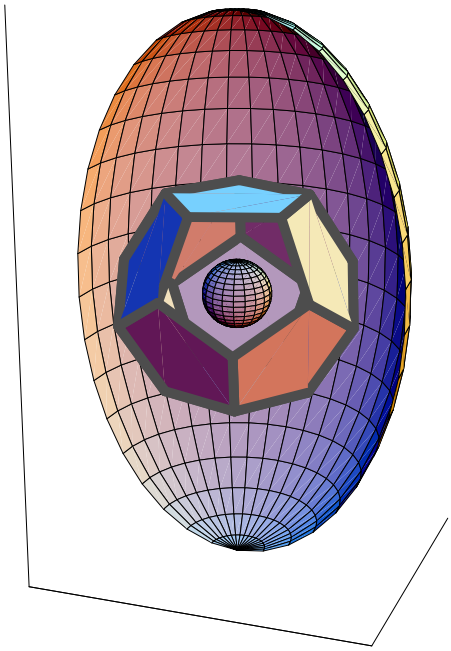
Script ◇ Math ◇ Architektur III
◇ Auswahl von Materialien ◇



Scripta monolingua nach dem Inversionsprinzip im 3. Studienjahr

(Deutsche Fassung, französischen Begriffserklärungen auf Verlangen)

von

Rolf Wirz

Berner Fachhochschule BFH ◇ HTI und HSB

V.2.9.22b / Umfang vom 18. März 2008 Hyperref. mit reduzierten Bib.–Verweisen

©2000/2001/2002/2003/2004/2005/2006/2007/2008

Produziert mit PCTEX auf WIN98/ WinXP.

Das Auge sieht an die Dinge, der Verstand sieht durch die Dinge, das Herz sieht hinter die Dinge ...

Arithmetik und Geometrie geben die Wahrheit über die Dinge ...
Lasst niemanden meine Werke lesen, der nicht Mahtematiker ist ...

Leonardo

Die Sinne erfreuen sich an harmonisch gefügten Dingen...

Thomas von Aquin

In der ästhetische, elegant und redundanzfrei präsentierten Mathematik muss oft der Zuhörer herausfinden, worum es geht... Das ist schlechter Unterricht...

Abstraktion und damit Mathematik ist die edlste Fähigkeit des Gehirns... Sie überwindet das Triebhafte und schafft dadurch die Kultur...

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

©2000/2001/2002/2003/2004/2005/2006/2007/2008

Die handgefertigten Abbildungen wie einige wesentliche Teile des Inhaltes sind früheren öffentlichen Darstellungen des Autors entnommen. Die Urheberrechte dafür gehören dem Autor.

Inhaltsverzeichnis

1 Organisatorisches – Quant à l'organisation **1**

2 Von der Seifenblase zum olympischen Dach **3**
2.1 Tilt–Artikel des Autors zum Mathematiktag 2000 . . . 3
2.2 Fragen und Kommentare . . . 4
2.3 Populäre Literatur . . . 5

3 Mathematik und Architektur im Lichte der Weltbilder **7**
3.1 Notizen zu den Ursprüngen unserer Kultur . . . 7
3.1.1 Die Anfänge der kulturellen Zeugnisse . . . 7
3.1.2 Erste Organisationsformen rufen nach ersten mathematischen Fähigkeiten . . . 8
3.1.3 Der prägende Einfluss des Zeitverständnisses und des Kosmos . . . 8
3.1.4 Der Einfluss der umfassenden Geschichte . . . 9
3.1.5 Vorgeschichtliche Zeugen exakter Mathematik . . . 10
3.2 Die Urerfahrungen der Mathematik . . . 11
3.2.1 Die Methode der Modellierung durch Interpretation der Realität . . . 11
3.2.2 Heilige Geometrie und wesentliche Zeitalter mit prägendem Einfluss . . . 12
3.2.3 Geometrie am Bau: „Kunst ohne Wissenschaft ist nichts!“ . . . 14
3.2.4 Beispiele von Anwendungen der Geometrie vor der Zeit von G. Monge . . . 21
3.2.5 Bedeutung einiger kulturell häufiger Zahlen und Figuren . . . 23
3.2.6 Historische Beispiele nichtrationaler Aspekte von Bedeutungsinhalten . . . 42
3.2.7 Nochmals kompakt: Zur Bedeutung von Zahlen — Sphärenmusik . . . 43
3.2.8 Zur Tetraktys . . . 45
3.2.9 Aus welchem Geist entspringt die Mathematik? — Wo ankert sie? . . . 53
3.2.10 Muss man das alles wissen — oder: „Was ist Bildung?“ . . . 56
3.3 Notizen zu den Ursprüngen unserer Geschichte . . . 59
3.3.1 Keilschrift . . . 59
3.3.2 Hieroglyphen . . . 60
3.4 Zu einigen Grundgesetzen der prägenden Einflüsse . . . 63
3.4.1 Den Menschen prägende Einflüsse . . . 63
3.5 Gliederung von prägenden Einflüsse betreffend die Architektur . . . 64

4 Die Kunstfrage — vom Nutzen der Mathematik für Architekten **69**
4.1 Bemerkung zum Gebrauch des Begriffs „Kunst “ . . . 69
4.1.1 Zum Historischen Wachstum des Begriffs . . . 69
4.1.2 Zu den raum–zeitlichen Dimensionen der schönen Künste . . . 71
4.1.3 Parallelen zur Schönheit in der Philosophie . . . 71
4.2 Zu den 7 Aspekten der Mathematik . . . 75
4.3 Mathematik: Grundlage und Bedingung von Architektur und Technik . . . 76
4.3.1 Kausale und finale Situation . . . 76
4.3.2 Raum zwischen Mathematik und Architektur . . . 77

4.4 Einige Anwendungen der Mathematik in der Architektur . . . 78
4.4.1 Einfache Anwendungen . . . 78
4.4.2 Hochschulanwendungen . . . 78
4.4.3 Schulungsanwendungen . . . 79

5 Theorien der Mathematik und Physik mit prägendem Einfluss 81
5.1 Gelehrte der Antike . . . 81
5.1.1 Ägypten, altes Reich . . . 81
5.1.2 Die grossen Sterne am Beginn dessen, was man Philosophie nennt . . . 81
5.1.3 Schule des Pythagoras . . . 82
5.1.4 Platon . . . 82
5.1.5 Aristoteles . . . 82
5.1.6 Euklides . . . 83
5.1.7 Archimedes von Syrakus . . . 83
5.1.8 Erathostenes von Kyrene . . . 84
5.1.9 Vitruv . . . 84
5.1.10 Ptolemaios . . . 84
5.1.11 Rom . . . 84
5.2 Nachantike, Mittelalter . . . 84
5.2.1 Albertus Magnus . . . 85
5.2.2 Fibonacci . . . 85
5.3 Renaissance, Barock, Mechanik, neue Himmelskörper . . . 85
5.3.1 Kopernikus . . . 85
5.3.2 Galilei . . . 85
5.3.3 Tycho Brahe . . . 86
5.3.4 Jost Bürgi . . . 86
5.3.5 Kepler . . . 86
5.3.6 Descartes . . . 87
5.3.7 Guericke . . . 87
5.3.8 Pascal . . . 87
5.3.9 Huygens . . . 87
5.3.10 Newton . . . 87
5.3.11 Leibniz . . . 88
5.3.12 Bernoullis . . . 89
5.3.13 Euler . . . 89
5.3.14 Kant . . . 89
5.3.15 Coulomb . . . 90
5.3.16 Lavoisier . . . 90
5.3.17 Volta . . . 90
5.3.18 Laplace . . . 90
5.3.19 Dalton . . . 91
5.3.20 Gauss . . . 91
5.3.21 Cantor, Gödel und andere . . . 91
5.3.22 Die Entdeckung neuer Himmelskörper . . . 91
5.3.23 Faraday und Maxwell . . . 92
5.3.24 Mayer, Helmholz, Joule . . . 92
5.3.25 Das Problem des absoluten Raums . . . 93
5.3.26 Forschung heute . . . 93
5.3.27 Fechner . . . 93
5.3.28 Le Corbusier . . . 93
5.4 Einstein und die Relativitätstheorie . . . 93
5.4.1 Äthertheorie und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit . . . 93
5.4.2 Systemzeit und Zeitdiletation . . . 95

5.4.3 Die Lorenzkontraktion . . . 96
5.4.4 Die Unüberschreitbarkeit der Lichtgeschwindigkeit . . . 97
5.4.5 Das Paradoxon der Gleichzeitigkeit . . . 98
5.4.6 Ruhemasse und dynamische Masse . . . 98
5.4.7 Masse und Energie . . . 100
5.4.8 Zeitdehnung in der Nähe grosser Massen . . . 101
5.5 Materiewellen, Quantentheorie, Kosmologie und Weltbild . . . 101
5.5.1 Dualismus Wellen–Korpuskel . . . 101
5.5.2 Die Unschärferelation . . . 102
5.5.3 Ausblick auf die Teilchenstruktur der Materie . . . 103
5.5.4 Ausblick auf die Kosmologie . . . 103
5.6 Rückblick auf die Ursprünge mathematischer Begriffsbildungen . . . 106

6 Einige begriffliche Grundlagen 109
6.1 Astronomische Begriffe und Befriffliches zu Zeit und Kalender . . . 109
6.1.1 Koordinatensysteme . . . 109
6.1.2 Bewegung von Erde und Sonne . . . 112
6.1.3 Zeit . . . 113
6.1.4 Mond und Monat . . . 117
6.2 Sonnenuhren . . . 118

7 Notizen zu „Zwischen Freiheit und Strenge“ 119
7.1 Freiheit und Strenge . . . 119
7.1.1 Kosmos – Chaos . . . 119
7.1.2 Freiheit, Ordnung und Strenge . . . 120
7.1.3 Geometrie und Bau . . . 121
7.2 Philosophiegeschichte — Zahlensymbolik . . . 121
7.2.1 Winziges aus der Philosophiegeschichte . . . 121
7.2.2 Was soll das mit den Zahlen? . . . 122
7.2.3 Bedeutung von Zahlen, Sphärenmusik . . . 122
7.2.4 Kurz zur Geschichte . . . 123
7.2.5 Und immer wieder Kunst und hier Zahl . . . 124
7.2.6 So nochmals: Bedeutung von Zahlen . . . 124
7.2.7 Zeitgeist . . . 126

8 Vom Bildungswert der Mathematik 129
8.1 Erster Teil: Über Wertung, Umfeld und Wurzeln . . . 129
8.1.1 Umfeld . . . 129
8.1.2 Wo ankert die Mathematik in unserem Wertgefüge? . . . 130
8.1.3 Die historische Dimension der Mathematik . . . 131
8.1.4 Die vier Wurzeln mathematischen Handelns . . . 132
8.1.5 Nach dem Nutzen der Überfluss: Das Spiel . . . 132
8.1.6 Von den philosophischen zu den religiösen Wurzeln . . . 133
8.1.7 Eigentlich sakrale Wurzeln der Mathematik . . . 136
8.2 Zweiter Teil: Das Sakrale in der Mathematik und die Schönheit . . . 138
8.2.1 Zum Sakralen in der Mathematik . . . 138
8.2.2 Einige Kerngedanken zu den gnostischen Wurzeln der Mathematik . . . 141
8.2.3 Von Mathematik und Schönheit . . . 143

9 Beisp. von geometr. Gerüsten, symbolbez. Formen u. Zahlen, Prinzipien ... 147
9.1 Erste geometrische Zeugen . . . 147
9.1.1 Projektion und Proportionierung . . . 147
9.1.2 Geometrie und Astronomie, Kalender . . . 148
9.1.3 Geometrische Punkte, Linien, Formen . . . 149
9.1.4 Geometrie in der Seefahrt, Navigation . . . 150
9.1.5 Geraden, Proportionen, Formen in der minoischen Zeit . . . 151
9.2 Ideale Formen . . . 151
9.2.1 Platonische Körper . . . 151
9.2.2 Kreispackung, Kugelpackung, Symbolik . . . 154
9.3 Zahl, Figur, Symbolgehalt: Bezug zu Natur und Mensch . . . 154
9.3.1 Ganze Zahlen, rationale Verhältnisse . . . 154
9.3.2 Irrationale Verhältnisse . . . 156
9.4 Das geometrische Gerüst in der Kunst . . . 164
9.4.1 Rationale und irrationale Verhältnisse in der Antike und später . . . 164
9.5 Ornamentik: Spiel, Dekoration, Kunst . . . 175
9.5.1 Spiel . . . 175
9.5.2 Dekoration, Kunst . . . 175
9.5.3 Hochblüte der Ornamentik . . . 176
9.6 Geometrie, Zahlen, Symbolik am Bau, geometrische Gerüste . . . 178
9.6.1 Altertum . . . 178
9.6.2 Antike, Frühmittelalter . . . 179
9.6.3 Romanik . . . 181
9.6.4 Gotik, Renaissance . . . 182
9.7 Zur Proportionierung . . . 187
9.7.1 Beispiele . . . 187
9.7.2 Malerei der Renaissance: geometrische Gerüste von Kunstwerken . . . 190
9.7.3 Bauwerke im Barock: Geometrische Prinzipien, Formen . . . 206
9.7.4 Neuzeit . . . 207

10 Wieso es nur fünf platonische Körper gibt 209
10.1 Polyedersatz . . . 210
10.1.1 Begriffe . . . 210
10.1.2 Der Satz . . . 210
10.1.3 Platonische Körper . . . 212
10.2 Planare Graphen und Polyederkugeln . . . 216
10.2.1 Ausbreitungsäquivalenz . . . 216
10.2.2 Andocken . . . 217
10.2.3 Reguläre Polyederkugeln und ihre Derivate . . . 221

11 Etwas Harmonielehre, Proportionen, goldener Schnitt 225
11.1 Etwas Harmonielehre für Architekten . . . 225
11.1.1 Über Proportionen . . . 225
11.1.2 Zur Physik der Töne . . . 225
11.1.3 Mit Saiten, Pfeifen oder Rohren erzeugte Töne . . . 227
11.1.4 Steingewordene Musik . . . 229
11.1.5 Tonintervalle, Tonleitern, Klänge . . . 230
11.1.6 Architektur, goldener Schnitt und Musik, Kalinkastrasse . . . 244
11.2 Rund um den goldenen Schnitt . . . 245
11.2.1 Goldener Schnitt und Fibonaccizahlen . . . 246
11.2.2 Ein Wachstumsmodell mit Fibonacchizahlen . . . 247
11.2.3 Goldener Schnitt und Mensch und Tier . . . 247
11.2.4 Goldener Schnitt und Geometrie . . . 248

11.2.5 Alte Masse und goldener Schnitt . . . 258
11.2.6 Beziehungen, Mittelwerte, Lucaszahlen . . . 259

12 Polyederwerkstatt **263**
12.1 Graphiken generiert mit dem Mathematica–Package . . . 263
12.2 Studium der Körper um Graphiken selber einfach entwickeln zu können . . . 267
12.2.1 Würfel, Tetraeder, Oktaeder . . . 267
12.2.2 Gesetze zu Würfel, Tetraeder, Oktaeder . . . 270
12.2.3 Modellbau . . . 271
12.2.4 Das Dodekaeder . . . 272
12.2.5 Das Dodekaeder aus dem Würfel mit goldenem Dach . . . 275
12.2.6 Das Dodekaeder auf der Kante . . . 276
12.2.7 Würfelfünfling . . . 277
12.2.8 Tetraederfünfling . . . 277
12.2.9 Das Ikosaeder . . . 278
12.2.10 Ausblick . . . 280
12.2.11 Übersicht über die archimedischen Körper . . . 281

13 Ornamente, Parkette, Symmetrie **283**
13.1 Pythagoräische Gitter . . . 283
13.2 Bemerkung zu Parketten . . . 286
13.2.1 Reguläre Parkette . . . 286
13.2.2 Penrose-Parkette . . . 290
13.3 Untersuchung von Symmetrien . . . 290

14 Ein Blick des Architekten auf Stichworte zu Mathematik und Praxis **291**
14.1 Stichwortmaterial Planungsforschung: Beispiele . . . 291
14.1.1 Apolloprojekt: Mathematisches Management . . . 291
14.1.2 Beispiel Einsatzplanung bei einer Airline . . . 292
14.1.3 Beispiel Autoverleih . . . 292
14.1.4 Beispiel Eröffnung eines Supermarkts . . . 294
14.1.5 Beispiel Brand von Chelsea, Massachusetts . . . 294
14.2 Stichwortmaterial Spieltheorie: Beispiele . . . 294
14.2.1 Beispiel zur Entscheidungstheorie: Schirm oder nicht Schirm? . . . 294
14.2.2 Nullsummenspiel . . . 295
14.2.3 Nichtnullsummenspiel: Beispiel Gefangenendilemma . . . 295
14.2.4 Nichtnullsummenspiel: Tragödie des Gemeinwesens . . . 296
14.2.5 Statik, Festigkeitslehre, Bauphysik . . . 296
14.3 Stichwortmaterial alte und neue Geometrie . . . 297
14.3.1 Fibonacci, goldener Schnitt, Ästhetik . . . 297
14.3.2 Symmetrie: Muster . . . 297
14.3.3 Symmetrie: Escher . . . 298
14.3.4 Fraktale Geometrie und Philisophie in der Mathematik . . . 298
14.3.5 Das Flohmodell bei der Erzeugung von Fraktalen . . . 301
14.3.6 Computergraphik: Seifenhäute und Minimalflächen . . . 305
14.3.7 Das 4-Farben oder Landkartenproblem . . . 310

15 Seitenblik auf Computer und Datenmengen **313**
15.1 Zahlendarstellung in Computern, Speicheraufwand... . . . 313
15.2 Speicheraufwand und Farbmodelle . . . 313
15.2.1 Pixelgraphik und Vektorgraphik . . . 313
15.2.2 Farbmodelle . . . 314
15.2.3 Zur Grösse von Pixelgraphiken . . . 314

15.2.4 Aufgabe 314

16 Mathematik und Praxis — Projektthemen **317**
16.1 Schulung an platonischen Körpern 317
16.1.1 Projektideen 1 317
16.1.2 Übersicht über konvexe Körper aus regelmässigen Vielecken 319
16.2 Schulung in praktischer Geometrie und angewandter Mathematik 319
16.2.1 Projektideen und Themen 2: Auswahl 319
16.3 Sonnenuhrprojekt 321
16.4 Vorschule: Kleinprojekte und projektartiges Vorgehen 321
16.4.1 Themenliste zum goldenen Schnitt 321
16.4.2 Themenliste zur Symmetrie 322
16.4.3 Denkanstösse: Kristallisationskeime von Arbeitsthemen 323

17 Anhang: Farbbilder **329**

Kapitel 1

Organisatorisches – Quant à l'organisation

Kurze Übersicht

1. Organisation, Rahmen
2. Stoff
3. Ziel, Weg, Methoden, Feedback, Team
4. Übungen, Selbststudium
5. Lerntechnik, Arbeitstechnik, Selfmanagement
6. Rechte und Pflichten des Studenten und der Schule
7. Prinzipien, Grundsätze
8. Rechner, Computer, Mathematiksoftware
9. Semesterorganisation (Noten, Prüfungsreglement, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Projekte, Arbeitsnachweismappe, Kurssprecher, Kursbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden)
10. Hilfsmittel (Bibliothek, Taschenrechner, Mathematiksoftware, Literatur)
11. Zeitplanung
12. Einführung
    (a) Modell und Wirklichkeit
    (b) Geschichtlicher Rahmen und Auftrag

Aus der Fachumschreibung:

Vorkenntnisse:	Mathematik der ersten beiden Studienjahre.
Lernziele:	Im Mittelpunkt steht das Verstehen und Beherrschen der unten aufgeführten mathematischen Inhalte. Die Fähigkeit, die aufgeführten mathematischen Inhalte als Werkzeug in den entsprechenden Fächern des Studiums anzuwenden.
Selbststudium:	Erwartete Leistungen im Selbststudium: Erarbeitung von vorgegebenen Stoff-Teilgebieten anhand von Studienunterlagen und Fachliteratur. Selbständiges Lösen von Uebungsaufgaben.
Qualifikation:	Qualifikationsvorgaben: Die Erfahrungsnote basiert auf Prüfungen und/oder Projektarbeiten, die währenddem Studienjahr durchgeführt werden. Es wird insbesondere auch der im Selbststudium erarbeitete Stoff in den Prüfungen getestet.
Fachinhalt:	Die berufsspezifischen Bedürfnisse liegen klar im geometrischen Bereich: räumliches Vorstellungsvermögen, Raumgestaltung, Aesthetik, Kunst. Andererseits spielt auch der analytische Aspekt eine gewisse Rolle, etwa in der Statik und der Kultur von Naturwissenschaften. Der genaue Programminhalt liegt im freien Ermessen des Dozenten. Er kann von einem Jahr zum andern variieren, speziell im Zusammenhang mit Wünschen und Interessen der Studierenden. Themen, welche das kritische Urteilungsvermögen der Studierenden entwickeln, die allgemeine mathematische Kultur (technisch, künstlerisch und/oder historisch) und die Beziehungen zwischen Mathematik und Philisophie aufzeigen, werden bevorzugt. Beispiele : Konstruktionen und Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal, Sensibilisierung nicht-euklidscher Geometrien, goldener Schnitt, Pflästerungen, Rosetten, Paradoxien, Fehlschlüsse, mathematische Anwendungen in der modernen Welt.

