

# Inhaltsverzeichnis • Table des matières

<b>1 Organisatorisches — Quant à l'organisation</b>	<b>1</b>
<b>2 Differentialgleichungen — Equations différentielles</b>	<b>3</b>
2.1 Einführung — Introduction	3
2.2 Lösung bei D'Gl 1. Ordn. — Solutions d'éq'diff d'ordre 1	6
2.2.1 Lösung, Integralkurve — Solution, courbe d'intégrale	6
2.2.2 Linienelement, Richtungsfeld — Élément de ligne, champs de direction	7
2.2.3 Isoklinen — Isoclines	9
2.2.4 Zentrale Fragen — Questions centrales	10
2.3 Anfangswertproblem — Problème de valeur initiale	13
2.3.1 Idee — Idée	13
2.3.2 Verallgemeinerung des Problems — Généralisation du problème	14
2.3.3 Randwertprobleme — Problèmes aux limites	15
2.3.4 Veränderte Problemstellung — Changer le problème	15
2.4 Existenz und Eindeutigkeit — Existence et univocité	16
2.4.1 Existenzsatz von Peano — Théorème d'existence de Peano	16
2.4.2 Eindeutigkeit — Univocité	17
2.4.3 Existenzsatz und Eindeutigkeit — Existence et univocité	19
2.4.4 Beispiel mit einer singulären Lösung — Exemple avec une solution singulière	22
2.5 Gleich'typen, Lös'methoden — Types d'éq., méthodes de solution	22
2.5.1 Iterationsverfahren von Picard — Méthode d'iteration de Picard	22
2.5.2 Separationsverfahren — Méthode de séparation des variables	23
2.5.3 „Beinahe“ separable D'Gl — Eq. diff. "presque séparable"	24
2.5.4 Substitutionsmethode — Méthode de substitution	25
2.5.5 Exakte D'Gl — Eq.diff. exacte	26
2.5.6 Eulersche Multiplikatoren — Multiplicateurs d'Euler	27
2.5.7 Eine Anwendung: Einhüllende — Une application: Enveloppe	30
2.6 Theorie der linearen D'Gl — Théorie des eq.diff. linéaires	32
2.6.1 Einführung, Definitionen — Introduction, définitions	32
2.6.2 Homogenes System — Système homogène	33
2.6.3 Inhomogenes System — Système inhomogène	38
2.7 Lineare D'Gl mit konst. Koeff. — Eq.diff. linéaires avec coeff. const.	40
2.7.1 Homogenes Problem — Problème homogène	40
2.7.2 Inhomogenes Problem — Problème non homogène	44
2.7.3 Potenzreihenansatz — Partir d'une série de puissance	45
2.8 Numerische Verfahren — Méthodes numériques	46
2.8.1 Das Verfahren von Euler — La méthode d'Euler	46
2.8.2 Die Methode von Runge-Kutta — La méthode de Runge-Kutta	48

