = 3 \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) + \frac{3-1}{10}x + 1 \text{ für } 0 \leq x \leq 10.$$

(a) Löse die Wärmeleitgleichung! Dabei genügt ein numerisches Näherungsergebnis bis und mit den 10 ersten Gliedern der zu erwartenden Summe.

(b) Stelle die Lösung in Graphen dar für $t = 0, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \dots, \frac{1}{2}$.

Probl. 3 Fallschirmsprung:

Ein Fallschirmspringer steigt aus einem Flugzeug auf 2000 m über Grund aus und bewegt sich 10 Sekunden im freien Fall, beschleunigt durch die Schwerkraft. Dann reißt er an der Leine, wobei sich der Schirm öffnet. Drauf schwebt er mit einer verminderten Sinkgeschwindigkeit zu Boden. Beim Sinken wirkt die Beschleunigung $a = g - \frac{c}{m}v^2(t)$, $c = \frac{c_w \rho A}{2}$. g ist die Erdbeschleunigung, m die Masse des Springers, A die Stirnfläche und c_w der Widerstandsbeiwert. Berechne die Endgeschwindigkeit v_B beim Aufprall (Näherungswert). Finde auch heraus, wie die Endgeschwindigkeit von der Masse des Springers abhängt.

Folgende Werte sind gegeben:

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}, \quad v(0) = 0 \text{ m s}^{-1}, \quad m = 80 \text{ kg}, \quad t_1 = 10 \text{ s}, \quad \rho = 1.2 \text{ kg m}^{-3}.$$

$$\text{Vor } t_1 = 10 \text{ s: } A = 0.8 \text{ m}^2, \quad c_w = 1.00. \quad \text{Nach } t_1 = 10 \text{ s: } A = 25 \text{ m}^2, \quad c_w = 1.33.$$

Hinweis: Berechne eine hypothetische Geschwindigkeit v_u zur Zeit $t_u = \infty$ unter der hilfsweise verwendeten Annahme, dass eine Zeit unendlich sein kann und sich Parameter wie g u.s.w. bei Fall nicht ändern. v_u kann bei der Lösung des Problems hilfreich sein.

Probl. 4 Ein Kleinprojekt:

- (a) Wie hoch kann man eine Säule bauen, bis sie durch ihr Eigengewicht einknickt? Wähle für eine erste Studie das Material Baustahl (homogen!), Durchmesser 10 cm , Kreisquerschnitt.
- (b) Studiere die Abhängigkeit vom Material und die Abhängigkeit vom Querschnitt.
- (c) Vergleich: Wie lang muss ein vertikal aufgehängtes Stahlseil mit dem Durchmesser 1 cm sein, damit es durch sein Eigengewicht reißt?
- (d) Wie hängt hier die Länge vom Querschnitt ab? Und wie vom Material?

Probl. 5 Selbststudium: Studiere das Thema der partiellen Differentialgleichungen, Anhang zum Skript Mathematik II.)