Kapitel 2

Von der Seifenblase zum olympischen Dach

2.1 Tilt–Artikel des Autors zum Mathematiktag 2000

Wer hat in seiner Jugend nicht gerne mit Seifenblasen gespielt? Wie schön schillerten doch die Farben dieser Kugeln–so schön wie die wundersamsten Blasengebilde der Clowns und Gaukler. Und bald steht eine Frage im Raum: Was ist hier möglich? Welche Gesetze bestimmen diese Formen?

Wenn wir durch Experimente mehr zu dieser Frage erfahren wollen, stoßen wir bald an die Grenzen der Machbarkeit. Weiter hilft uns nur eine mathematische Beschreibung, ein „mathematisches Modell", das uns die Berechnung möglicher Formen erlaubt. Ebenso kompliziert verhält es sich bei den *Seifenhäuten*, welche entstehen, wenn man phantasievoll geformte Drahtschlaufen in eine Seifenlösung eintaucht und wieder herauszieht. Die Physik mit der Theorie der Oberflächenspannung bietet die Grundlage für eine mathematische Beschreibung: Die Spannung in der Seifenhaut erzwingt eine Flächenform mit minimalem Inhalt, d.h. die potentielle Energie in der Fläche wird minimal. Eine etwas größer gedachte Seifenhautfläche würde durch die Spannung sofort auf minimale Größe zusammengezogen. Mathematisch bedeutet das auch, dass die sogenannte „mittlere Krümmung" in der Fläche einer Seifenhaut überall null ist. Aus dieser Feststellung lassen sich dann theoretische Erkenntnisse ableiten, wozu allerdings viel höhere Mathematik notwendig ist: Differentialgeometrie, Differentialgleichungen, Variationsrechnung, usw.. Die darauf abgestützten Berechnungen führen zu computergenerierten Flächenformen, die vorher noch niemand in der Wirklichkeit gesehen hat. Allerdings: Man findet so auch die schon bekannten Flächen, was nur bestätigt, dass das verwendete Modell richtig ist. Es darf damit zur Vorhersage bisher unbekannter Formen gebraucht werden.

Für die lebendige Realität: Minimalflächen sind praktisch nur auf Zug beansprucht. Sie haben minimales Gewicht, was minimaler Materialaufwand bedeutet. „Mittlere Krümmung null" in einem Punkt ist Ausdruck von Bewegung in der Fläche in eine Richtung und Gegenbewegung in der Fläche in die dazu orthogonale Richtung. Daher wirken solche Gebilde *ästhetisch*. Architekt *Frei Otto* hat auf Grund solcher Erkenntnisse unter anderem Staunen erregende Werke geschaffen, wie das Deutsche Pavillon an der Weltausstellung 1967 in Montreal, die olympische Schwimmhalle in München 1972 sowie die dortigen Dächer des Olympiastadions und des olympischen Sportfeldes.

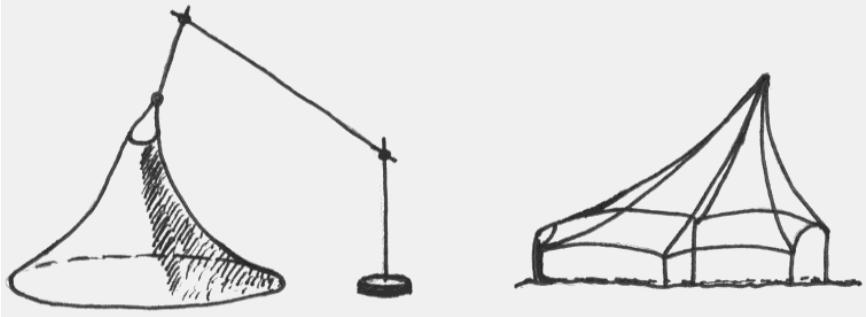


Abbildung 2: Experiment an der Seifenhaut und Realisierung als Dachkonstruktion

2.2 Fragen und Kommentare

Frage: Inwiefern ist die Form oder Gestalt von Dingen der Natur zufällig?

$\rightsquigarrow$ Frage nach mathematischen Modellen für Seifenblasen, Seifenhäute, Blasenflössen, Schäumen. Wenn die Natur berechenbar und nicht zufällig ist, lässt sie sich vorausberechnen und auch in Fällen am Modell mathematisch modellieren, wo die Beobachtung nicht mehr gewährleistet ist. Z.B. bei instabilen Gleichgewichtsszuständen etc..
Zudem sind die Modelle nur dann brauchbar, wenn die Mathematik dazu stimmt, d.h. wenn bewiesen werden kann, dass die näherungsweise berechneten Lösungen auch mathematisch exakt existieren und dass sie Theorie sauber ist. Aus einer unsauberen Theorie lassen sich schwer saubere Resultate gewinnen. Daher sind Beweise so wichtig. Und nur jene exakten Modelle beschreiben die Natur auch wirklich, aus denen sich ausschliesslich solche beobachtbare Resultate ableiten lassen, welche der physikalischen Realität auch entsprechen.

Begriffe: Seifenblase $\rightsquigarrow$ *Bulle de savon*, Seifenhaut $\rightsquigarrow$ *Pellicule d'eau savonneuse*.

Die Oberflächenspannung (Zug in der Fläche) in der Seifenhaut sorgt für minimale Oberfläche (potentielle) Energie.

Modell einer Seifenhaut: Minimalfläche, d.h. Fläche mit minimalem Inhalt. (Die Zugspannung verkleinert den Inhalt, wo dies möglich ist.)
Mathematisch: Solche Flächen haben eine mittlere Krümmung null. $\rightsquigarrow$ In der Mathematik definiert man Minimalflächen oft so.

$\rightsquigarrow$ **Problem:** Welche mathematischen Minimalflächen sind physikalisch stabil?
Architekt Frei Otto $\rightsquigarrow$ Bekannte Werke:

Deutsches Pavillon Montreal 1967
Olympische Schwimmhalle München 1972
Dach des Münchner Olympiastadions 1972
Dach des Olympischen Sportfelds München 1972: 5 Hauptteile (Minimalflächen), 8 Äugenflächen", 2 Masten (Dach hängt daran), 8 Stützpunkte, 29 Verankerungspunkte, 2 weitere zentrale Punkte. Grösste Spannweite: 135 Meter. Maximale Höhe: 55 Meter.

Vorteil von Minimalflächen:

Minimaler Aufwand an Baumaterial
Leichtgewichtig
Praktisch nur Zugspannungen .....
Transportierbar .....
Ästhetisch

2.3 Populäre Literatur

A. Arnez, K. Polthier, M Steffens, C. Teitzel, Toaching Soap Films (Video über Minimal Surfaches), Springer–Verlag
Seifenblasen in Wissenschaft und Technik (Video über Minimalflächen),Spektrum–Verlag
S. Hildebrandt, A. Tromba, Panoptimum, Spektrum–Verlag
S. Hildebrandt, A. Tromba, Kugel, Kreis und Seifenblasen, Birkhäuser–Verlag

In den angegebenen Werken ist eine sehr grosse Menge an faszinierendem Bildmaterial vorhanden. Aus urheberrechtlichen Gründen müssen wir uns hier mit diesem Verweis begnügen.

Kapitel 3

Mathematik und Architektur im Lichte der Weltbilder

3.1 Notizen zu den Ursprüngen unserer Kultur

3.1.1 Die Anfänge der kulturellen Zeugnisse

Abgesehen von älteren aufschlussreichen Siedlungsresten finden wir erste kulturelle Zeugnisse der Mensch-heit in den Höhlenmalereien, Knochenschnitzereien und plastischen Zeugnissen (z.B. Lehmskulpturen) in Norditalien, Süddeutschland, Frankreich und Spanien (z.B. Fumane–Höhle, Schwäbisch–Alp, Chauvett oder Cavernen in der Dordogne, Altamira u.s.w.). Darin ist eine sehr hohe Entwicklungsstufe in der zwei und dreidimensionalen geometrischen Ausdrucksfähigkeit wie auch eines „künstlerischen Empfindens“ derjenigen sichtbar, die die Werke geschaffen haben. Physikalische Altersbestimmungen ergeben ein Alter von maximal bis zu 32'000–36'500 Jahren (Fumane). Vgl. z. B. (Bib.: U1). Kunstvoll gearbeitete Gegenstände finden sich auch im Raum Deutschland–Österreich etc.. Jüngere Malereien treten auf im Süden bis Sizilien, noch jüngere auch in Nordafrika, das damals noch grün war und Flüsse kannte — und im Osten bis Sibirien. Die ersten kulturellen Zeugnisse des Menschen sind somit auch **Zeugnisse einer geometrischen Vorstellungskraft**. Die Schöpfer der Bildnisse beweisen durch die Werke die Fähigkeit, dreidimensionales Grosswild sehr exakt auf einer zweidimensionalen Höhlenwand abbilden oder projizieren zu können, und das in der Dunkelheit der Höhlen bei den damaligen Beleuchtungsmöglichkeiten. Das beweist eindrücklich die geometrische Vorstellungskraft, die bei heutigen Naturvölkern im Experiment auch schon nicht gefunden werden konnte, wie die Forschungsberichte dokumentieren. Man bedenke, dass einer der ersten Überreste einer Sesshaftigkeit und somit einer städtischen Kultur Jericho (Cisjordanien/Palästina/Westbank) ist mit einem vergleichsweise bescheidenen Alter von ca. 7000 Jahren.

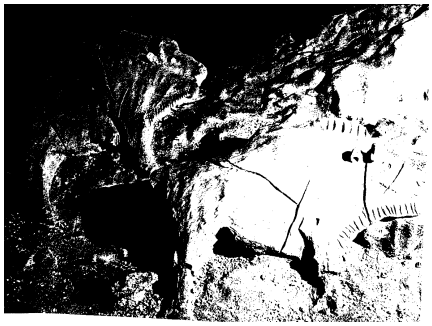


Abbildung 3: Terrakotta, Steinzeit

Abbildung 4: Höhlenmalerei, Steinzeit

3.1.2 Erste Organisationsformen rufen nach ersten mathematischen Fähigkeiten

Sesshafte Gemeinwesen rufen nach Organisationsformen, Rechtsordnungen, Staatsgebilden, die die Arbeitsteilung und den notwendigen Handel sowie das Zusammenleben regeln. Es bedarf einer staatlich kontrollierten Moral, dem Gesetz des Zusammenlebens. Die Notwendigkeit der Kommunikation erklärt die Notwendigkeit einer Schrift. Das alles bedingt schon Mathematik: Zählen wird aus verständlichen Gründen notwendig (Mass und Gewicht, Waarenmengen, Grösse von Herden, Zwiebelkonsum beim Pyramidenbau, Anzahl Soldaten etc. etc.). Und ein Kalender wird notwendig, damit Termine überhaupt benutzbar werden. Die Geometrie wird notwendig zur Navigation und Vermessung. (Seefahrt, Karavannenstrassen durch die Wüsten, z.B. die Salzstrassen. Vor allem Salz war lebensnotwendig und wurde schon früh aus den Salzseen des Tschad südlich der Sahara geholt.) Die Geometrie war notwendig für den innern Frieden und somit für den Staat, denn Frieden kann nur herrschen, wenn z.B. nach der alljährlichen Nilüberschwemmung das Land neu vermessen werden kann und sich jeder wieder zufrieden im Besitz seiner Habe sieht. $\rightsquigarrow$ *Harpedonapten*, griech. „Seilspanner“, Feldvermesser. Man findet hier durchaus utilitaristische Beweggründe als einer der Väter aller mathematischen Dinge.
Und weiter zieht das kosmische Geschehen am Himmel den Menschen in seinen Bann, da er diesem restlos ausgeliefert ist. Der Mensch hatte keinen Einfluss auf die Planetenbewegungen! Da war (und ist) der Mensch genauso ausgeliefert wie seinem Schicksal. Hier ruft das religiöse Verhalten des Menschen die Mathemaitk auf den Plan, da der Verstand noch nicht nach Erklärungen, jedoch schon nach Ordnung verlangt. Zudem war bis in die jüngste Zeit Religion nicht getrennt vom Staat. Je älter die geschichtlichen Quellen, desto mehr offenbaren sie eine Einheit der Sicht der Dinge: Eine Einheit von Staat, Kultur, Religion, Stammesbewusstsein, Sippenbewusstsein. Astronomie wurde nicht nur benutzt zur Navigation oder für den Saatkalender, sondern auch für die Astrologie, die an gewissen Orten noch heute die Staatsentscheide bestimmt. (Z.B. bei den Tibetern. Auch Hitler hatte einen „Hofastrologen“, den Basler Kraft. Oder Kepler: Er war Astrologe bei Rudolf II v. Habsburg in Prag etc..). $\rightsquigarrow$ Die *Notwendigkeit* ist das offensichtliche Schlüsselwort, das ein plausibles und nachvollziehbares Verständnis aus der Sicht vom Hintergrund unserer Zeit her erlaubt.

3.1.3 Der prägende Einfluss des Zeitverständnisses und des Kosmos

Wie erwähnt hat der Mensch auf das kosmische Geschehen am Firmament noch weniger Einfluss als auf das eigene Schicksal: Er ist ausgeliefert. Das kosmische Geschehen, der Rhytmus der Sonne, des Mondes, des Tierkreises, zeigt dazu dem Menschen die Zeit an: Tag und Nacht, Monat, Jahr, Jahreszeiten.
Im Raum kann sich der Mensch mit seinem Körper frei bewegen, in der Zeit kann er das nicht. Da ist er „festgenagelt“ im Moment. Vergangenheit und Zukunft sind ihm nur in seiner erfahrungsgeprägten Vorstellung zugänglich, ohne dass er sich dort frei mit seinem Körper bewegen könnte. Der Mensch ist daher Herr des Raumes, mindestens der quasi ebenen festen Erdoberfläche, jedoch nicht Herr der Zeit. Bezüglich des Raumes trägt der Mensch in seinem Empfinden auch ein dreidimensionales, ruhendes Koordinatensystem mit sich herum: Links–Rechts infolge seiner Symmetrie, vorn–hinten infolge seiner Orientiertheit im Körper und des Gesichtssinns, oben–unten infolge des Gleichgewichtsinns, des aufrechten Ganges, des oben sitzenden Kopfes mit Bewusstseins und der Schwerkraft. Zur Zeit hat er aber nur über die Bewegung Zugang: Z.B. über die Atmung, das Schlagen des Herzens, äussere Bewegungen wie das Fliessen des Wassers, das Wandern der Sonne oder z.B. über eigene Gehbewegungen. Wenn der Mensch schläft, fehlt ihm nachher ein Stück Zeit in der Erinnerung, da er es nicht bewusst erlebt hat.
So wird nachvollziehbar, dass der Mensch schon früh die denkbare Herrschaft über die Zeit in den Bereich des Göttlichen gerückt hat. Planeten wurden Götter, gelenkt vielleicht von einem obersten Gott, auf Erden vertreten durch einen obersten Herrscher, einen Pharao, einen König, einen Kaiser, einen Pontifex, der den Kalender gab. In der Unantastbarkeit der Zeit mag nun der Grund dafür gelegen haben, dass das kosmische Geschehen, die Rhythmen der Planeten, des Jahres etc. extrem prägend auf die Kultur gewirkt haben. An diesen Rhythmen hat man Zahlenverhältnisse und Vergleichszahlen abgelesen, die rasch sakrale Dimension erhalten haben, sich in Hauptwerken der Architektur und Kunst auf eindrückliche Weise wiederfinden und zudem mathematischen und symbolischen Gehalt haben. Will man somit solche

kulturelle Zeugnisse verstehen, würdigen oder gar restaurieren können, so kann das im Zeichen der Sorgfalt nicht ohne Studium der einschlägigen Symbolik oder der kosmischen Rhythmen geschehen. Zahlen und geometrische Figuren sind hier wichtige Bedeutungsträger, d.h. eine Art Schrift, die zu lesen verstanden sein will.
Wie stark die materielle–geographische Situation auf die Auswahl der dem Menschen wichtigen Aspekte der kosmischen Rhythmen gewirkt hat, kann man erahnen, wenn man als Beispiel den folgenden Vergleich bedenkt: Im alten Ägypten war für die Ackerbau betreibenden Bevölkerung speziell infolge der alljährlich wiederkehrenden Nilüberschwemmungen eine Staatswesen notwendig geworden, damit eine alljährlich wieder neu notwendige Landzuteilung geordnet abgewickelt werden konnte. Die Überschwemmungen kehrten im Jahresrhythmus wieder, was erklärt, dass der altägyptische Kalender an die Jahreszeiten angebunden war und somit Winter– und Sommersonnenwende oder Tag– und Nachtgleiche eine entscheidende Rolle gespielt haben mussten. Wir als kulturelle Erben der griechisch–römischen Antike, welche ihr wissenschaftliches Hauptzentrum in Ägypten (Alexandrien) hatte und das ägyptische Erbe antreten konnte, haben als Konsequenz diesen jahreszeitgebundenen Kalender wie auch das Rechensystem (Dezimalsystem) geerbt. (Die Macht der Pharaonen ging auch an die Cäsaren resp. Kaiser über und setzt sich zum Teil u.a. im Pontifex Maximus heute noch fort. Man denke auch an den Bischofshut (Mitra) als Abkömmling der geteilten Pharaonenkrone.)
Ganz anders in Mesopotamien oder bei den Nomadenvölkern des Ostens, die einen Mondkalender hatten und deren kulturelle Erben auch heute noch einen solchen haben. Im Osten gab es die jährlichen Nilüberschwemmungen nicht. Viehzucht war wichtig. Und bei Aufzucht von Vieh, Trächtigkeit oder Wanderungen durch Wüsten sind die Mondrhythmen oder die hitzelose Nacht mit ihrem Mond wichtiger als die Jahreszeiten der Ägypter.
Auch im keltischen Bereich Europas war ein ein Sonnenkanender bekannt, wie aus archeologischen Zeugnissen hervorgeht (Himmelsscheibe von Nebra, Goldüte und Scheiben mit Kaleder).