2.8.3	D'Gl und Differenzenmethode — Eq. diff. et méthode d'éq. aux différences . . . .	50
2.9	Allgemeine Maschinenlösungen — Solutions générales par l'ordinateur . . . . .	53
2.9.1	<i>Mathematica</i> -Lösung — Solutions par <i>Mathematica</i> . . . . .	53
2.9.2	Selbst gerechnete Lösung — Solution calculée personnellement . . . . .	54
2.10	Artillerie-Methode — Méthode selon l'artillerie . . . . .	56
2.11	Anwendungen — Applications . . . . .	59
2.11.1	Biegelinie — Ligne élastique ou axe neutre . . . . .	59
2.11.2	Knickung — Problème de flambage . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Laplace-Transformationen — Transformations de Laplace</b>	<b>61</b>
3.1	Einführung — Introduction . . . . .	61
3.1.1	Übersicht — Vue générale . . . . .	61
3.1.2	Der Trick — Le truc . . . . .	61
3.2	Exist. u. Eindeut'probleme — Probl. d'exist. e. d'univoc. . . . .	63
3.2.1	Definitionen — Définitions . . . . .	63
3.2.2	Existenzprobleme — Problèmes d'existence . . . . .	64
3.2.3	Eindeutigkeitsprobleme — Problèmes d'univocité . . . . .	65
3.3	Aufbau des Kalküls — Constr. de la théorie formalisée . . . . .	67
3.3.1	Elementare Regeln — Règles élémentaires . . . . .	67
3.3.2	Linearitätsregeln — Linéarité . . . . .	68
3.3.3	Streckung im Urbildbereich — Extension dans le domaine de déf. . . . .	68
3.3.4	Differentiationsregel — Règle de la dérivation . . . . .	69
3.3.5	Anwendung auf eine D'Gl — Application pour une éq.diff. . . . .	69
3.3.6	Integrationsregel — Règle d'intégration . . . . .	69
3.3.7	Verschiebungssätze — Théorème de retard . . . . .	70
3.3.8	Multiplikationsregel — Règle de la multiplication . . . . .	71
3.3.9	Divisionsregel — Règle de la division . . . . .	72
3.3.10	Faltung — Plissement . . . . .	72
3.3.11	Periodische Funktionen — Fonctions périodiques . . . . .	75
3.3.12	Anfangs- und Endwerte — Valeurs initiales et finales . . . . .	76
3.3.13	Transformation rationaler Funktionen — Transformation de fonctions rationnelles	78
3.4	Musterbeispiele — Exemples modèles . . . . .	80
3.4.1	Rücktransformationen — Transformations inverses . . . . .	80
3.4.2	Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff. . . . .	80
3.4.3	D'Gl 2. Ordnung — Eq.diff. d'ordre 2ème . . . . .	81
3.4.4	Systeme von D'Gl — Systèmes d'éq.diff. . . . .	82
3.4.5	Anwendung der Faltung — Application du plissement . . . . .	83
3.5	Distributionen — Distributions . . . . .	84
3.5.1	Idee, Dirac-Stoss — Idée, impulsion unité de Dirac . . . . .	84
3.5.2	Die Transformierte der Dirac-Funktion — La transformée de la fonction de Dirac .	86
3.5.3	Anwendung auf ein AWP — Application pour un PVI . . . . .	87
3.5.4	Stoss zur Zeit 0 — Coup au temps 0 . . . . .	87
3.5.5	Stoss zur Zeit $t_0$ — Coup au temps $t_0$ . . . . .	87
3.6	Probleme aus der Praxis — Problèmes de la pratique . . . . .	89
3.6.1	Schwingungen und Oszillatoren — Oscillations et oscillateurs . . . . .	89
3.6.2	Stabilitätsverhalten von Lösungen — Comportement de stabilité de solutions . . .	90
3.6.3	Stabilitätskriterium — Critère de stabilité . . . . .	93
3.6.4	Randwertprobleme — Problèmes de valeurs aux limites . . . . .	93
3.7	LTI-Systeme — Systèmes LTI . . . . .	94
3.7.1	Grundlagen — Fondements . . . . .	94
3.7.2	Beispiele, Systemverknüpfungen — Exemples, liaisons de systèmes . . . . .	95

<b>4</b>	<b>Fourierreihen — Séries de Fourier</b>	<b>99</b>
4.1	Einführung — Introduction	99
4.1.1	Verwendung — Utilisation	99
4.1.2	Periodische Funktionen — Fonctions périodiques	99
4.1.3	Trigonometrische Reihen — Séries trigonométriques	100
4.2	Fourierreihen und Fourieranalyse — Séries et analyse de Fourier	101
4.2.1	Das Darstellungsproblem — Le problème de la représentation	101
4.2.2	Das Konvergenzproblem — Le problème de la convergence	103
4.2.3	Folgerungen und Konsequenzen — Conclusions et conséquences	109
4.2.4	Sinus- und Cosinusreihen — Séries de sinus et cosinus	110
4.2.5	Eulersche Formeln, Periode T — Formules d'Euler, période T	112
4.3	Harmonische Analyse — Analyse harmonique	112
4.3.1	Beispiele — Exemples	112
4.3.2	Lineare Kombinationen — Combinaisons linéaires	115
4.3.3	Parsevalsche Gleichung — Equation de Parseval	115
4.3.4	Die Formel — La formule	115
4.3.5	Anwendung — Application	116
4.4	Komplexe Darstellung — Représentation complexe	117
4.4.1	Komplexe Fourierkoeffizienten — Coefficients de Fourier complexes	117
4.4.2	Berechnung der Koeffizienten — Calculer les coefficients	118
4.4.3	Beispiel — Exemple	118
4.4.4	Amplitudenspektrum, Phasenspektrum — Spectre d'amplitude, spectre de phase	121
4.4.5	Reelle Interpretation der Spektren — Interprétation réelle des spectres	123
4.4.6	Das Phänomen von Gibbs — Le phénomène de Gibbs	124
4.4.7	Beispiele — Exemples	125
4.5	Diskrete Fouriertransformation — Transf. de Fourier discrète	126
4.5.1	DFT und Fouriersynthese — DFT et synthèse de Fourier	126
4.5.2	FFT — FFT	129
4.6	Fouriertransformation — Transformation de Fourier	131
4.6.1	Fourierintegral — Intégrale de Fourier	131
4.6.2	b-Band-Beschränktheit, Shannon — Borné à la bande b, Shannon	137
4.6.3	Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff.	139
<b>5</b>	<b>z-Transformationen — Transformations en z</b>	<b>141</b>
5.1	Einführung — Introduction	141
5.1.1	Verwendung — Utilisation	141
5.1.2	Gegenstand der Betrachtung — Objet de la considération	141
5.1.3	z-Transformierte — Transformée en z	142
5.2	Regeln, Calculus — Règles, calcul	143
5.2.1	Geometrische Folgen — Suites géométriques	143
5.2.2	Differentiation von Transformierten — Différentiation de transformées	143
5.2.3	Linearität, Einheitsimpuls — Linéarité, impulsion d'unité	144
5.2.4	Exponential und trig. Folgen — Suites exp. et trig.	144
5.2.5	Verschiebungen — Décalages	146
5.2.6	Gliedweise Mult. mit einer Folge — Mult. avec une suite terme p. terme	147
5.2.7	Anfangs- und Endwertsatz — Théorème des valeurs aux limites	148
5.2.8	Inverse z-Transformation — Transformation en z inverse	150
5.2.9	Auffinden der Inversen — Trouver l'inverse	150
5.3	Praktische Anwendungen — Applications pratiques	152
5.3.1	Differenzgleichungen — Equations aux différences	152
5.3.2	Diskrete lineare Systeme — Systèmes linéaires discrets	154
5.3.3	Impuls- und Schrittantwort — Réponse d'impulsion et indicielle	158
5.3.4	Schrittantwort — Réponse indicielle	159