3.1.4 Der Einfluss der umfassenden Geschichte für das Verständnis der kulturellen Zeugen — auch in der Architektur

Die heutige Welt verstehen kann nur der, der auch weiss, woher sie kommt, was also die Gründe oder die Bedingtheiten für ihre heutige Gestalt sind. Das bedeutet die Geschichte der Kultur der Menschen kennen. Was uns aus alten Zeiten überliefert ist, sind schriftliche Zeugnisse und Werke technischer Art in Form von Gegenständen und Bauwerken, die die Zeit überdauert und der Zerstörung getrotzt haben. Sie erlauben ein bezeugtes Bild, das aber immer nur bruchstückhaft sein kann, da der grösste Teil der Zeugnisse ja fehlt. (Von der antiken Literatur ist vielleicht ca. 10% bis 20 % erhalten: Wenig für eine abgerundete Vorstellung. . .)
Kultur verstehen — oder gebildet sein, heisst also auch weitgehend die Geschichte kennen, die Gründe und den Urgrund kennen, den Entstehungsweg nachvollziehen können, Verständnis haben können.
Welche Werke haben die Zeit am unbeschadetsten überdauert, sodass wir aus ihnen heute diese Geschichte erfahren können? Die einen Werke verdanken ihre heutige Existenz wohl dem Zufall, die andern aber ihrer Grösse und Mächtigkeit, ihrer Potenz. Man denke an die Pyramiden. Wer wollte sie schon abtragen? Wieder andere sind von Schlamm, Vulkanasche, vom Meer, von Wüste u.a. überdeckt worden und haben dort bis in die heutige Zeit eine Spur hinterlassen, wenn das ihre Potenz zuliess. Denn nur harte, edle Materialien überdauern in unwirtlichen Gegenden. Noch andere haben überdauert, weil sie derart in die Kultur eingeschmolzen wurden, dass sie zum Alltäglichen gehörten — und noch gehören, ohne dass mancher heute noch verstehen kann, warum das so gekommen ist. Es ist einfach so, basta.
Diese genannte Potenzen sind da entstanden, wo die Konzentrationskräfte am stärksten waren, wo am meisten Arbeitskraft vereinigt werden konnte, wo der Wille am mächtigsten war. Der Wille ist aber am mächtigsten, wenn es dem Menschen ans Innerste, Lebendigste geht, ans Religiöse also. Oder wenn er unter extremer Bedrohung aus Angst handelt, also ausgeliefert ist einer andern Macht, z.B. einem Staatsgebilde, das diese Macht verkörpert. Daher sind die alten Zeugnisse häufig auch religiöse Zeugnisse oder Zeugnisse der Macht, wie wir heute zum Teil sehr genau wissen.
Diese Zeugnisse verstehen bedeutet also, dass wir uns erst bemühen müssen, die Weltsicht von damals, als man die Zeugnisse schuf, zu verstehen. Zu verstehen, was den Menschen beeindruckt hat und wieso

er sich dann so verhalten hat, dass seine Zeugnisse eben diese Form haben, die wir heute ablesen können.

3.1.5 Vorgeschichtliche Zeugen exakter Mathematik

Dass vorgeschichtlich schon beachtliche Kenntnisse mathematischer Art vorhanden waren, erfahren wir durch Reste von Bauwerken oder die archeologische, die urgeschichtliche Forschung und auch durch Volkskundegeschichtliches. Abgesehen von Stonehenge und ähnlichen impressionanten Bauten, die offensichtlich sehr genaue Observatorien waren, (Stonehenge: Bauphasen um 3300 v. Chr. und um 1800 v. Chr., vgl z.B. (Bib: U2)), finden sich z. B. in Grossbritannien Fundamentreste von megalithischen Bauwerken, vielleicht Tempeln, die doch mathematische Rätsel aufgeben. Ebenso in der Gegend von Bayern (mit modernen Methoden aus dem Bereich Physik, Chemie und Biologie). Man findet elliptische Grundrisse (Pfahllöcher etc.) mit Ellipsen, deren Halbachsen zusammen mit der Hypothenuse pythagoräische Zahlentripel bilden, die man sehr unwahrscheinlich zufällig finden kann. Die Bauwerke waren nach astronomischen Hauptrichtungen ausgerichtet (z.B. zur Ermittlung der Sonnenwende). Zudem steckt in Britannien vermutlich in allen ein gemeinsames Grundmass, eine „megalithische Elle“. Hatte man etwa damals eine Schrift, von der kein Zeugnis mehr vorhanden ist?
Interessanterweise fand man in jüngster Zeit namentlich im bayrischen Raum mit Hilfe von aus der Biochemie resp. der Physik stammenden Methoden Zeugen noch grösserer astronomisch ausgerichteter Bauwerke ähnlicher Art.

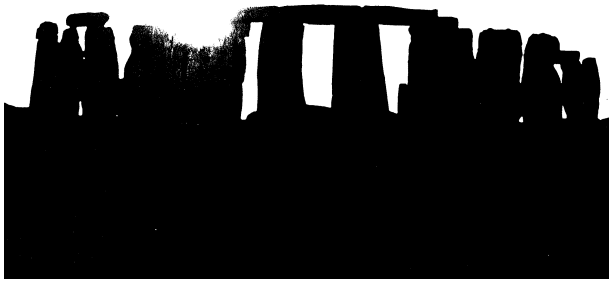


Abbildung 5: Stonehenge mit Sonne

Sehr eindrücklich sind die Resultate von Forschungen volkskundlicher und linguistischer Art sowie die Verbindung mit Resultaten der experimentellen Urgeschichte und Archeologie. Die unten gezeigten Bilder des Belchendreiecks, der Situation von Basel und ein Ausschnitt des rekonstruierten antiken Stadtplans von Augusta Raurica (in der Nähe vom gallischen Basel) sprechen Bände. (Lit.: Vgl. (Bib.: UrgeschBS). „Belchen“ scheint keltisch zu sein, seine Verwendung ist in historischer Zeit nicht bekannt.) Waren keltische Druiden Pate gestanden bei der Gründung dieser Kolonie für römischen Bürger?
Interessant ist, dass der Name „Belchen“ eine unverkennbare sprachliche Verwandtschaft mit „Belenus[1] “, dem keltischen (gallischen) Sonnengott hat. Interessant ist weiter, dass die Belchen– und die Blauengerade (vgl. Abbildung Seite 11, 148) sich etwa im heutigen Basler Münster schneiden, einem Gebiet also, das nachweislich schon zu römischer Zeit besiedelt war und innerhalb des Murus Gallicus liegt (Gallische Stadtmauer, an der sogar Brandspuren gefunden worden sind — der Auszug der Helvetier und dann die Rückkehr auf Geheiss Cäsars nach der Niederlage bei Bibracte?). Infolge neuerer und genauerer Messungen sollen hingegen den Schnittpunkt der genannten Geraden direkt in der vorrömischen Keltensiedlung mit dem heutigen Stadtteilnamen „Basel–Gasfabrik “ liegen. Interessant ist weiter, dass der römische Name der Stadt „Basilea“ auf griechisch Sinn macht: Es bedeutet „Königin“ (die Griechen

[1] übersetzt mit ”hell”, glänzend”

kolonialisierten bis ins Rohnetal). Tatsächlich sind auf dem Gebiet der ehemaligin Gasfabrik unweit des Münsterhügels auch keltisch–gallische Gräber mit sehr reichen Goldbeigaben (Halsring etc.) entdeckt worden, die auf hohe Würdenträger deuten (vgl. stehende Ausstellung im Historischen Museum Basel). Die Harmonie, mit der sich sichtlich die prähistorischen Gallier oder Kelten mit den Bezügen des Kosmos und der Landschaft verbunden haben, hinterlässt noch heute einen grossen Eindruck! Man bedenke, dass die Region während der letzten Eiszeit wahrscheinlich nicht vergletschert war, dass also weit vor 10'000 Jahren dort Menschen leben konnten, als grosse Gebiete Helvetiens noch unter dickem Eis steckten. Interessant ist, dass sich das Seitenverhältnis des Dreiecks des elsässer Belchen, des badischen Belchen und des basler Belchen wie $3 : 4 : 5$ (ägyptisches, pythagoräisches Dreieck) verhält mit einer Abweichung zwischen 3 und 4 von ca. 3 %.

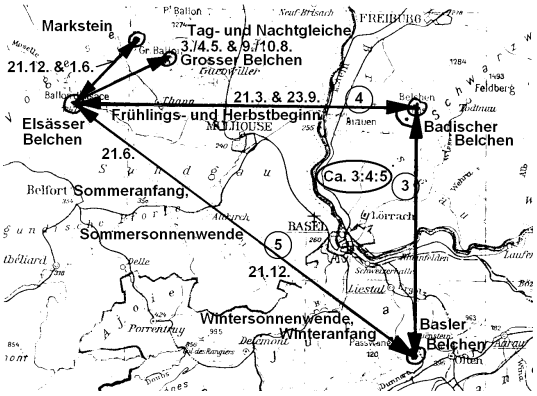


Abbildung 6: Belchendreieck

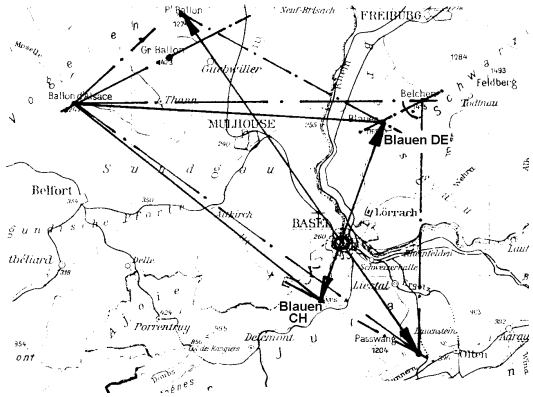


Abbildung 7: Blauendreieck und Lage von Basel

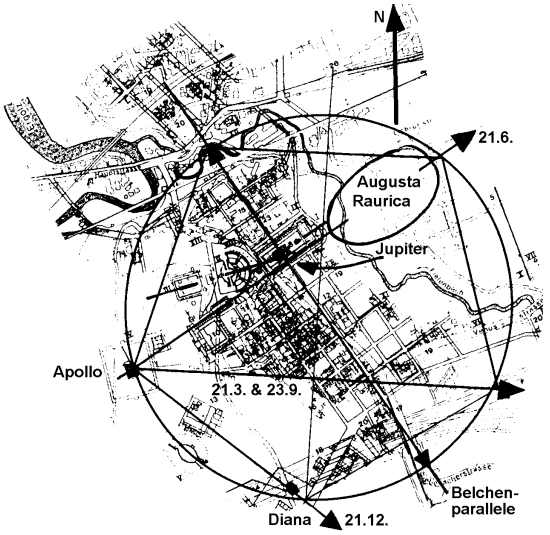


Abb. 8: Plan v. Augusta Raurica

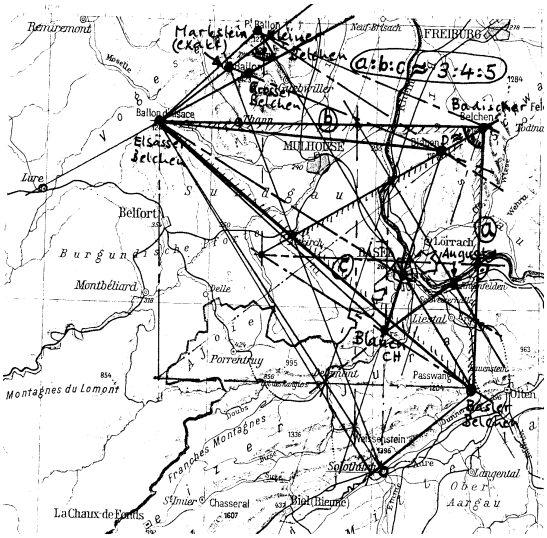


Abb. 9: Weiter im Belchensystem ...

3.2 Die Urerfahrungen der Mathematik

3.2.1 Die Methode der Modellierung durch Interpretation der Realität

Es ist nicht sehr schwierig, sich in die damalige Welt einzufühlen, denn die Natur und deren Realität haben sich nicht geändert. Durch Nachstellen von Situationen wie in der Kriminalistik, also durch „nachfühlen"oder nachempfinden gelingt es uns, zu einer Sicht der Dinge zu gelangen, die eine nachvollziehbare Erklärung für erste mathematische Impressionen liefert, die heute noch unsere Kultur bestimmen

und die man bisher meist als gegeben übernahm, ohne sie zu hinterfragen. Wir wollen daher die damals wie heute wirkende Realität durch die Brille der damaligen Möglichkeiten betrachten, interpretieren und so die heutigen Zeugen nachmodellieren.
Da gibt es doch Zahlen in unserer Kultur, die ständig wieder auftauchen, die eigenartigerweise ihre Stellung behaupten und scheinbar kaum erklärbar sind. Da gibt es doch 7 Wochentage, obwohl wir im 10–er-System rechnen. Zudem gibt es 12 Monate statt 10, 7 Bundesräte in der Schweiz (? statt 10 ??), 2 mal 12 Buchstaben im alten griechischen und lateinischen Alphabet, 12 Halbtöne in einem Abschnitt der Tonleiter u.s.w. Zwar hat man während der französischen Revolution versucht, alles auf das 10 zu eichen, doch ohne Erfolg. Nachher war wieder die alte Jahresordnung da. Und während der russischen Revolution hat man nicht mehr versucht, die Umstellung aufs 10–er–System in kulturellen Dingen durchzusetzen. Man war weiser geworden. Was hat nun wohl den Menschen bewogen, gewisse Zahlen mehr zu benutzen als andere? Die Einsicht in die Gründe ist nicht schwierig, denn die offensichtlichen Gründe sind immer noch da. Der Jahreslauf ist geblieben. Die Art der Fortpflanzung der Lebewesen ist geblieben. Der Sternhimmel über uns ist geblieben. Die Planeten sind noch da. Die Sonne scheint heute wie damals. Die alten Gebäude stehen noch da, wenn auch sehr stark dezimiert.
Wichtig scheint noch diel folgende Bemerkung: Abstraktion und damit die nach ihrem Wesen unsichtbare Mathematik fusst immer auf scharfen Begriffen. Begriffe sind dazu Voraussetzung. Erst wenn die Begriffe geschaffen sind, kann darüber geredet werden. Und worüber man nicht reden kann, muss man schweigen. Daher können wir festhalten: Als der Mensch den Zahlen und geometrischen Dingen Namen gab, schuf er die Grundlage der Mathematik. Und diese Namen entstanden aus einem konkreten Bedürfnis heraus...

3.2.2 Heilige Geometrie und wesentliche Zeitalter mit prägendem Einfluss

Betrachtet man z.B. Bauwerke oder andere Zeugen der Hauptleistungen vergangener Zeitalter, so fällt das immer wiederkehrende Vorhandensein gewisser Zahlen, Zahlenkombinationen, Proportionen und gewis-ser geometrischer Figuren, Muster oder Körper auf. Die Fachhistoriker reden hier von Zahlenmystik und Sakralgeometrie. Der Scheinwerfer der Geschichtsschreibung weist auf die alten Bewohner Mesopotamiens, später die Babylonier sowie die alten Ägypter mit ihren imposanten Bauwerken und Tempelanlagen und ihrem eher mystischen Weltbild. Dabei ist zu bemerken, dass z.B. gerade Tempel einerseits fokussierende Bauwerke waren, welche zur Errichtung schnell einmal einen wesentlichen Teil der Arbeitsleistung eines Volkes verschlungen haben und Paläste sowie Profanbauten in ihren Ausmassen und auch in ihrer Beständigkeit durch die Jahrhunderte oft wesentlich überragt haben. Sei waren daher bewusstseinsbestimmend in der Kultur ihrer Entstehungszeit. Andererseits dienten sie nicht einem reinen profanen Gebrauchszweck — abgesehen vielleicht manchmal von ihrer Funktion für die Staatsraison. Tempel zeigten nicht die rohe Gewalt der Befestigungsanlagen, sondern die feine, subtil wirkende, für den Lebenszweck viel bestimmendere Gewaltigkeit der durch den Reichtum der überragenden Handwerkskunst transportieren Idee, heute als Kunst verstanden, welche nur von einer auserwählten Spitze der Elite geschaffen werden konnte, also nicht Sache eines Jedermanns war. Um Tempel zu errichten war nun Geometrie gerade die Voraussetzung und nicht etwa die Folge. Geometrie steht im Plan am Beginn, ist daher Ursache und nicht nur blosses Hilfsmittel. Wie beim Wüstenritt oder in der Seefahrt ist sie die Bedingung zum Gelingen des grossen, dem Unkundigen vorenthaltenen Unternehmens. Geometrie war nur wenigen Gebildeten zugänglich. Sie war oft Sache der Priester und sicherlich auch der Könige, wie infolge der überlieferten Quellen vermutet werden muss. Daher mag es einsichtig sein, dass Geometrie in ihrem sakralen Aspekt auch als heilig angesehen worden ist. Ähnliches gilt für die an den kosmischen Rhythmen und an der Gliederung des Menschen (des Königs oder Oberpriesters) abgelesenen Zahlen und deren Verhältnisse.
Interessant ist noch ein Blick auf die Methode der orthogonalen Projektion (Zwei– oder Dreitafelprojektion). Aus vorrömischer Zeit sind z.B. in Ägypten in Stein gerizte Risse von Architekturelementen erhalten geblieben. Die Methode der orthogonalen Projektion ist auch nachweislich zur Herstellung von Skulpturen verwendet worden, wie aus Papyrusunterlagen und Funden von unfertigen Objekten hervorgeht. Zur Mehtode: Man hat die Risse auf quaderförmige Steine gezeichnet und erst einmal z.B. ein Seitenrissprofil geschnitten. Wenn man nun um den Stein ein quaderförmiges, mit Quadratgitternetzen aus Seilen versehenes Gerüst baut, so kann man in diesen Stirnseitigen Quadratgitternetzen die restlichen

Risse markieren und durch Spannen von Seilen von der jeweiligen Vorderseite zur Hinterseite auch die Aufriss– und Grundrissprofile schneiden. So wird gleichgestaltige Massenware möglich, an der individuell nur noch die Rundungen gearbeitet werden müssen.
Die Tradition der Zahlen und der Geometrie setzt sich in der griechisch– römischen Kultur fort bei den Pythagoräern, die als Haupptgott Apollo verehrt haben, den Gott des Lichtes, auch der Erkenntnis, der Künste, der Musik. Der Einfluss von Pythagoras auf Platon ist unverkennbar. (Platon galt oder gilt als wichtigster Philosoph, je nach Schule. Ihm folgen die Strömungen des Mittel– und Neuplatonismus, z.B. Plotin, 205 –?. Platon ist der Schöpfer der Ideenlehre. Wichtig ist das Höhlengleichnis.) Hier im Griechentum setzt die rationale Erkenntnis ein, die aber die Mystik und das Primat der Religion nicht verdrängen kann. Sie ist jener untergeordnet. Bekannt ist z.B. das vermutlich Delphische (Delische[2]?) Problem: Es sollte mit Zirkel und Lineal, mit den Werkzeugen der Geometrie, dem Apollo ein kubischer Altar gebaut werden, der zu einem gegebenen Altar exakt doppelten Inhalt hat: Das Problem der Kubusverdoppelung ist gestellt, aber zu Ehren des Apoll. Die Bewegung der Pythagoräer hat sich bis in die Spätantike gehalten. Über das wirkliche Ende oder ein verstecktes Fortbestehen wissen wir wenig. Sicher ist jedoch, dass Kaiser Theodosius der Grosse gegen 400 n.Chr. das Christentum zur Staatsreligion erklärte und sämtliche heidnischen Kulte verboten hat. Vielleicht parallel oder vielleicht in Verbindung mit dem Pythagoräertum hat sich die spätantike Gnosis ($\rightsquigarrow$ Gnostiker) entwickelt (von $\gamma\nu\tilde{\omega}\tau\iota\ \sigma\varepsilon\alpha\upsilon\tau\grave{o}\nu$, gnoti seauton, d.h.„Mensch erkenne dich selbst“, dem Spruch über dem Eingang zum Tempel des Hauptgotts der Pythagoräer in seinem Hauptheiligtum Delphi.). Und in weiterem Sinne auch parallel dazu entstand die jüdische Kabbalistik. Das Erbe dieser Strömungen finden wir in der sakralen Geometrie und der Zahlensymbolik der Bauwerke des folgenden abendländischen Mittelalters bis zum Spätbarok, dem eigentlichen Höhepunkt und Abschluss der Weiterentwicklung der antiken Baukunst. Dabei ist der Einfluss der Vermittlung der antiken Kultur über die Araber in Spanien unverkennbar. In der Geistesgeschichte folgt auf das Mittelalter, das Zeitalter des Glaubens dann das Zeitalter der Ratio, der Aufklärung, die später dann in Extreme wie Materialismus, extremer Liberalismus und als Folge die Weltkrige führt oder abgleitet. Es erfolgt also eigentlich ein Bruch in der Entwicklung. In der Stilgeschichte drückt sich das durch Klassizismus, Neo-Stile oder Übernahme von Elementen anderer Kulturen aus, jedoch kaum durch Entwicklung. In der politischen Geschichte wird der Bruch parallel durch die amerikanische und die französische Revolution und deren Folgen vollzogen. Erst die Entdeckung neuer Materialien und Techniken führen wieder zu einem Entwicklungsschub. Jedoch in viele verschiedene Richtungen, also gesamthaft eigentlich ziellos, eher weg vom Kosmos, ins Chaos. Doch war das vielleicht immer so. Was überlebt hat, ist eben der Kosmos.

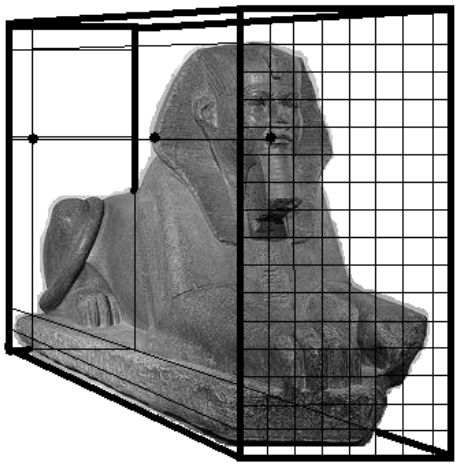


Abbildung 10: Sphinx in Produktion

[2]Schultz, Rätsel im hellenischen Kulturkreis, 1909, S. 145

3.2.3 Geometrie am Bau: „Kunst ohne Wissenschaft ist nichts!“

Zur Präzision

Denkwürdig erscheint einem die erreichte geometrische Präzision in alten Zeiten. So ist bekannt, dass bei der grossen Cheops–Pyramide, welche eine Seitenlänge von ca. 230 Metern hat, die grösste Abweichung der Längen nur 4 cm beträgt. (Altes Reich, 4. Dynastie ?, ca. 2600–2480 – oder 2800 ? — es gibt verschiedene abweichende Argumente für das Alter...). Bei Konstruktionen wie bei den Pyramiden ist die geometrische Realisation der Konstruktion im Gelände zentral. Derartige Masssetzungen sind oft von Königen (Pharaonen...) und Oberpriestern rituell vorgenommen worden. Einfachste Mittel genügen dazu, etwa die „ägyptische Schnur“, oder ein Seil mit Pflöcken. Unverzichtbar ist z.B. die genaue Konstruierbarkeit des rechten Winkels, vgl. nachstehende Figuren.

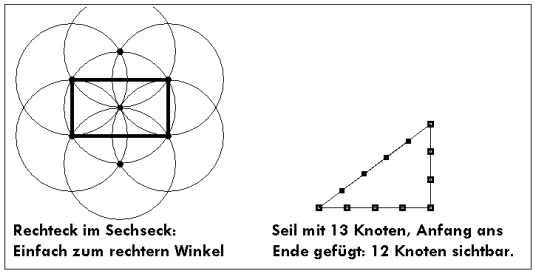


Abbildung 11: Bsp. einfacher Konstruktionen des rechten Winkels mit Seil und Pflock

π als Pyramidenzahl

Oft wird die Frage diskutiert, ob nicht schon die Zahl π z.B. in der Cheops–Pyramide verewigt sei, denn die Masse des Bauwerks weisen darauf hin. Vermutlich wird diese Frage nie wissenschaftlich endgültig entschieden werden können, denn π kann auch ungewollt durch die Konstruktion mit Hilfe eines hypothetischen Messrades „hineingerollt“ sein. Die Herstellung eines exakten Rades war wohl damals aus Plausibilitätsgründen schon sehr gut möglich. Und das Rad, als Kreisscheibe gedacht, ermöglicht eine einfache Symbolisierung der Sonne, altägyptisch also des Sonnengottes Ra (Amun–Ra, Re, Atum, Aton, verschiedene Ausprägungen, wechlselnde Bedeutungen und Schreibweisen). Ausser Zweifel steht sicher, dass schon damals das Verhältnis $Umfang : Durchmesser := \pi$ als Masszahl erkannt werden konnte. Jedoch die Frage, was diese Zahl für Eigenschaften hat (z.B. $\pi \notin \mathbb{Q}$), wird wohl in Ermangelung der notwendigen Methoden nicht sehr tief behandelt worden sein können.

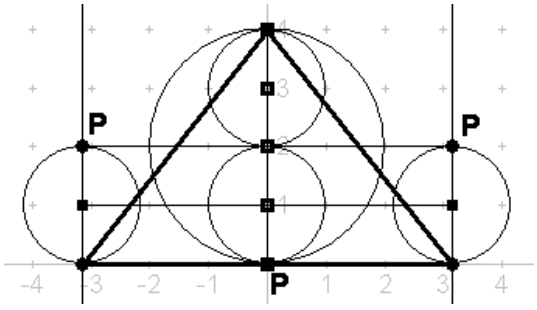


Abbildung 12: Konstruktionen der Cheopspyramidenmasse mit einem Messrad

Für die Längen der Grundkanten finden wir in der Fachliteratur die Angaben $b \times b = 230.38 \times 230.38\, m^2$ und für die ursprüngliche Höhe $h = 146.60\, m$. Rollt man ein Rad mit dem Radius r nun n mal ab, um dadurch die Grundkantenlänge zu erhalten, so gilt $b = n \cdot 2 \cdot r \cdot \pi$. Für h ergibt sich so (vgl. Skizze) $h = 2 \cdot (n \cdot 2 \cdot r)$. Mit der (auf der Grundgrundlage vorhandener Daten) geschätzten königlichen ägyptischen

Elle $e_{ae} = 52.36\,cm$ (vgl. Seiten 258, 39) ergibt sich unter der Annahme Radradius $r =$ Elle e_{ae}:

$$b = 2 \cdot (2 \cdot e_{ae}) \cdot n \;\Rightarrow\; n = 69.9962\ldots,\;\; b = 2 \cdot (e_{ae} \cdot \pi) \cdot n \;\Rightarrow\; 70.027$$

Aus Plausibilitätsgründen sind diese Resultate mit Messfehlern behaftet. Dazu kann man aus ebensolchen Gründen annehmen: $n \in \mathbb{N}$. Daher können wir vermuten: $n = 70 = 7 \cdot 10$. (10 ist die Grundzahl im ägyptischen Zahlensystem, 7 ist die Zahl der Planeten, welche die ägyptische Astrologie bestimmt hatten.) Die Zahl π könnte daher hier auch ohne wissentliches Wollen, d.h. rein durch den Gebrauch des Rades, „hineingerollt“ sein. Doch darüber lässt sich nur mutmassen.

Mit $n = 70$ und $e_{ae} = 52.36\,cm$ erhalten wir umgekehrt $h = 146.608\,m$ und $b = 230.291\,m$. Der grösste Fehler weicht also von den heute gehaldelten Werten nicht einmal um $10\,cm$ ab. Für den Neigungswinkel $\alpha = \arctan(\frac{2\,h}{b})$ ergibt sich $51^o\,51'\,14.4''$. Als Messwert finden wir in der Fachliteratur $51^o\,52'$ (letzte Ziffer fehlerbehaftet), also praktisch Übereinstimmung. Der Winkel $51^o\,51'\,14''$ taucht übrigens in der Geometrie des Pantheons in Rom (vgl. Seite 171) wieder auf.

Bemerkung: Umgekehrt könnte man nun aus den Cheops-Pyramidenmassen auf die damalige Existenz des Rades als Messrad schliessen.

Vergleichen wir das Pyramidenvolumen $V_P = \dfrac{b^2 \cdot h}{3} = \dfrac{n^3 \cdot 2^4 \cdot r^3 \cdot \pi^2}{3}$ mit dem Volumen $V_K = \dfrac{4\,n^3 \cdot 2^3 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$ der grossen Kugel in der Skizze, so ergibt sich $\mu_1 = \dfrac{V_P}{V_K} = \dfrac{\pi}{2}$.

Ein Vergleich mit den beiden wie eine 8 aufeinandersitzenden kleinen Kugeln ergibt: $\mu_2 = \dfrac{V_P}{V_{2\,k}} = 2\,\pi$. Daher ist V_P das geometrische Mittel aus μ_1 und μ_2. Räumlich gedacht zeigt die obige Skizze 7 Kugeln: 4 an den Kanten, eine in der Mitte unten, eine weiter oben stehende und dazu die grosse Kugel.

Bemerkung: Zur Nivelierung der Grundfläche hat man im Altertum Wassergräben benutzt.

Steckt der goldene Schnitt in der Cheopspyramide?

Bei einer Pyramidenlänge von $b = n \cdot (2\,r) \cdot \pi$ und einer Höhe von $h = 2 \cdot n \cdot (2\,r)$ ergibt sich die Hypothenuse des durch b und h gegebenen gleichschenkligen Dreiecks zu $s = \sqrt{16 n^2 r^2 + n^2 \pi^2 r^2}$. Daraus berechnet man das Verhältnis von s zur halben Grundseitenlänge $b_2 = \dfrac{b}{2}$:

$$q = \frac{s}{b_2} = \frac{\sqrt{16\,n^2\,r^2 + n^2\,\pi^2\,r^2}}{n\,r\,\pi} = \frac{\sqrt{16 + \pi^2}}{\pi} \approx 1.61899$$

Für die Differenz zum goldenen Schnitt finden wir:

$$\varphi - q = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{16+\pi^2}}{\pi} \approx 0.000959198 << 1$$

Bemerkung: Wenn wir annehmen, dass die Zahl π der Pyramidenkonstruktion zugrunde liegt, dann ist diese Nähe zum goldenen Schnitt eine mathematische Konsequenz. Ob diese Konsequenz angestrebt worden ist oder nicht angestrebt worden ist, können wir alleine aus der Geometrie heraus nicht beurteilen. Umgekehrt könnte man auch mutmassen, dass das Verhältnis des goldenen Schnitts $s : b_2$ der Konstruktion zugrunde liegt, alleine seiner Schönheit wegen. Dann wäre jetzt die Näherung $\dfrac{\pi}{2} \approx \dfrac{b}{h}$ eine mathematische Konsequenz. Daraus zu schliessen, dass π gewollt oder ungewollt hineingekommen sei, ist wiederum alleine aus der Geometrie heraus nicht möglich. Trotzdem müssen wir uns in jedem Fall

mit der realen Existenz der Näherungen von $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ und π in den Massen der Pyramide abfinden. Wir staunen über das schöne Zusammenklingen dieser Masse. Und wir dürfen uns ernsthaft fragen, ob eine solche ausserordentliche geometrische Situation gerade ausgerechnet an diesem ausserordentlichen, konkurrenzlos überwältigenden Bauwerk wohl zufällig entstanden sei. Wenn dem so wäre, so könnte man weiter schliessen, dass dem hier fokussierten Zufall eine ausserordentliche zentrale Bedeutung zukäme, weil er sich gerade im richtigen Moment und am richtigen Ort manifestiert hat — und damit mangels Gegenbeispielen zu dieser Bedeutung gerade dem Zufall trotzt...

Die Cheops–Pyramide und die Distanz zur Sonne

Die mittlere Distanz zur Sonne d_S nennen wir eine „astronomische Einheit". Sie beträgt rund 150 Millionen Kilometer (exakter: mittlere Distand $d_m \approx 149.6 \cdot 10^6\ km$, grosse Halbachse $d_g \approx 152.1 \cdot 10^6\ km$, kleine Halbachse $d_k \approx 147.1 \cdot 10^6\ km$). Akzeptiert man für die Höhe der grossen Pyramide $h = 146.608\ m$, so errechnet man $d_g : h \approx 1.037 \cdot 10^9$, $d_m : h \approx 1.020 \cdot 10^9$, $d_m : h \approx 1.003 \cdot 10^9$, d.h. mit 0 bis rund 4 % Abweichung ist die Distanz zur Sonne eine Milliarde mal die Höhe der Cheops–Pyramide. Akzeptiert man hingegen die Schätzung $h = 148.2\ m$, so ergibt sich $d_g : h \approx 0.9926 \cdot 10^9$, $d_m : h \approx 1.009 \cdot 10^9$, $d_m : h \approx 1.026 \cdot 10^9$. In diesem Falle wäre die mittlere Distanz zur Sonne mit weniger als 1 % Abweichung gleich eine Milliarde mal die Höhe der Cheops–Pyramide. Umgekehrt könnte man hier auch sagen, dass eine Milliarde mal die Höhe der Cheops–Pyramide eine Distanz ergibt, die tatsächlich im Intervall zwischen der minimale und maximalen Distanz der Erde von der Sonne liegt.

Was hat diese Feststellung nun zu bedeuten? Die Vermutung liegt nahe, dass man im alten Ägypten die Distanz der Erde von der Sonne schon gekannt haben muss. Das würde einschliessen, dass man fähig gewesen sein muss, irgendwie diese Distanz durch Rechnung und Messung zu bestimmen. Man müsste sich in diesem Zusammenhang allerdings überlegen, mit welcher Chance es möglich wäre, mit einer zufälligen Höhe einer solchen Pyramide die Distanz der Erde von der Sonne somit rein zufällig so zu treffen, dass darin die Milliarde „verewigt" ist. Wir wissen, dass die alten Ägypter im Zehnersystem gerechnet haben. Die Milliarde ist hier sehr bedeutend. Anererseits kennen wir eine Million als den grössten Zahlenwert, für den uns eine altägyptische Hyroglyphe gekannt ist. Für eine Milliarde hätte man daher wenig Vorstellung gehabt. Man kann sie durch das Produkt „tausend mal eine Million" darstellen, was geheimnisvoll anmutet. Doch kennt man von den Ägypter den Sonnenkult und dessen zentrale Bedeutung. Die Distanz zur Sonne, einem Gotte also, hätte man gewiss nicht so mir nichts, dir nichts zu nennen gewagt, als wäre die Sonne bloss nur ein Gegenstand. Da nun in der Cheops–Pyramide erstaunliches Wissen, eben auch astronomisches Wissen, durch bauliche Proportionierungsmöglichkeiten überliefert ist, besteht schon eine recht grosse "Wahrscheinlichkeit" dafür, dass hier nicht nur der Zufall am Werke war. Priesterliche Verschleierungstechniken sind dabei in die Einschätzung einzubeziehen...

Zur speziellen Lage und zum Gewicht der Cheops–Pyramide

Es ist bemerkenswert, dass die Cheops–Pyramide zu Gizeh bei Kairo ziemlich exakt nach Norden ausgereichtet ist. Verlängert man die Diagonalen des Quadrats im Grundriss bis ans Mittelmeer, so trifft man etwa die Punkte, die seitlich das Nil–Delta begrenzen. Es ist anzunehmen, dass der Küstenverlauf seit dem Bau der Pyramiden nicht wesentlich geändert hat. Die Standortwahl ist damit ausserordentlich. Kann eine Wahl mit eienr solchen Konstellation Zufall sein?

Weiter liegt Gizeh ca. auf 30^o nördlicher Breite. Damit ergibt sich die Distanz zum Nordpol als „etwa gleich" der Distanz zum Erdmittlepunkt (ca. 4.7 % Abweichung, Unregelmässigkeit der Erdform nicht berücksichtigt).

Oft ist noch zu hören, dass das das Gewicht der Erde so gross ist wie exakt 10^{15} mal das Pyramidengewicht. Diese Aussage ist ebenfalls „sehr" ungenau. Das heute akzeptierte Gewicht unseres Planeten

beträgt $5.9736 \cdot 10^{24}\ kg$. Das Gewicht der Cheops–Pyramide dagegen wird momentan auf $6.25 \cdot 10^{9}\ kg$ geschätzt. Daraus errechnet man ein Verhältnis von $9.56 \cdot 10^{14} : 1$. Die Abweichung vom schönen Verhältnis $10^{15} : 1$ beträgt damit ca. 4.4 %, ähnlich der Abweichung bei der Distanz zum Nordpol.

Damit ist keine Aussage gemacht. Man kann von Zufall reden — oder auch von ehemals ungenauen Resultaten, immer vorausgesetzt, dass sich inzwischen nichts an den verwendeten Massen geändert hat. (Dass die Masse der Erde nicht exakt konstant bleiben können, ist trivial. Allerdings wird eine Veränderung über Zeiträume von ein paar tausend Jahren sich sicher nicht im Bereich von Prozenten bewegen.)

Das pythagoräische (ägyptische) Dreieck in den Pyramiden

Ein ägyptisches Dreieck ist ein pythagoräisches Dreieck mit den Seitenverhältnissen $a : b : c = 3 : 4 : 5$ ($\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$). In den Pyramiden sind nun nach den uns vorliegenden Massen diese Proportionen auffindbar. Z.B. in der Königskammer der Chops–Pyramide mit a = Länge der stirnseitigen Flächendiagonalen des Rechtecks gebildet aus Breite und Höhe, b = Raumlänge und c = Länge der Raumdiagonalen.
Weiter finden wir an der Chephren–Pyramide die Basismasse $a \times a = 215.25 \times 215.25\ m^2$ und die Höhe $h = 143.50\ m$. Das gibt mit $a_1 = \frac{a}{2}$ ein Verhälltnis von $a_1 : h = 3 : 4$. a_1, h und die Seitenflächenhöhe $s = \sqrt{a_1^2 + h^2}$ bilden daher ein ägyptisches Dreieck.
Das ägyptische Dreieck begegnet uns auch später wieder in den Grundrissen wesentlicher Bauwerke, z.B. im Parthenon oder in der Kathedrale von Chartres. (Vgl. Seite 169.)

Zufall oder planvoll gewollt?

Die oben beschriebenen Phänomene werfen Fragen auf. Sind diese bemerkenswerten Übereinstimmungen oder Ähnlichkeiten in den Pyramiden–Massen, der Geometrie und der Lage bewusst gewollt, oder sind sie nur durch eine glückliche Fügung des Zufalls (in der damaligen Sprache eine Fügung eben der Götter), an einem Ort entstanden, wo die Götter damals im Zentrum standen?

Seltsamerweise besteht hier ein Zustand, wo man kaum von evidenten Nachweisen der möglichen interessanten Thesen sprechen kann. Andererseits ist es aber auch nicht möglich, die hier konstruierbaren Thesen als puren Unsinn abzutun. Die Situation ist einfach die folgende: Man hat zu wenig Information zur Erhärtung von Thesen — und zuviel Information, um das Nachdenken über die Sache bleiben zu lassen. Was daher bestehen bleibt ist die Neugier — und damit die Hoffnung auf Gewinn von weiterer Information.

Ein Vorschlag zur Altersbestimmung der Cheopspyramide

Angeblich weicht die Westseite der grossen Pyramide weniger um als ein zwanzigstel Grad von der Nordrichtung ab. Es entsteht die Frage, wie man die Nordrichtung damals so exakt feststellen konnte, wo man ja mit grosser Wahrscheinlichkeit noch nichts von einem Kompass wusste und der heutige Polarstern infolge der Präzession (Torkelbewegung der Erde) auch nicht zur Anzeige der Nordrichtung so wie heute verwendbar war. Frau Kate Spence hat nun folgende Theorie vorgeschlagen.