5.4	Stabilität — Stabilité	161
5.4.1	Der Begriff — La notion	161
5.4.2	Stabilitätskriterium — Critère Pour la stabilité	162
5.4.3	Stabilitätskriterium — Critère pour la stabilité	163
5.5	Faltung, Konvolution — Plissement	164
5.5.1	Die Idee — L'idée	164
5.6	Laplace- und z-Transformation — Transf. de Laplace et en z	166
5.7	Ingenieur Anwendungen — Applications d'ingénieur	167
<b>6</b>	<b>Vektoranalysis — Analyse vectorielle</b>	<b>169</b>
6.1	Grundlagen — Les bases	169
6.1.1	Einführung — Introduction	169
6.1.2	Operatoren — Opérateurs	169
6.2	Felder — Champs	171
6.2.1	Der Feldbegriff — La notion du champ	171
6.2.2	Feldtypen — Types de champs	173
6.3	Gradient, Divergenz, Rotation — Gradient, divergence, rotationnel	175
6.3.1	Laplace- und Nabla-Operator — Opérateurs de Laplace et nabla	175
6.3.2	Definition von grad, div und rot — Définition de grad, div et rot	175
6.3.3	Formeln mit grad, div und rot — Formules avec grad, div et rot	176
6.3.4	Bedeutung von grad, div und rot — Signification de grad, div et rot	177
6.4	Konservative Felder — Champs conservateurs	180
6.4.1	Linienintegrale — Intégrales curvilignes	180
6.4.2	Gradientenfelder und Pot'felder — Champs de vect. lam. et champs de potent.	182
6.4.3	Konservative Felder — Champs conservateurs	183
6.4.4	Eigenschaften, Beispiele — Qualités, exemples	186
6.4.5	Konservative Felder und Rotation — Champs conservateurs et rotationnel	188
6.4.6	Bsp.: Stromdurchflossener Leiter — Expl.: Conduct. alimenté de courant électr.	190
6.5	Die Integralsätze — Les théorèmes de l'intégrale	192
6.5.1	Der Begriff Fluss — La notion de flux	192
6.5.2	Definition des Flusses — La définition du flux	192
6.5.3	Fluss durch geschlossene Flächen — Flux à travers des surfaces fermées	194
6.5.4	Anwend.: Wieso r-quadrat-Gesetze? — Applic.: Pourq. d. lois de r au carré?	195
6.5.5	Übersicht über die Integralsätze — Aperçu des théorèmes de l'intégrale	196
6.5.6	Die Sektorformel — La formule de secteur	198
6.5.7	Konsequenzen aus den Integralsätzen — Conséquences des théorèmes de l'intégrale	200
6.5.8	Quellenfreie Potentialfelder — Champs de potentiel libres de sources	201
6.5.9	Beispiele zu Stockes — Exemples concernant Stockes	202
6.5.10	Abgeleitete Formeln — Formules dérivées	202
6.5.11	Koord'unabhängige Def.n der Rotation — Déf. du rotationnel indép. de coord.	203
6.5.12	Zur Divergenz des elektr. Feldes — Quant à la divergence d'un champ électr.	204
6.6	Beweisideen z.d. Int'sätzen — Idées d. preuves p.l. théor.d. l'intégr.	205
6.6.1	Zum Satz von Gauss — Quant au théorème de Gauss	205
6.6.2	Zum Satz von Stockes — Quant au théorème de Stockes	207
6.7	Zirkulation, Vektorpotential — Circulation, potentiel vectoriel	209
6.7.1	Zirkulation und Rotation — Circulation et rotationnel	209
6.7.2	Das Vektorpotential — Le potentiel vectoriel	213