Vermutlich war man zur Bestimmung der Nordrichtung dennoch auf den Himmel angewiesen. In der vermuteten Zeit vor ca. 4'500 Jahren stand dort aber mit der verlangten Exaktheit nach den heute bekannten Gesetzen kein Polarstern. Ebenso variiert die Genauigkeit der Nordausrichtung anderer Pyramiden angeblich mit der Torkelbewegung der Erde. Verlängert man nun aber die Line zwischen den Sternen Beta Ursae Majoris und Zeta Ursae Minoris (im grossen und kleinen Bär in der Gegend des nördlichen Himmelspols) bis zum Erdhorizont, so hat man im Jahre 2467 v. Chr. von der Pyramide aus zu diesem Horizontpunkt weitgehend exakt die Nordrichtung, vorausgesetzt dass die Fehlerschranken aller eingegangenen Daten stimmen. Der beschriebene Linienschnittpunkt lässt sich mit den damaligen Methoden

sehr exakt ausmachen. Bewegt man sich in der Zeit weg vom Jahr 2468, so wird der Fehler in der Abweichung des genannten Linienschnittpunktes von der exakten Nordrichtung immer grösser. Ein Fehler von 1/20 Grad muss daher im Jahr 2478 v. Chr. bestanden haben. Damit wäre das Jahr der Vermessung und des Beginns des Pyramidenbaus fixiert. Die Cheops–Pyramide würde damit 70 Jahre jünger als nach der offiziellen bisherigen Theorie angenommen. Diese bisherige Theorie stützt sich auf Annahmen und Verflechtungen, da die altägyptische Geschichte keineswegs exakt überliefert ist. Aber gegen diese 70 Jahre sträubt sich ein Heer von sprachwissenschaftlich–geschichtswissenschaftlich orientierten Gelehrten, deren über Jahrzehnte mühsam aufgebautes Theoriegebäude damit zum Einsturz gebracht worden wäre. Was ist nun richtig? Ist Kate Spencers Theorie eine unter vielen? Hat sie Fehler? Oder darf einfach nicht sein, was nicht sein darf, weil sonst der wissenschaftliche Ruf vieler Schaden nimmt und die Kosten für eine Generationen dauernde Arbeit in den Sand gesetzt ist? Entscheiden kann man diese Frage aus unserer Warte kaum. Man kann jedoch ganz sicher wissen, dass noch gewichtige Fragen betreffend die Pyramiden bisher sehr weit sind.

Die Korffsche Entdeckung

Von Friedrich Wilhelm Korff teilte im Jahre 2007 folgende Entdeckung mit: Die Pyramidenneigungen sind gebildet nach den Intervallen der antiken Tonarten, welche wir von Pythagoras kennen und welche wir diesem zuschreiben. Die Pyramiden „klingen in den Augen“. Die antiken Tonarten wären daher von Pythagoras, der selbst je in Ägypten geweilt hat, aus Ägypten importiert oder aus dem Erfahrungsschatz seiner Zeit übernommen worden und daher praktisch so alt wie unsere Geschichte selbst.

Nach Korff lag am Ausgangspunkt seiner Bemühungen das Ringen um das Verständnis einer bisher nicht verstandenen und im Zusammenhang mit Ägypten beschriebenen Zahlentabelle in den „Nomai“, einem Spätwerk Platons, welcher Ägypten ebenfalls gekannt hat. Dieser Tabelle wird im Werk Platons mit einer übergrossen Achtung begegnet, ja sie sei gar die Grundlage des ägyptischen Staatsgebildes, woraus folgt, dass sie für Platon zentral war. Den Schlüssel zum Verständnis der Tabelle fand Korff im überkommenen Mass– und Messystem des Imhotep, des heute als solcher bezeichneten „Architekten“ unter Pharao Djoser, ca. 2635 v. Chr., also lange vor Cheops. Nach den Erkenntnissen setzen sich nun alle Ellen– und Handbreitenmasse aus Produkten der natürlichen Zahlen bis und mit 7 zusammen, auch die ganzzahligen Pyramidenbasen und die Höhen. Es gilt: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7! = 5040$. ($7! = 5040$ kann man mit den ersten vier Primzahlen $\in \{2, 3, 5, 7\}$ (resp. mit $M_1 = \{1, 2, 3, 5, 7\}$) erzeugen.) In der Cheops–Pyramide als Beispiel ist die Basis (Breite) 230.38 m, was bei einer wahrscheinlichen Länge der altägyptischen Elle von 0.5236 m dann $230.38 : 0.5236$ *Ellen* $= 439.99$ *Ellen* ≈ 441 *Ellen* macht. Bei einer wahrscheinlichen Höhe von 148.2 m ergeben sich $148.2 : 0.5236$ *Ellen* $= 283.04$ *Ellen* ≈ 280 *Ellen*. Nimmt man die heute oft publizierte Höhe von 147 m, so erhält man $147 : 0.5236$ *Ellen* $= 280.749$ *Ellen* ≈ 280 *Ellen*. Korff vermutet, dass nur ganze Masse zur Anwendung kamen und dass daher die Masse der Cheops–Pyramide $3 \cdot 3 \cdot 7^2$ *Ellen* $= 441$ *Ellen* ($3 \cdot 3 \cdot 7^2$ statt $(3 \cdot (3 \cdot 2) \cdot 7 = 3 \cdot 6 \cdot 7)$ und $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$ *Ellen* $= 280$ *Ellen*. Damit entsteht eine Neigung von 51.78^o. Kürzt man die Zahlen 441 und 280 um den grössten gemeinsamen Teiler 7, so ergibt sich eine ähnliche Figur mit der Breite 63 und der Höhe 40. Dasselbe erhält man bei der Pyramide selbst, wenn man als Grundmass die 7–fache Elle einführt. Verdoppelt man die Höhe hier zu 80, so erhält man ein Rechteck mit den Massen 63×80, dessen Diagonale dieselbe Neigung hat wie die Pyramide. Nun ist aber $63 \cdot 80 = 5040 = 7!$. (Mit der Menge der Zahlen $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ lassen sich übrigens ohne die leere Menge 63 Teilmengen bilden. Daraus lassen sich 63 verschiedene Faktoren erzeugen(durch Multiplikation der Elemente einer Teilmenge), welche 5040 teilen. Von diesen Faktoren sind aber nur 51 verschieden. (Was die angeblich von Platon aufgefundenen „60 Teile der Zahl 5040 sind“, von denen in einer Publikation zur Sache in der Frankfurter Allgemeinen Zeitung vom 18. 9. 2007 die Rede ist, kann momentan nicht nachvollzogen werden.)

Nun ergibt sich aus $\frac{80}{63} = \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9}$ ein Bezug zur Musik. Denn die Intervalle der antiken Tonarten lassen sich ebenfalls mittels Multiplikation aus den oben erwähnten Zahlen $\in M_1 = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ erzeugen. (Überliefert durch Claudius Ptolemaios, Alexandria, 2. Jahrhundert n. Chr.) $\frac{10}{9}$ ist der kleine Ganzton.

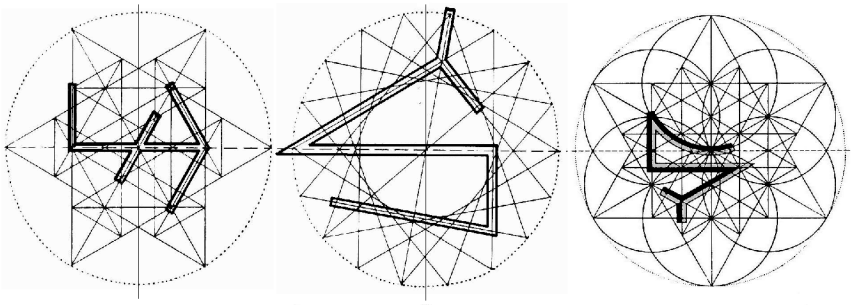
Das umgekehrte Verhältnis von $\frac{8}{7}$, also $\frac{7}{8}$ entsteht aus der grossen Septime $\frac{15}{8} = \frac{7}{8} + \frac{8}{8} = \frac{7}{8} + 1$. Andererseits entsteht $\frac{7}{8}$ aus dem heute so bezeichneten grossen Ganzton $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$, denn es gilt $\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$. Darin wird der „Diatonon malakon“ gesehen.

Analog findet Korff angeblich in weiteren Pyramiden folgende Klänge: Mykerinos: $\frac{5}{4}$ (grosse Terz), Unas: Quinte $\frac{3}{2}$, Neferirkare: $\frac{10}{7}$ (grosser Tritonus), Amenemhet I.: $\frac{7}{5}$ (kleiner Tritonus), Sesostris I, III: $\frac{7}{6}$ (Naturtonterz), Amenemhet III.: $\frac{8}{7}$ (übergrosser Ganzton), Djedefre: $\frac{7}{4}$ (kleine Septime), weitere zehn Pyramiden mit dem Quardetrücksprung $\frac{4}{3}$. Korff folgert angeblich daraus eine musikalische Herkunft der Pyramiden. Das allerdings ist wohl ein gedanklicher Schnellschuss, denn bevor zwingend eine Kausalität vermutet werden muss, ist wohl immer in solchen Fällen eine Analogie richig: Die Pyramiden zusammen mit der hier involvierten Ordnung der Musik folgen den gleichen mathematischen Gesetzen, welche wohl oder über in damaligen Köpfen vorhanden gewesen sein mussten, sofern man die Tonintervalle auch an etwaigen erhaltenen Musikinstrumenten anhand der Löcherordnung bei Blasinstrumenten u.s.w. heute noch rekonstruieren kann. Leider ist in der Musik aus den Epochen vor der gregorianischen Zeit im Frühmittelalter sehr wenig Exaktes bekannt. Exaktheit alleine entscheidet hier über die Richtigkeit der Überlegungen. Es ist aber durchaus denkbar, dass im alten Ägypten die Tonintervalle der Griechen, welche wir heute auf die Pythagoräer zurückführen, schon bekannt waren und dass bei Saiteninstrumenten eben die Intervallverhältnisse, die ja zu einem so „göttlichen Klang“ führen, auch für andere, ästhetische, religiöse oder auch machtpolitische Zwecke benutzt worden sind.

Abgrenzung gesellschaftlicher Gruppen und Klassen durch Geometrie als höheres Prinzip

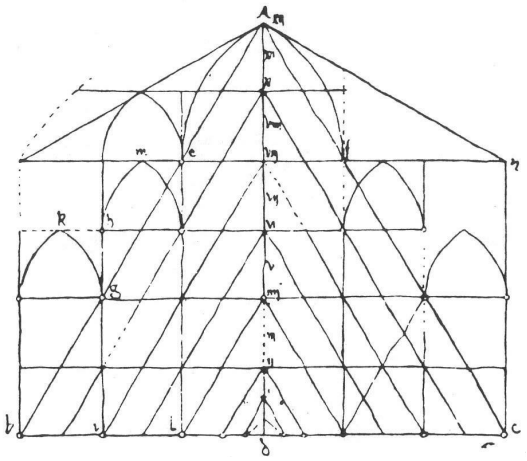
Die sakrale Bedeutung der Geometrie im Vergleich zum „profanen Chaos“ wird deutlich, wenn man sich folgende Tatsachen vergegenwärtigt: Alte Tempel (z.B. altägyptische Tempel oder der Tempel Salomons) wiesen eine strenge geometrische Konzeption auf. Geometrie steht hier für Regelmässigkeit. Die den Ungläubigen oder dem gemeinen Volke ohne Auflagen zugängliche Vorhöfe hatten dagegen immer unregelmässige Formen: Eine bewusst so zur Schau gestellte Abgrenzung des Kosmos der geregelten Gefühle und Weltsichten der Eingeweihten vom Chaos der beliebig zusammengelaufenen Regellosigkeiten, Zufälligkeiten oder Profanitäten. Interessanterweise findet sich die Fortsetzung dieser Ausdrucksweise in den oft unregelmässig gestalteten Westtürmen mittelalterlicher Sakralbauten, während die gegen Jerusalem gerichtete Ostseite regelmässig war.
Eine Entsprechung finden wir auch in der strengen Geometrie der römischen Kolonie–Städten, die sich von den zufällig entstandenen Einheimischensiedlungen abhoben. Erwähnenswert ist dabei noch das römische Heerlager, das normalerweise quadratischen Grundriss aufwies.

Bis ins 13. und 14. Jahrhundert oblag die Errichtung von Sakralbauten bei uns in Westeuropa vorwiegend mönchischen Baukooperationen. Nach und nach entwickelte sich daraus aber ein Laienbauwesen: Die Arbeiter waren in Bauhütten vereint, unterteilt nach Rektor (z.B. ein Bischof), Meister, Parlier (die Sprecher, heute Polier), Gesellen und Lehrlinge, welche in Geometrie und geometrischem Zeichnen unterrichtet worden sind. Bei der Gesellenerhebung erhielten sie ein besonderes Kennzeichen, das Steinmetzzeichen (später u.U. ihr Wappen). Dieses Zeichen ergab sich durch einzeichnen in eine geometrischen Figur, welche durch Wiederholung oder parallele Entwicklung der Wurzel entsteht. Diese ist das einfacheren Zeichen der Bauhütte. Damit mussten sich die Gesellen auf ihrer Wanderschaft in den besuchten Bauhütten ausweisen. Bei einer neuen Bauhütte angekommen, hatten sie dreimal zu klopfen. Dann wurde nur geöffnet, wenn einige Fragen richtig beantwortet wurden. Danach erst kam die Geometrieprüfung, welche dann den Einlass erlaubte: Der Geselle hatte zu zeigen, wie sein persönliches Zeichen aus der Wurzel seiner Bauhütte entwickelt werden konnte. Die Bauhütten haben ihr Wissen eifersüchtig gehütet, damit kein unwürdiger Einlass erhielt.

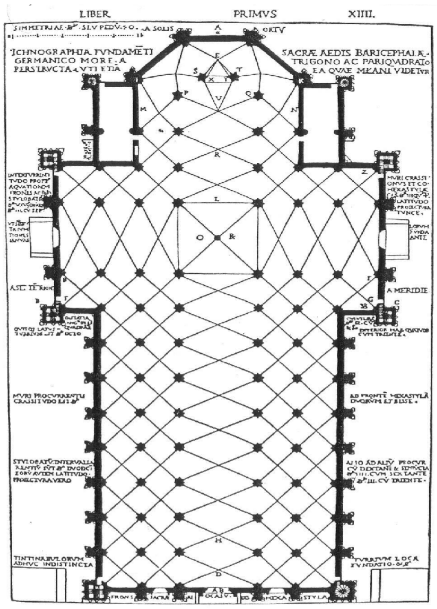


P. / Abb. 13: Steinmetzzeichen aus der Wurzel entwickelt

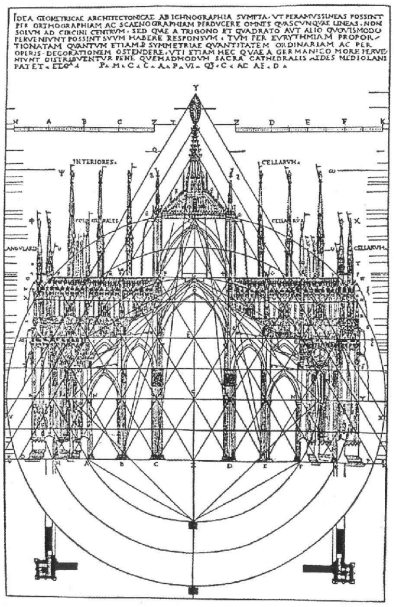
Anfangs der Neuzeit (1492, Entdeckung Amerikas) wurden dann auch Holzschnitzer, Glasmeister oder Maler in die Bauhütten aufgenommen. Nach dem Ausbruch der Reformation (1517) ging die sakrale Bautätigkeit dann markant zurück. Viele Bauleute sind jetzt Drucker geworden (Erfindung des Buchdrucks durch Gutenberg 1445). So findet man dann in dieser Zeit vielfach die alten Steinmetzzeichen im Buckdruck wieder (z.B. auf Stichen als „Unterschrift “).
In den ehemaligen Bauhütten kam es oft schon zu Auseinandersetzungen, wie sie heute auch noch anzutreffen sind:
Zufällig sind zwei Beispiele von solchen Auseinandersetzungen betreffend die Bedeutung der Geometrie im Zusammenhang mit dem Bau des Mailänder Domes aus den Jahren 1391 und 1398 erhlaten geblieben. Schon damals entstand ein Streit zwischen den einheimischen und den herbeigerufenen ausländischen Meistern wegen der Triangulatur des Schnittes der Kirche. Experte in arte geometriae, Meister der Messkunst und Oberaufseher war Gabriele Stornaloco. Seine Skizzen sind erhalten geblieben (vgl. nachfolgende Abbildungen). Beim Streit von 1398 hat man als Richter den Architekten Jean Mignot aus Paris hergebeten. Bei dieser Auseinandersetzung um den Bau des damals „südlichsten“ gotischen Grossdomes waren die wohl nicht sehr gebildeten, im Lande heimischen Meister der Ansicht, dass die Wissenschaft der Geometrie an diesem Orte nichts zu suchen hätte, weil Wissenschaft und Kunst zwei ganz verschiedene Dinge seinen (quod scientia geometriae not debet in iis locum habere et quia scientia est unum et est aliud). (Gotische Bauwerke findet man natürlich auch weit südlicher, z.B. im Königreich Neapel–Sizilien oder in Spanien. . .) Unter „gotisch“ wurde übrigens in der unkundigen Denkweise vieler „von den Goten, den Barbaren, aus dem Norden kommend“ verstanden. Vermutlich ist dieses Wort auch ein Ausdruck der späteren italienischen Renaissance.
Mignot, aus dem Lande der Gotik kommend und in dieser Sache bewandert, hat anders gerichtet: Ars sine scientia nihil est! Übersetzt: **Kunst ohne Wissenschaft ist nichts!**
Interessanterweise trifft man diese Art Streit zwischen den Meistern der Geometrie und den die Geometrie verachtenden Meistern anderer, nicht so exakt fassbarer Argumente auch heute wieder. Das war nicht immer so. Denken wir z.B. an die Renaissance: Dürrer hatte selbst ein Buch über Geometrie verfasst. Und Condivi nennt eben dieses Werk als einziges, von dem hiermit überliefert ist, dass sein Meister Michelangelo sich mit ihm befasst hat. Leonardo schreibt: „Lasst keinen meine Werke lesen, der nicht Mathematiker ist“. Und Raffael hat seine Jugend in der Umgebung des Hofes der Montefeltro von Urbino verbracht, wo sein Vater Hofmaler war und wo Luca Pacioli, der damals grosse Mathematiker und Humanist die Wissenschaften dominierte. (Werk „Über die göttlichen Proportionen“, illustriert von Leonardo.) Auch später findet man in Kunst und Architektur wesentliche Köpfe, die eine grosse Verbindung mit der Mathematik hatte. So war z.B. der als Architekt und Revolutionär bekannt gewordene Semper sogar ein Schüler von Gauss. Oder man denke an Wittgenstein, u.a. Schüler von Russel — oder an Escher und seine Beziehung zu Coxeter.



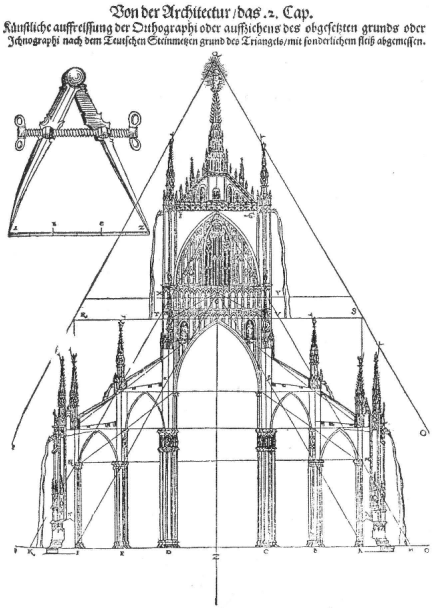
P. 14: Mailander Dom, 1391, G. Stornaloco



P. 15: Mailander Dom, 1521, Cesariano (zu Vitruv)



P. 16: Mailander Dom, 1521, Cesariano (zu Vitruv)



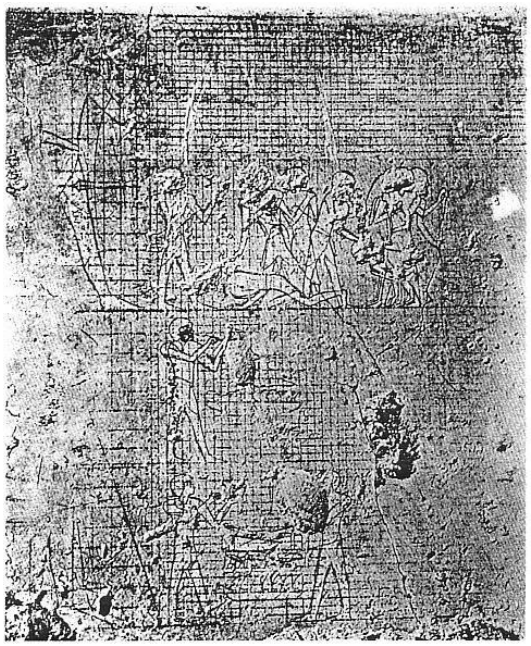
P. 17: Mailander Dom, 1548, Ryff (zu Vitruv, Architectura)

3.2.4 Beispiele von Anwendungen der Geometrie vor der Zeit von G. Monge

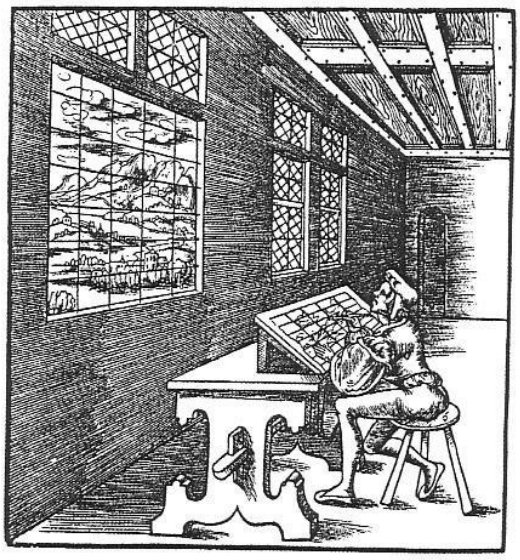
1798 erschien in Paris das Werk „Géométrie descriptive“ von G. Monge. Damit begann das Zeitalter der allgemein zugänglichen Konstruktionsmethoden der Darstellenden Geometrie. Dadurch ist es möglich geworden, Konstruktionsprobleme des dreidimensionalen Raumes in der zweidimensionalen Ebene zu lösen. Die nachfolgenden Bilddokumente zeigen aber, dass uns viele bekannte Methoden der praktischen Geometrie aus viel früherer Zeit überliefert sind. Allgemein bekannt ist das gewonnene theoretische Verständnis der Perspektive in der Renaissance. Wohlverstanden bedeutet das Fehlen von Quellen für

irgendwelche andern Methoden nicht, dass man sie nicht früher auch schon gekannt hat. Vieles ist verlogen oder vergessen worden. Man denke nur, dass die Bauhütten ihr Wissen eifersüchtig mit grosser Geheimhaltung vor der profanen Welt gehütet haben.

„Industrielles“ Kopieren mit Quadratraster und Vorläufer der darstellenden Geometrie:

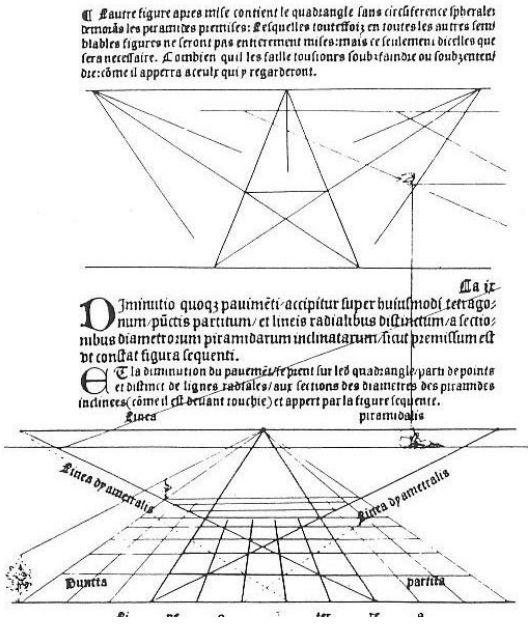


P. 18: Altes Ägypten, Kopie ab Vorlage, Suemnut-Grab ca. 1435 v. Chr.

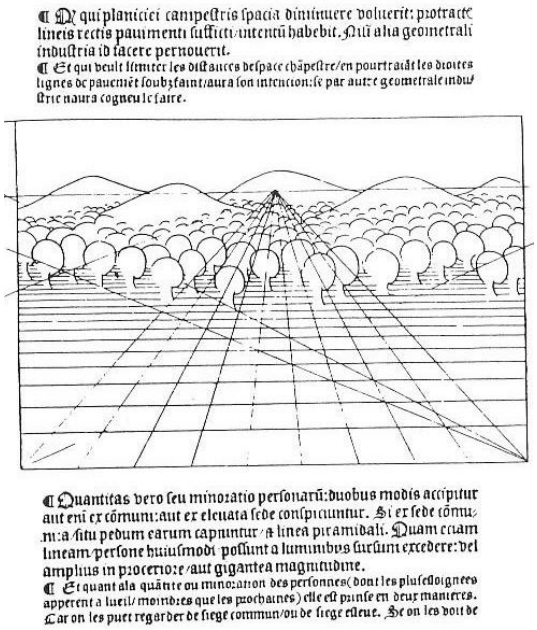


P. 19: Renaissance, Kopie der Landschaft (H.Rodler, 1531)

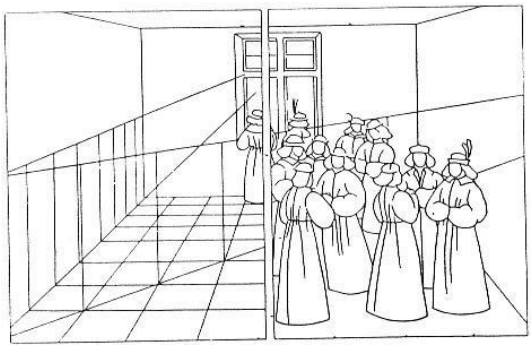
Florentiner–Methoden nach L. B. Alberti 1436 (Werk „Della pittura“), hier Zeichnungen nach Jean Pélerin (Viator) 1505, 1509, aus „De Artificiali Perspectiva“:



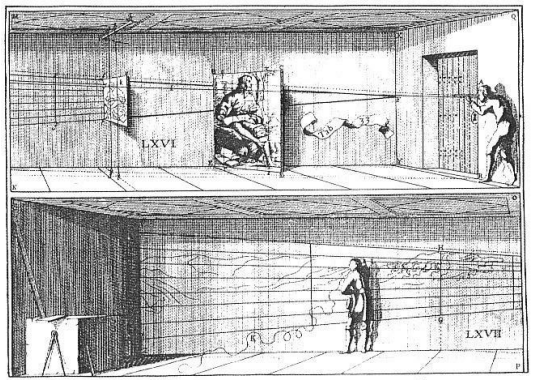
P. 20: Pavimento, Viator, 1509



P. 21: Pavimento, Viator, 1509

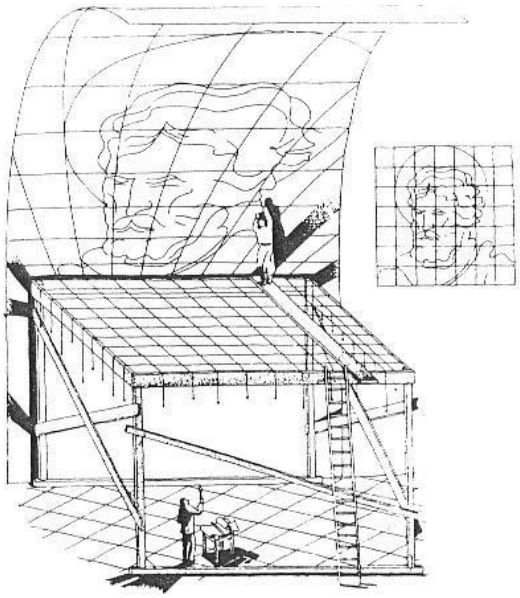


P. 22: Körpergrössen, Viator, 1509

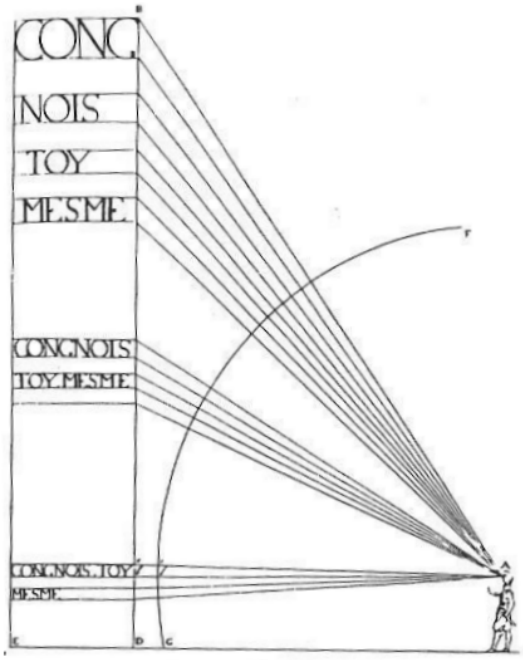


P. 23: Kopieren, J.F. Niceron 1652

Umgang mit hohen Räumen und Gewölben:



P. 24: Kopie an der Decke, Schema



P. 25: Inschriften an den Wänden hoher Räume, Cauls, 1612

3.2.5 Bedeutung einiger kulturell häufiger Zahlen und Figuren

Hier geht es darum zu ergründen, wieso in vielen kulturellen Bereichen gewisse Zahlen so häufig immer wieder vorkommen. Wir wollen hier speziell über die 1, die 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 24, 28 und 360 nachdenken. Die Bedeutung weiterer Zahlen wollen wir dann darauf stützten. Denn Zahlen waren in vergangenen Zeiten nicht nur Instrument zur Beherrschung der Quantität. Sie waren den Menschen auch Ausdruck von Qualität. Noch heute erfahren wir in der Sprache und den Formen der überkommenen Kultur eine oft tiefe symbolische Bedeutung bis hin zur Mystik — und dem aufmerksamen Beobachter wird nicht entgehen, dass diese Bedeutung ihren vielfältigen Platz im täglichen Geschehen hat...
Vorgängig ist es wichtig sich daran zu erinnern, wie man sich die Entstehung der Zahlen gedacht hat. Heute denkt man sich oft die natürlichen Zahlen wie Perlen auf einer Schnur aufgebaut (Zählrahmenmodell). Auf die 1 folgt die 2, auf n folgt der Nachfolger $n+1$, so in alle Ewigkeit. Daher ist es nicht schwierig, sich vor der 1 die 0 zu denken, und davor die -1 u.s.w.. Diese Vorstellung war aber nicht immer üblich.

In der Antike war die 0 nicht als Zahl akzeptiert. Wieso? Man dachte sich die 1 als Einheit, vielleicht als „Kuchen“ oder als Erde in Form einer Scheibe. (Denn ursprünglich war die Erde, die Welt des Menschen also, wie eine Scheibe, aufgeteilt zwischen den Völkern. Das Nichts ist dem durch die Sinne dirigierten Menschen nicht erfahrbar, die Null war also kein Thema.) Die 2 kann man daraus gewinnen, indem man den Kuchen zweiteilt, also 2 Stücke fabriziert. Die 3 genauso, indem man 3 Stücke fabriziert u.s.w.. So kommt man auch zu jeder natürlichen Zahl — aber nicht zur 0. Denn die 1 kann nicht in „kein Stück“ geteilt werden. Aber wieso ist denn die Bedeutung der 1 als „Kuchen“ so wichtig? Das soll nun erklärt werden.

Wichtig für die Architektur: *Die alte Zahlensymbolik und Sakralgeometrie hat als Randgebiet der Mathematik und ihrer Geschichte eine grosse Bedeutung für jene, die den Beruf eines Architekten ausüben. Denn ohne die einschlägige Bildung ist es nicht möglich, Projekte zu einem guten Ende zu führen, in denen z.B. die Restauration oder Erhaltung alter Bauwerke mit ihren oft noch vorhandenen eingebauten Kunstwerken oder Landschafts– und Kultur–Bezügen eine Rolle spielen. Da hört man dann oft das Schimpfwort „Tod–Restauration“. Man bedenke z.B., dass ca. 90 Prozent der Menire und Dolmen, die aus Quellen vergangener Jahrhunderte ersichtlich sind, später als sinnlose „Hindernisse“ von Bauern und Architekten abgeräumt wurden, verloren für immer. Oder Ende des 19. Jahrhunderts bis Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts hat man in schweizer Städten oft ganze mittelalterliche Quartiere sowie grössere, weitherum bekannte Kunstwerke abgerissen (Bsp.: Basler Totentanz!), um Platz zu machen für die „moderne Zeit“ und die Grösse ihrer Kunst, die heute, gar nicht sehr viel später, oft als Schandfleck empfunden wird, betitelt mit Ausdrücken wie „Kaiser Wilhelm–Architektur“ oder „Hitler–Architektur, Faschistenklotz, Naziprotz“. Die hier zum grossen Teil von Architekten mitbegangene Kulturzerstörung hat hierzulande bekanntlich oft mehr Verluste bewirkt als im nahen Ausland die Weltkriege...*
Will man alte Werke beurteilen, so muss man sie auch durch die Brille ihrer Zeitbedingungen zu betrachten verstehen. Man muss also die Zeit und das Denken der Zeit kennen und nicht die heutige Denkweise überstülpen. Wichtig ist nun, dass man sich vor Augen hält, dass bis ins Barockzeitalter die Menschen eine Einheit der Weltsicht hatten. Alles war verbunden, verwoben, ganzheitlich wahrgenommen — im Gegensatz zu heute, wo jedes Ding losgelöst von den andern, also analytisch betrachtet wird. Bis ins Barockzeitalter gab es auch den homo universalis, der alles studiert hatte, so wie er noch von Goethe im Faust beschrieben wird. Vielleicht war Leibniz der letzte Universalgelehrte. Nachher beginnt die Zeit der Fachleute, der Spezialisten. Vorher waren aber Philosophie, Mathematik, Astronomie, Religion u.s.w. verwoben, waren ein Aspekt einer einzigen Sache, der Gelehrsamkeit. Daher konnte man nicht bauen, ohne die Religion zu kennen, nicht gestalten, ohne die Zahlensymbolik zu kennen u.s.w.. Und daher werden uns heute all diese Dinge beim Studium der älteren Weltsicht wieder begegnen müssen.

Wer Symbole zu deuten weiss, an die Zahlen gebundene Qualität in historischen Zeugnissen erkennen kann, der wird nicht achtlos mit dem kulturellen Erbe umgehen, also ob unser über der Oberfläche schwebender Zeitgeist als Massstab aller Dinge zu gelten hätte...

Die Bedeutung der Eins

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Die Einheit verleiht jedem Massstab sein Recht. Sie ist die Grundlage des Zirkels, mit dem wir messen — bei der Konstruktion am Reissbrett — und auch im Handwerk...
Seit Protagoras, dem Sophisten, sieht sich der Mensch als Mass aller Dinge. Vorher war vielleicht der Staat oder die Sippe das Mass aller Dinge, weil sie resp. er das Überleben garantierte. Nun begreift sich der gebildete Mensch als Individuum. Er trennt sich geistig von der Herde, hat Bewusstsein von seinem Bewusstsein, ist Einheit. Im Griechentum sind die Götter nach der Gestalt und den Eigenschaften des Menschen geformt, sind Bilder des Menschen. Im Juden– und Christentum ist der Mensch Bild Gottes, Einheit, unteilbar. Denn nur materielle Einheiten lassen sich teilen und wieder zusammenfügen, das Lebendige, der Mensch nicht: Er ist mehr als die Summe zweier Teile, die durch zerschneiden entstehen, denn er hat neben dem Bewusstsein noch das Leben, das sich nicht teilen lässt. Genauso ist es mit den alten Göttern. Z. B. im alten Ägypten. Der Luftgott Shu trennt Himmel und Erde, die Götter Nut und Geb. Der Sonnengott Re fährt täglich auf seiner Barke über den Himmel, wird mit allen Gestirnen dann von Geb abends verschluckt und morgens wieder ausgespuckt. Dann ist er wieder der selbe Gott, zwar neu geboren, doch keineswegs ein anderer. Hier greift ein Hauptgedanke. Die Sonne ist tagsdarauf keine andere Sonne. Sie ist nur neu wieder da, ist aber kein anderes Exemplar einer Gattung, ist Individuum, Einheit, eben göttlich. Ebenso Mond und die andern antiken Planeten. Oder auch die Sternbilder. Die Eins als Einheit wird zum Begriff des göttlichen, was dann im Eingottglaube des Abraham oder des Echnaton gipfelt. Auch versteht sich der Mensch als Wesenseinheit, der in vielem die Eins verkörpert: Er hat einen Kopf, einen Verstand, ein Gefühl, ein Wille, nicht zwei. Er will nur einem Herrn dienen, hat ein Herz, einen Magen, ein Streben nach Glück, ein verlorenes Paradis u.s.w.. Und vor allem hat er nur ein Kopf, ein Hirn und einen Mund, mit dem er spricht.
Eins ist die Zahl der Einheit, des Individuums, des lebendigen, mit unteilbarem Bewusstsein begabtem Unteilbarem, das die Erde bevölkert. Für die Pythagoräer stand die Einheit Eins für die Vernunft. Sie ist Erzeuger.
Im geometrischen Ausdruck finden wir die Eins symbolisiert durch den Kreis oder die Kugel. Man denke an den Pantheon, den Tempel Roms für alle Götter des Reiches, der als Kirche die Zeit überdauert hat: Er hat die Grundform einer Kugel, in der alle Götter Heimstatt finden. (Diese Toleranz kannte Rom!) Oder an den Tempel des Himmels in Peking, dessen Grundform der Kreis ist. Oder an die Rundtempel in Delphi, Epidauros oder Rom (Vesta). Oder man denke an die Romanik: Der Chor, wo das göttliche aufbewahrt wurde, war rund. Die Kirche sonst jedoch rechteckig. Oder die Rundbogen oberhalb der Türen. Da ist praktisch immer Christus, also Gott dargestellt, während ausserhalb die Heiligen und Könige etc. stehen. In romanisch/gothisch angelegten „Tempelbezirken“ finden wir oft das runde (manchmal auch acht–bis mehreckig–rundliche) Paptisterium vor dem rechteckigen Dom mit dessen runden Apsen (vor dem Eintritt ins Leben, das hier vor dem runden, dem Göttlichen steht). Hier findet die Taufe statt: Das Göttliche tritt in den Menschen ein. Ein eindrückliches Beispiel ist Pisa. Zudem sind die steinernen Taufbecken offensichtlich aus demselben Grunde oft kreisrund (manchmal auch acht–bis mehreckig, jedenfalls praktisch nie quadratisch oder rechteckig). Und interessanterweise ist das in der römischen Kirche zur Kommunion verwendete Brot (Hostie), das Christus beherbergen soll, meist kreisrund. Ebenso sind dies auch die immer wieder abgebildeten Heiligenscheine verstorbener Gestalten oder von Christus, ganz im Gegensatz zu den quadratischen Scheinen in den Abbildungen der lebenden Kirchenstifter des Mittelalters.
Der Kreis ist auch die Form der Pupillen des Menschen, durch die seine „Seele spricht“ und die Welt erblickt. Sein wahres Wesen zeigt sich also im Kreis. Und weiter: Nach der Sintflut erschien als Zeichen der Regenbogen, kreisförmig. Ptolemaios war überzeugt, dass der Kreis göttlich sei. Die Planeten konnten sich daher nur auf Sphären bewegen, wenn dazu auch Epizykeln notwendig waren. Aristoteles berichtet über den Philosophen Xenophanes (ca. 565–470 v.Chr.), dass dieser überzeugt gewesen sei, dass es nur einen Gott geben dürfe und dass dieser allseitig gleichartig, also Kugelgestalt haben müsse, wie die Seifenblasen. Die Kugel ist auch die Grundform der Erde selbst, von der schon die Antike wusste, der Sonne und Planeten, der Volvox–Algen–Kolonien u.s.w..
Und für den Baumeister und den Architekten denkwürdig: Massstab und Zirkel sind seine Urwerkzeuge...