<b>7</b>	<b>Rayleigh–Quotient (Anhang — Annexe 1)</b>	<b>217</b>
7.1	Grundlagen zur Methode mit dem Rayleigh–Quotienten	218
7.1.1	Übersicht: Problem und Ziel	218
7.1.2	Theorie bezüglich Rayleigh–Quotient	218
7.1.3	Berechnung des Rayleigh–Quotienten	223
7.1.4	Eine genauere numerische Näherung für den 1. Eigenwert	228
7.1.5	Bemerkung zum Ritz–Galerkin–Verfahren	230
7.1.6	Übersicht	230
7.1.7	Die Methode	230
<b>8</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen (Anhang — Annexe 2)</b>	<b>237</b>
8.1	Partielle Differentialgleichungen	238
8.1.1	Quasilineare part. D’gl 1. Ordnung mit zwei Variablen	238
8.1.2	Klassifikation bei part. D’gl. 2. Ordnung	240
8.1.3	Verfeinerung der Klassifikation	240
8.1.4	Das Beispiel der Wärmeleitgleichung	242
8.1.5	Koordinatentransformationen bei Operatoren	246
8.1.6	Lineare Operatoren	251
8.1.7	Zur schwingenden Membran	252
8.1.8	Die Poisson–Gleichung	254
8.1.9	Exkurs: Wichtige Formeln	257
8.1.10	Plattengleichung und biharmonischer Operator	258
8.1.11	Das Modellierungsbeispiel der an vier Punkten aufgehängten Platte	259
8.1.12	Das Modellierungsbeispiel Kreisplatte	259
8.1.13	Numerische Methoden	261
8.1.14	Numerische Beispiele: Differenzenverfahren	262
8.1.15	Numerische Beispiele: Iterationsverfahren	266
8.2	Schritte in die Variationsrechnung	272
8.2.1	Der Begriff der ersten Variation	272
8.2.2	Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung	273
8.2.3	Die Herleitung der Potentialgleichung	274
8.2.4	Die Kettenlinie	274
8.2.5	Ein isoperimetrisches Problem und die Lagrange–Funktion	276
8.2.6	Das Prinzip der kleinsten Wirkungen und erste Variation	277
8.2.7	Bernoullis Brachystochronen–Problem	279
8.2.8	Variation und finite Elemente: Triangulationsmethode	281
8.2.9	Weitere Probleme	285
8.3	Schwingungen und partielle Differentialgleichungen	286
8.3.1	Die homogene Wellengleichung, Voraussetzungen	286
8.3.2	Separationsansatz und stehende Welle	286
8.3.3	Schwingung eines dünnen Balkens	288
8.3.4	Die schwingende dünne Platte	290
8.3.5	Ausblick über Eigenwerte und Eigenfunktionen	296
8.4	Fouriertransformationen und partielle Diff’gleichungen	296
8.4.1	Entwicklung der Methode an einem Beispiel	296
8.4.2	Beispiel einer konkreten Anwendung	298
8.5	Zur Idee der Greenschen Funktion	298
8.5.1	Einführung und Begriff	298
8.5.2	Ein Schulbeispiel	299
8.6	Bemerkung zur Delta–Funktion	301
8.7	Ausblick	303

<b>9</b>	<b>Mathematische Modellierung (Anhang — Annexe 3)</b>	<b>305</b>
9.1	Einige Kurven . . . . .	306
9.1.1	Die Klothoide . . . . .	306
9.1.2	Kettenline contra Seilkurve . . . . .	308
9.1.3	Eine Schleppkurve . . . . .	310
9.2	Balken und Biegelinie . . . . .	311
9.2.1	Schnittkräfte und Momente am Balken . . . . .	311
9.2.2	Die Biegelinie des Balkens . . . . .	315
9.2.3	Zur Knickung . . . . .	317
9.3	Gekoppelte Pendel . . . . .	318
9.3.1	Problemmodellierung . . . . .	318
9.3.2	Beispiellösung . . . . .	319
9.4	Weitere Beispiele zur Modellierung . . . . .	319
9.4.1	Ausblick auf weitere Beispiele und Themenbereiche . . . . .	319
9.4.2	Bemerkung zu autonomen und dynamischen Systemen . . . . .	321
<b>10</b>	<b>Anhang 4 — Annexe 4</b>	<b>323</b>
10.1	Hinweise – Indications . . . . .	323
10.1.1	Abkürzungen – Abréviations . . . . .	323
10.1.2	Literatur — Littérature . . . . .	323