Die Bedeutung der Zwei

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Die Zwei entsteht durch die Teilung der Eins, wird geboren aus der Eins, womit die Polarität angezeigt ist. Der Mensch trägt sie in sich durch seine Symmetrie. Er hat zwei Augen und sieht jetzt damit die so verstandene nachparadisische Realität durchaus dual. Es ist seine Sicht, sein Erkennen – oder es liegt a priori in der Natur der Dinge. Da gibt es die dual gebaute DNS in den Bausteinen des Lebens; es gibt Licht und Schatten, Verstand und Dummheit, Gott und Teufel, Himmel und Hölle, Leben und Tod, Wachheit und Schlaf, Adam und Eva, Weib und Mann, links und rechts, oben und unten, warm und kalt, Freund und Feind, Kain und Abel (interpretierbar als sesshaft und Nomade), Stadt und Land, Isaak und Ismail, gefällig und ungefällig, rein und unrein, Jakob und Esau, Sonnenaufgang und Sonnenuntergang, gut und schlecht, u.s.w.. Durch die Erkenntnis (des Objekts durch das vom Objekt getrennte Subjekt Mensch) fällt der Mensch aus der Einheit in die Polarität, die in der Welt draussen regiert. Und in den alten Tempel des Salomon schritt man zwischen zwei ehernen Säulen durch: Die Polarität musste erlebt werden. Für die Pythagoräer war die Zwei das Weibliche. Sie ist die Vielfalt.
Auch hat der Mensch zwei Hirnhälften, die eher rational denkende meist linke Hälfte und die eher dem Gefühl und der Intuition zugeordnete rechte. Zudem hat der Mensch zwei Augen und zwei Ohren, jedoch nur einen Mund, damit er mehr zusehe und zuhöhre als schwatze (wie der Lehrer den Schülern ab und zu zu verstehen geben muss). Interessanterweise sind die Glieder, mit denen der Mensch die Welt begreift, betastet, besieht und höhrt dual angeordnet.
Zwei ist die Zahl der Polarität. Geometrisch gibt es dazu die Symbolfigur des Yin und Yang (zwei Fische bei der Begattung) oder allgemein die Symmetrielinien in beliebigen Figuren rep. die Spiegelung. Ältere Sakralbauten haben praktisch ausschliesslich achsial– und manchmal auch zentralsymmetrischen Grundriss, von dem nur aus baugeschichtlichen oder finanziellen Gründen abgewichen wurde.
Und im praktischen Bauwesen — die Architekten sollten dies wissen — drückt sich die Zwei aus in den Urinstrumenten Senkblei und Richtschnur sowie im rechten Winkel: Die ersten Instrumente führen zur Geraden. Das letzte zur Spiegelung und daher zur Symmetrie und Harmonie.

Die Bedeutung der Drei

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Aus der Polarität, der Zwei, dem Weiblichen und Männlichen, entsteht durch die Zeugung ein Drittes: das Kind. Darauf beruht das Prinzip der Fortpflanzung bei den höheren Lebewesen, in der höheren Natur. So wird der Welt der Mensch erhalten und damit dem Menschen die Welt, so wird der Tod überwunden. Oft wird im Kind auch noch die Manifestation des göttlichen Funkens gesehen.
Interessant ist es hier zu bemerken, dass der Mensch den persönlichen Tod durchaus akzeptiert. Jeder weiss, dass er einmal sterben muss, und selten jemand macht sich desswegen grosse Sorgen. Dass aber die Sippe, die Herde sterben müsste, ist den Menschen der grösste Gräuel, denn die Sippe garantiert das Fortleben in der Erinnerung über den Tod hinaus, und die Liebe zu den Kindern ist oft stärker als die Eigenliebe, sodass sich oft Individuen den Kindern opfern. Die Angst vor dem kollektiven Tod drückt sich aus in den Anti–Bewegungen der Neuzeit: Anti–Atomkraft, Anit–Armee, Anti–Massenvernichtungswaffen u.s.w.. Jedoch nicht Anti–Extremsportarten, nicht Anti–Töff–Fahren, nicht Anti–Pflanzengifte, nicht Anti–Verkehr u.s.w., obwohl im Verkehr oder als Folge von Giften (auch Rauch) schon um viele Zehnerpotenzen mehr Menschen gestorben sind als bei Unfällen z.B. mit Atomkraftwerken. Wenn also der Tod des Individuums auch extrem viel häufiger ist als der kollektive Tod, so ist er doch nicht so schrecklich. (Wenn es jedes Jahr wieder vielleicht 500 Verkehrstote gibt, beachtet das kein lebendiger Mensch. Wenn es aber einmal in fünfzig Jahren in einem einzigen Moment (kollektiv) nur hundert Tote gibt, gibt es auch in allen Medien nichts anderes mehr zu berichten.) Dieses Verhalten scheint alt und dem Menschen angeboren. Schon Macchiavelle rät seinem Fürsten (Lit. „In Principe, Der Fürst“), dass er im Falle eines Konfliktes nach vorhandener Anschuldigung ruhig das Oberhaupt einer Sippe hinrichten lassen dürfe, denn damit habe er keine Rache zu fürchten. Nur eines dürfe er keines falls und nie und nimmer: Nämlich nachher dem Sohn des Oberhauptes das Erbe streitig zu machen. Denn dann habe er

die ganze Sippe gegen sich und müsse, ja muss befürchten, schliesslich bekriegt und liquidiert zu werden! Denn das bedroht die Existenz und die Kontinuität der Sippe und kann tödlich enden.
Im alten Ägypten kennen wir entsprechend die Trinität Osiris, Isis und das Horuskind. Das Christentum kennt entsprechend den Vater–Gott, den heiligen Geist und den Sohn, eben Christus, dessen Geburtsfest wir heute an Weihnachten feiern, dem altägyptischen Fest der Geburt des Horus. Interessant ist es zu wissen, dass nach der Völkerwanderung Westeuropa (ausserhalb der gebliebenen römisch–lateinischen christlichen Inseln, z.B. die Gegend von Augst–Basel, wo es immer noch einen Bischof gab) rechristianisiert worden ist von Irland aus, d.h. von irischen Mönchen. Das keltische Irland ist aber vorgängig von koptischen (ägyptischen) Mönchen christianisiert worden, die dort in ihren wiederentdeckten Gräbern ägyptische Symbole hinterlassen haben — und offenbar auch ein gutes Stück ägyptische Kultur ins Christentum getragen haben.
Entsprechend ist es mit Brahma, Vischnu und Shiva im Hinduismus. Oder griechisch–römisch: Die drei über allem stehenden Schicksalsgöttinen (Moiren, später Parzen). Für die Pythagoräer war die Drei das Männliche, die Einheit plus die Vielfalt und damit die Harmonie.
In der Steigerung findet das Prinzip der Drei in tote Materie, lebendige Welt und göttliche Prinzipien ihren Ausdruck. Auch in die Wissenschaften hielt das Prinzip Einzug: Denken wir an das Dreigestirn Aristoteles als Schüler des Platon und dieser als Schüler des Sokrates. Man findet das Prinzip auch in der belebten Natur: Insektenkörper bestehen aus Caput, Thorax und Abdomen. Oder beim Menschen: Auf und zwischen dem Zweiseitigen (Extremitäten: Beine und Arme sowie Ohren) findet sich der eine Kopf und Rumpf. Zu den Funktionen der beiden Hirnhälften, zu Logik und Induition (Denken und Gefühl) manifestiert sich im Menschen ein Drittes: Der Wille. Erst denken, fühlen und wollen machen den Menschen aus. Ein willenloser Mensch ist wie eine Maschine, die nur noch läuft — oder nicht mehr läuft. Ohne Willen wird der Mensch zum Sklaven. Der Wille wird oft für göttlich gehalten. Erst er macht den Menschen zum Menschen.
Im Pflanzenreich finden wir Wurzel, Stamm und Krone beim Baum etc.. Oder auch Blüten mit drei Blütenblätter. Drei ist auch die Zahl der Grundfarben (rot, blau, grün). Im Christentum kennt man die drei Weisen aus dem Morgenland, die sich in Astronomie und Astrologie offenbar auskannten und vom nahenden König kündigten. Christus predigte drei Jahre, dreimal krähte der Hahn und dann lag Christus drei Tage lang im Grab. Ebenso feiern wir Weihnachten drei Tage nach dem Wintersonnenwendfest, dem Tag der tiefsten Dunkelheit des Jahres. Zwei mal drei Tage später ist das Fest der beiden Johannes, des Apostels und des Evangelisten. $4 \cdot 3 = 12$ Tage vergehen zwischen dem 25. 12 und inklusive dem 6.1.. Dann kommen die drei Magier (Weise, Könige) aus dem Morgenland. In der Mitte liegt der Beginn des Januars: Der antike Gott Janus mit den zwei Gesichtern hinten und vorn blickt hier in die Vergangenheit und in die Zukunft. Und ein mal drei Tage nach dem Sommersonnenwendfest das Fest des Johannes des Täufers. (Interessant ist es zu bedenken, dass das jenseitsgerichtete Christentum ursprünglich keine Feste besass und solche irdische auch nicht benötigt hat. Nach und nach musste man sich jedoch trotzdem solche verschaffen, um den im spätrömischen Volke tief verankerten heidnischen Kulten entgegenzutreten.)
Die Griechen kennen entsprechend das Prinzip der Dialektik: These, Antithese, Synthese. Damit geht es weiter durch neue Paarungen und neuer Zeugungen zu neuen Synthesen. In der Genesis ist dieses Prinzip gespiegelt: Das eine (Gott) zeugt die Polarität (Adam und Eva). Nun sind es drei: Der Zustand ist paradiesisch. Drückt sich etwa diese Spiegelung den Davidstern aus? — Beim Menschen steht zu den beiden Symmetriehälften der eine Rumpf mit Kopf. Diese drei machen das Individuum, das eine aus. Bei der Staatsmacht kennt man in der Neuzeit die Gewaltendreiteilung: Legislative, Exekutive und Justiz. (Eine Ausnahme bildet auch hier die Schweiz, wo das Problem der Unabhängigkeit der Justiz (Verfassungsgerichtsbarkeit) noch immer nicht richtig gelöst ist. Die Akzeptanz neuzeitlicher Prinzipien hat hier schon immer etwas länger gedauert. Beispiele sind die Verbrennung der „letzten Hexe“ (Anna Göldin in Zug), die Ablehnung des gregorianischen Kalenders an gewissen Orten über Jahrhunderte (die letzten in Westeuropa sind zwei Gemeinden der Ostschweiz nach der französischen Revolution!) oder die letzten, die das Frauenstimmrecht eingeführt haben (am Schluss Appenzell durch Gerichtsurteil) sowie die momentan noch andauernde Ablehnung gewisser internationaler Organisationen... — der UNO ist die Schweiz vor kurzem als ein Schlusslicht doch noch auch und trotzdem noch beigetreten...) Noch während einem grossen Teil der römischen Kaiserzeit war der Kaiser Gott und die Staatsmacht somit

göttlich. Im Mittelalter kannte man die drei freien Stände: Freie Bauern und Bürger, Adlige und Klerus. Die Handwerker durchliefen die Stufen Lehrling, Geselle und Meister. Solche „mittelalterliche Prinzipien“ haben sich im universitären Bildungsbereich oder in den Kirchen z.T. bis heute gehalten.
Noch eine Notiz zur antiken Philosophie: Verbreitet findet man die Auffassung, dass der Mensch dreigegliedert ist. Er besteht aus Geist (pneuma, spiritus), Seele (psyche, anima) und Körper. Seele ist das Belebungsprinzip aller Lebewesen, Geist dagegen die substanzielle Ursache des freien Willens und der *abstrakten* Erkenntnis. In der Theologie dagegen wird Seele häufig als höheres Selbst begriffen, als göttlicher Funkten im Lebewesen, der je nach Religion präexistent ist und reinkarniert — oder bei andern hingegen nur eine einzige Chance hat, oft vermittelt durch die Machthaber zum Zwecke des Machtgewinns — oder nach andern Auffassungen zum voraus aus göttlichem Beschluss keine Chance hat. In der Psychologie wird unter Seele der Gefühlsbereich verstanden, aber auch der Erlebnisbereich und der Bereich der vererbten Charakterzüge, also der Persönlichkeit.

Die Drei erscheint uns „unter dem Strich“ als Kontrapunkt zur Zwei in der dreigliedrigen Weltsicht an der Stelle der dualistischen Sichtweise. Also an Stelle der „schwarz–weiss–Malerei“, der Reduktion auf die Extereme, auf die Entscheidung zwischen ihnen, z.B. zwischen gut und böse, zwischen oben und unten, rechts und links, hell und dunkel, heiss und kalt: Oft die Mitte, den Ausgleich, die Harmonie igno-rierend. Mit der Drei als Wirkungsprinzip erlangen wir die Stufe der Dialektik oder der Dreigliederung als fundamentales Prinzip der Natur: Wurzel, Stammm und Astwerk — oder Kopf (Steuerung), dann Rumpf (Energieproduktion), Extremitäten (Handlungswerkzeuge) usw. An der Schwelle zur Neuzeit begegnen uns die Forderungen nach Schutz von Leben, Freiheit, Eigentum in der neuen Welt und Freiheit, Gleichheit, Brüderlichkeit in der alten Welt. Diese werden bald genauer gefasst im Rufe nach Dreigliederung: Gewaltentrennung in Geistesleben (Freiheit), Wirtschaftsleben (Brüderlichkeit) und Rechtsleben (Gleichheit). In Philosophie oder Theologie finden wir die Spannung zwischen dem Apollini-schen und dem Dionysischen als den Extremen mit dem Ausgleich in der Harmonie als Kunst. Oder übersetzt die Spannung zwischen dem Satanischen oder Arimanischen, dem eiskalten Verstande ohne Gefühl und dem Überschwenglichen, Luziferischen, dem verstandlosen zerstörerischen Schwelgen im reinen Gefühl, ausgeglichen durch die paradisische Harmonie. Mit der Drei zieht also wieder das Dreigestirn oder die Dreifaltigkeit ins Denken ein: Verstand, Gefühl und ausgleichende Harmonie, also Ethik. Oder Geist, Seele und praktische Vernunft. Darüber lassen sich heute noch Bibliotheken schreiben. Damit müssen wir es hier nun bewenden lassen, denn es fehlt der Raum für weitere Worte zur Sache.

Bemerkung:

Auf dem Prinzip der Verbindung von Gott und Staat über dem Individuum — oder auch des Gottesstaats — liess sich gut herrschen. Die beiden Mächtigen sind oben, der einzelne klein, unten. Rom hat die Welt erobert, indem es den Völkern die Götter klaute und diese nach Rom, ins Pantheon brachte, dem Tempel aller Götter des Reiches mit der Grundform einer Kugel, der Einheit. Darauf haben die Völker nach Rom gebetet und waren friedlich. Und noch heute träumen viele von der Pax romana. Die Ironie der Geschichte: In zwei Fällen hat das nicht funktioniert: Bei den Juden und den Christen, denn da gab es keinen Gott zu klauen. Titus (Titus Flavius Vespasianus[3]), ein „Enkel aus Aventicum“, hat den Judenstaat erobert und zerstört. Mit dem Tempelschatz konnte man in Rom das Kolosseum finanzieren. Die Juden waren zerstreut bis durch Herzel am ersten Zionistenkongress in Basel, nicht weit von Aventicum, der Judenstaat wieder auferstand. Bei den Christen lief es anders: Diese wurden so mächtig und das Gottkaisertum (wohl eine Idee aus dem ägyptischen Erbe der Cäsaren. . .) gleichzeitig so schwach, dass Konstantin nichts weiteres mehr übrigblieb als das Christentum zuzulassen und de facto das Gottkaisertum so abzuschaffen, worauf

[3]Kaiser Titus Flavius Vespasianus (Vespansian, 9-79) verbrachte einen grossen Teil seiner Jugend in Aventicum, der „Hauptstadt des einheimischen Helvetiens“ (erst später zur Kolonie erhoben). Sein Vater Flavius Sabinus war Beamter in Aventicum. Kaiser Titus (Imperator Titus Caesar divi Vespasiani filius Vespasianus Augustus) war ein Sohn von Kaiser Vespasian. Vespasians Aufstieg ermöglichte Sohn Titus, der spätere „gute Kaiser“, eine Erziehung am Hof des Kaisers Claudius, gemeinsam mit dessen eigenem Sohn Britannicus, welcher als Stiefbruder des Nero nur 14 wurde. . . Titus Heirat mit Berenike, die Schwester Herodes Agrippas II. und Urenkelin Herodes des Großen, ist vermutlich aus Gründen der Staatsraison vereitelt worden. Die Sache wäre Stoff für eine literarische Aufarbeitung.

es schliesslich unter Theodosius als Reichsreligion eingesetzt wurde. Der Kaiser war nicht mehr Gott, doch die Macht über die Oberhoheit des Römischen Kultes in den Händen des Pontifex maximus blieb — und zwar bis auf den heutigen Tag. Er ist wohl der letzte römische Beamte im Amt mit einem Titel, den schon Augustus geführt hat. Und ein grosser Teil der Menschheit betet immer noch nach Rom. Das Prinzip des Römerreiches hat das Römerreich überdauert und ist lebendig geblieben. Kultur dauert.
Drei ist die Zahl der Zeugung, des göttlichen Funkens. Man nennt drei die göttliche Zahl. Geometrisch drückt sich die Drei im Dreieck aus: Man denke an das Gibeldreieck der antiken Tempel, in dem die Götter dargestellt waren, also wohnten — oder auch an die Darstellung des Auges Gottes. Auf den alten Altären der römischen Kirche stand oft der Triptichon, der dreiflügelige Altar. Im Buddhismus kennt man die drei Fahrzeuge auf dem Weg zur Erleuchtung. Die alte Ordnung in Europa kannte drei Stände, war also gottgegeben. (Ein vierter war de facto weitgehend vogelfrei.)
Interessant ist hier noch, dass die einzige stabile Form von gelenkig verbundenen Stangen (Strecken) durch das Dreieck zustande kommt. Im Raum ist es das dreieckförmige Tetraeder, das die Stabilität liefert — was zur Vier hinführt.

Die Bedeutung der Vier

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Die Verdoppelung der Polarität, der Zwei, führt zur Vier. Die Vier tritt uns in der Natur vor allem im Jahreslauf entgegen: Keimen und Wachstum, Blüte und Fortpflanzung, Frucht und Versamung, dann Rast und Ruhe. Der Zyklus ist in den Breiten der antiken und westlichen Kultur bestimmend für Frühling, Sommer, Herbst und Winter. Noch bei den Römern begann das Jahr mit dem Frühlingsanfang (so ist September der siebte, Oktober der achte, November der neunte und Dezember der zehnte Monat). Parallel finden wir die antiken Elemente und heutige Aggregatszustände Erde (fest), Wasser (flüssig), Luft (gasförmig) und Feuer (plasmatisch), die die Zustandsformen des Materiellen beschreiben. Die alte Psychologie kennt vier Temperamente. Von diesen Dingen sind wir unmittelbar betroffen. Denn wird im Frühjahr nicht gesät, so kann man im Herbst nicht ernten. Hunger ist die Folge. Das Überleben ist in Frage gestellt. Dazu gibt es auch die vier Himmelsrichtungen (Winde), vier Dimensionen von Raum und Zeit, in die der Mensch eingebunden ist, die vier Grundqualitäten der räumlichen Geometrie, in der der Mensch ja lebt (Punkt, Gerade, Ebene Raum), die vier Teile des spätrömischen Reiches, die vier Beine, auf denen die meisten Landtiere auf der Erde stehen, die meistens vier Seiten der Häuser, Wohnungen oder Zimmer der Menschen und auch der meisten Tempel. Die vier Ecken der Türen, Fenster, Eingänge, Ausgänge u.s.w.. Weiter: Im alten Testament des frühen Judentums sind vier Erzengel genannt: Michael, Gabriel, Raphael und Uriel. Das Christentum kennt analog vier Evangelisten. Der Mensch durchschreitet und bearbeitet die Erde mit Hilfe seiner vier Extremitäten. Auch die ersten eindrücklichen Kristallformen sind viereckig (würfelartig): Der Pyritwürfel. Im Jahreslauf kennen wir zudem die vier ausgezeichneten Stellungen der Sonne: Die beiden Solstitien und Äquinoktien.
Vier ist die Zahl der Materie. Die zugehörige geometrische Figur ist das Quadrat oder das Rechteck. Der untere Teil der antiken Tempel, wo der Mensch seinen Eingang hat, ist — ausser bei Rundtempeln — immer rechteckig. Sogar das Pantheon hat einen rechteckigen Vorbau und weicht nicht von diesem Schema ab. Auch passt der Körper des Menschen exakt ins Quadrat: Bei seitlich ausgestreckten Armen ist die Spanne praktisch exakt der Körperhöhe des stehenden Menschen von Fuss bis Scheitel. Statistische Abweichungen sind klein und mitteln sich aus. In vielen bedeutenden Kirchen existiert im Zentrum die Vierung (z.B. Dome v. Florenz, Siena, Petersdom in Rom u.s.w..). Über dem irdischen, materiellen Quadrat unten erhebt sich die kugelähnliche Kuppel, die den Himmel zeigt (oft ist sie noch entsprechend ausgemalt, z.B mit dem Pantokrator, einer Himmelfahrtszene oder einer Szene im Himmel). Im ehemals byzantinischen Raum ist diese Art der Sakralbauten noch ausgeprägter. Die Grundform ist oft ein Kreuz mit Vierungskuppel. Solche Kirchen heissen daher *Kreuzkuppelkirchen*. Man denke an die Apostelkirche, die Kapnikarea oder die Agii Theodori in Athen oder die Ekatontapiliani auf Paros. Auch die Altäre waren zu allen Zeiten oft viereckig, manchmal sogar kubisch, als Zeichen des Irdischen (manchmal auch rund, jedoch selten). Ursprünglich sind darauf die irdischen Dinge geopfert worden. Der Buddhismus kennt z.B. die vier edlen Wahrheiten von der Entstehnung des Leidens. Auch störten vier Übel die kosmische

Ordnung, der der Mensch ja so ausgeliefert war und somit Chaos hereinbrach: Die ursprünglich wohl unvorhersehbaren Sonnenfinsternisse, Mondfinsternisse, ein etwaiger dreinzehnter Vollmond im Jahr und unvorhersehbare Kometen waren somit Unglückskünder. Es mag nachvollziehbar sein, welchen Eindruck diese Ordnung, dieser Kosmos[4], machte und wie erschreckend es war, wenn etwas diese Ordnung störte und das Chaos[5] die Oberhand gewann. Diese Sichtweise der Unglückskündung blieb bis in die jüngste Zeit, z.B. als 1949 ein Komet den Tibetern ein Unglück ankündigte: Der chinesische Einmarsch (vgl. z.B. (Bib.: U4)).
Ein weiteres Symbol der vier oder der Materie ist das Kreuz. Schon in alten Zeiten bedeutete ans Kreuz schlagen an die Materie heften und da verenden lassen um den Gekreuzigten auch symbolisch und daher geistig — also über den Tod hinaus und demnach viel härter — zu töten. Die Schweiz trägt das Symbol auf der Flagge, eine Erbschaft vom Christentum. Dieses Symbol ist hier das gemeinsame Dach der Zwinglianer, Calvinisten, Katholiken und vieler Freikirchen. Es setzt sich fort im roten Kreuz.
Vier ist auch die Zahl der leiblichen, also materiellen Plagen: Wir kennen vier apokalyptische Reiter: Pest, Krieg, Hunger, Tod. Auch das Paradies auf Erden endete, als zu den drei (Gott, Adam, Eva) sich ein Viertes (die Schlange) gesellte und aktiv wurde. Die Vier ist heute auch die Zahl der genetischen Grundbausteine der Desoxiriboseukleinsäuren (Träger der Erbinformationen,DNA, DNS): Adenin, Guanin, Cytosin, Thymin (Nukleotide). Daneben gibt es noch eine andere von Nukleinsäuren: Die Riboseukleinsäuren (RNA, RNS). Man findet dort noch eine fünfte Art Nukleotid, das Uracil. Art Zudem sah Aristoteles vier Ursachen alles Seienden: Stoff (Materie / causa materialis), Form (Geometrie, Zustandsform. . . / causa formalis), die Wirkungsursache (Wille / causa efficiens) und die Zweckursache (Absicht, Ziel / causa finalis). Und im alten Ägypten mass man mit Fäusten zu je vier Fingern.
Interessanterweise ist die Ausbreitung des rationalen, griechischen Geistes auf eigenartige Weise auch mit der Vier verbunden: Nach dem in geistigen Sphären beheimateten Philosophen–Dreigestirn Sokrates, Platon und Aristoteles schreitet der gelehrige Schüler des Aristoteles, der Vierte, kein geringerer als Alexander der Grossen nämlich, zur Tat auf der harten Erde: Er erobert die damalige Welt von Griechenland über Ägypten und Persien bis zum Indus und verbreitet so den griechischen Geist, die Ratio. Manche Gelehrte erklären, dass das im jugendlichen Bewusstsein geschah, der Menschheit ein besseres Denken zu bringen und in der Einheit durch das einmalige Opfer die persische Bedrohung und den griechischen Zwist zu überwinden. Das Ereignis hat die Welt möglicherweise gewiss sehr nachhaltig verändert. (Der Zwist, eine Gottheit, die bei einem Anlass nicht eingeladen war, streute dann eben Zwist unter die Göttinnen, was zum Urteil des Paris und damit dann zum Raub der Helena und damit dann zum nie enden wollenden troyanischen Krieg geführt hat, den die Griechen mit einer List gewannen. . . Danach begann infolge eines Hochmutanfalls des Odyseus seine ähnlich lange Irrfahrt, die Odysee heim nach Itaka. . .) Und für die Pythagoräer war die Vier die Gerechtigkeit.
Die Vier zeigt im Raum auch das Prinzip der grössten Verdichtung: Die quadragische Form führt durch den Würfel zur lückenlosen Raumaufteilung und daher zur grössten Verdichtung. Das Tetraeder liefert das Grundprinzip zur grössten Verdichtung bei Kugelpackungen. Und in der Unterhaltungsmathematik scheint das magische Quadrat die Sache zu sein, die immer wieder die Faszination „verdichtet“.

Die Bedeutung der Fünf

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Die Fünf ist die Zahl des Menschen, denn sie tritt bei ihm an wichtigen Stellen auf und bestimmt auch seine Proportionen. Wir haben an jeder Hand fünf Finger, an jedem Füss fünf Zehen, im Kopf fünf grössere Einlassöffnugen und sind gewachsen nach den Proportionen des goldenen Schnittes, der am regelmässigen Fünfeck abgreifbar ist. Und die Fünf tritt auch auf in der Formel zur Berechnung des Verhältnissen des goldenen Schnittes. Der Körper gliedert sich der Länge nach in den gegen den Himmel gerichteten Kopf, den Rumpf, Oberschenkel, Unterschenkel, Füsse, auf denen man steht. Konsequenterweise sind wir es gewohnt, am Menschen dann auch fünf Sinne zu unterscheiden, obwohl auf sehr einfache Weise einsichtig wird, dass man leicht viel mehr Sinne ausmachen könnte, wenn man nur den Begriff „Sinn“ allgemeiner

[4] Kosmos: Griech. Ordnung
[5] Chaos: Griech. Unordnung

und neuzeitlicher definieren würde.
Im Pflanzenreich tritt die Fünf uns bei manchen Blüten entgegen. Man denke an die wilden Rosen (Urrose, Hagenbutte), mit ihren fünf Blütenblättern. Und der junge Mensch besitzt vier mal fünf Milchzähne...
Fünf ist auch die Zahl der platonischen Körper (alle Winkel und Kanten gleich, alle Flächen regelmässige n–Ecke.) Die Fünf finden wir auch in der Erweiterung der vier Elemente durch ein geistiges Prinzip: die quinta Essenzia, umgangssprachlich „Quintessenz“. Fünf ist vier plus eins und ebenso drei plus zwei. Für die Pythagoräer war die Fünf die Ehe.
Die geometrische Figur, die die Fünf symbolisiert, ist das Pentagramm oder das regelmässige Fünfeck (Pentagon), das durchaus einen Bezug zur materiellen Realität hat: Wenn man nämlich mit einem Papierstreifen statt mit einer Schnur einen gewöhnlichen Knoten macht und diesen dann etwas flach drückt, entsteht das regelmässige Fünfeck. Das Pentagramm war das Erkennungszeichen der Pytagoräer. Fünf ist auch die Zahl der Hauptmodi des Kosmos der Tonarten: Dorisch, phrygisch, lydisch, äolisch (moll) und ionisch (dur). Dazu kommen die Hypo– und Mixo–Tonarten. Auch keltische Druiden sollen es benutzt haben. Später wurde ihm Zauberwirkung zugeschrieben, je nach Sekte gute oder schlechte. So bannt auch Faust den Teufel, indem er ein Pentagramm auf die Schwelle zeichnet. Oder an mittelalterlichen Kirchen findet sich oft an der Tür oder in ihrem Bereich das Pentagramm, offenbar um das Böse zu bannen. In der Gotik liefert das Pentagramm oft den Grundriss der zentralen Teile einer Kathedrale, als Grundschema einer abstrakten Figur, die die Fachleute heute den „mystischen Leib Christi“ nennen. Auf mittelalterlichen Bildern wird Christus oft mit einer Rose dargestellt, dem Symbol des Menschen. Die Rose ist so auch zum Symbol der Rosenkreuzer geworden... Und der Buddhismus kennt die Wahrheit des Leidens als fünffaches Haften am Irdischen.
Weiter finden wir das Pentagramm als Fünfstern z.B. auf amerikanischen — und früher auch rot auf sowjetischen Flugzeugen. In der amerikanischen Flagge z.B. sind fünfzig solche Sterne vereint, für jeden Staat einen, neben den dreizehn Balken für die ersten Staaten, die Neu–England–Staaten, die die Revolution gemacht haben. Auch in andern Flaggen sehen wir dieses Symbol. Eingang in die Flaggen hat es wohl über die amerikanische Revolution gefunden, wo, wie später auch in der französischen Revolution auch, die damaligen Maurer–Logen eine gewisse Rolle spielten, die die alte Symbolik bewahrt haben. Später ist das Pentagramm zum Zeichen der Liberalen geworden, wodurch es in die russische Revolution gelangt ist. Denn diese war ursprünglich eine liberale Revolution, bevor der Kommunismus Oberhand nahm.
Weiter verbindet die Pyramide rein durch ihre Form die Eins (nur eine Spitze), die Zwei (Symmetrie der Anlage), die Drei (Dreieckseiten), die Vier (quadratischer Grundriss), die Fünf (fünf Ecken) und die Acht (Kanten). Und noch heute ist das Pentagon ein Symbol der Macht, gebaut in den USA als Zentrum militärischer Macht, bewusst geworden seit dem 11. 9. 2001 als Symbol, das angegriffen wurde im neuen „Krieg der Symbole“.
Fünf ist auch die Zahl der Teile der Welt, heute also der Kontinente: Die fünfgliedrige Erde ist so zu denken als Organismus analog dem des Menschen...

Die Bedeutung der Sechs

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Bei der Sechs wird es erstmals schwierig, in der menschennahen Natur sprechende Beispiele zu finden. Zwar haben Insekten sechs Beine, doch zu den Insekten hat der Mensch keine seelsiche, affektive Beziehung. Sie berühren nur seinen ordnenden Verstand. Der Mensch vertilgt die Insekten mit Agrochemie–Giften in grossen Mengen, ohne dabei Mitleid zu empfinden. Der Mensch hat nie Insekten gepflegt. Er verarbeitet ihre Körper sogar zu Schmuck und trägt sie am Hals. Zur Biene hat der Mensch allerdings eine Beziehung: Sie liefert ihm Nahrung. Die Bienenwaben sind sechseckig. Sie lassen sich dicht packen. Und auch die schönen Bergkristalle, oder die Basaltsäulen. Auch Blüten mit sechs Blütenblätter existieren.
Die Sechs erhalten wir aber aus der Spiegelung der Drei wie oben beschrieben. Im Davidstern (regelmässiges Sechseck) ist die Sechs zum Symbol geworden. Ambivalenz wie auch Gleichgewicht und Harmonie zeigt das Hexagon. Die Sechs ist die Anzahl der Arbeitstage in der Schöpfungsgeschichte. Sechs ist auch die Zahl der Regenbogenfarben des einzelnen Regenbogens (rot, orange, gelb, grün, blau, violett), die das weisse Licht ausmachen. Die Verbindung, die Sieben, hier das Lila (purpur), fehlt im einzelnen

Regenbogen. In maurischen Ornamenten ist sie wieder aufgeblüht und hat Kunstgeschichte gemacht, parallel zur Acht. Sechs ist die Zahl des Göttlichen und seiner Antithese, seiner Umkehrung — und auch die Zahl der Flächen im Würfel.
Sechs gilt als die vollkommene Zahl, denn bei ihr ist die Summe der Teiler gleich dem Produkt ihrer Teiler ($6 = 1+2+3 = 1\cdot 2\cdot 3$). Und im alten Ägypten mass eine Elle sechs Fäuste. Für die Pythagoräer war die Sechs die Schöpfung. Auch im Judentum und damit im Christentum findet die Schöpfung in sechs Tagen statt. Am siebten Tage ruhte Gott. Doch braucht es dort damit eben sieben Tage, denn Ruhe gehört auch zum Ganzen. Und die Schöpfung der Welt in sechs Tagen musste daher analogerweise wie die Sechs ebenfalls vollkommen sein.

Die Bedeutung der Sieben

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Über dem Menschen „wölbt“ sich der Sternenhimmel, der wie oben erwähnt so wichtig war. Was sahen die Alten dort oben? — Sicher die Fixsterne, die den Menschen vielleicht wie Löcher in einer grossen Kugel, der Sphäre, erschienen sind, durch die das ausserhalb lodernde Weltenfeuer durchflackert. Die sichtbaren Sterne konnte man gruppenweise zu Bilder vereinigen und so identifizieren. Sie blieben relativ zueinander fix. Doch diese Ordnung wurde durchkreuzt von den immer, nach festen Gesetzen wiederkehrenden Wandelsternen, den Planeten. Wie konnten Löcher in einer Sphäre wandern und keine Spur hinterlassen, durch die das Weltenfeuer brechen konnte? Das konnten nur Götter sein. Und als solche wurden sie in vielen Kulturen verehrt. Sieben waren es an der Zahl: Sonne, Mond, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn. Vor der Erfindung des Fernrohrs im Barockzeitalter kannte man nur diese. Sie bewegten sich rhythmisch auf dem Fixsternhimmel im Zodiac, im Tierkreis. Auf sie war Verlass. Sie brachten zusätzlich Ordung in den Lauf der Zeit, dem der Mensch ausgeliefert ist. Wichtig für die Zeitzählung waren Sonne und Mond. Sie sind die grossen an Mass und sind auch etwa gleich gross unter sich (Finsternisse!). Die Sonne beherrscht den Tag, das Diesseits und ist heller, lässt sich aber schlechter positionieren am Fixsternhimmel. Der Mond beherrscht die Nacht, das Dunkel, das Jenseits, den Schlaf, den kleinen Bruder des Todes. Er ist nicht so hell, dafür aber günstiger zum Positionieren und Ablesen.
Sieben ist aber auch die Zahl der wirklichen Regenbogenfarben. Denn die siebte Farbe, das Purpur (oder Lila) entsteht, wenn gleichzeitig zwei Regenbogen erscheinen, einer über dem andern, die so nahe beisammenliegen, dass das Ende des Rots des einen auf das Ende des Violetts des andern zu liegen kommt und sich die Farben mischen.
In der griechisch–römischen Antike bis ins Barockzeitalter ordnete man den Planeten Sphären zu, die sich unabhängig bewegten: Die sieben Planetensphären. Aussen war die achte Sphäre, die Fixsternsphäre. Heute gibt es die sieben Planetengötter nicht mehr. Dafür kennt das Christentum aber die sieben Erzengel (Archangeloi): Michael, Gabriel, Samael, Raphael, Zachariel, Anael, Oriphiel (Uriel). Dazu kennt es aber auch die sieben Todsünden und die sieben Kardinaltugenden.
Zu den Tugenden: Im Abendland kennen wir aus der antiken Philosophie die Weisheit, Gerechtigkeit, Tapferkeit und Mässigung. Aus dem Christentum stammen dagegen Glaube, Liebe und Hoffnung. Zum Vergleich chinesische Tugenden: Gerechtigkeit, Höflichkeit, Ehrgefühl, Geist der Einheit, Unermüdlichkeit, Geduld, Bescheidenheit. Prudentius (5. Jahrhundert) nennt mehr als sieben Tugenden: Glaube, Schamhaftigkeit, Demut, Hoffnung, Vernunft, Geduld, Mässigkeit, Arbeit oder Frieden.
Zu den Lastern: Von Gregor dem Grossen kennen wir fünf geistliche Laster: Hochmut, Zorn, Neid, Geiz, Faulheit. Dazu noch zwei fleischliche Laster: Völlerei, Wollust (Luxus). Prudentius nennt mehr als sieben: Gier, Zügellosigkeit, Geiz, Stolz, Zorn, Zwietracht, Betrug, Furcht, Frevel etc.. Heute versteht man in der Gesellschaft unter den Lastern oft: Trunksucht, Drogensucht, Völlerei (massloses Essen und Trinken), Spielsucht, sexuell ausschweifendes Verhalten, generell ausschweifender Lebensstil, Geiz, Verschwendung.
Denken wir auch an die sieben Künste des freien Mannes, die sieben Vokale des griechischen Alphabets, die sieben Zornschalen, die sieben Plagen, das Buch mit den sieben Siegeln, die sieben Chakras u.s.w.. (Die sieben Künste des freien Mannes (artes liberales) sind das Trivium (Rhetorik, Grammatik, Dialektik) und das Quadrivium (mitin die Mathemata des Pythagoras: Arithmetik, Geometrie, Astronomie,

Harmonik). Dagegen stehen die mechanischen Künste (artes mechanicae), vgl. Seite 69.)
Es ist bekannt, dass im alten Ägypten eine Planetenastrologie entstand, in Mesopotamien jedoch eine Tierkreisastrologie, die dann später verschmolzen. Bedenken wir, dass die Genesis (1. Buch Moses) nach dem Exodus aus Ägypten entstand. Die Schöpfungsgeschichte zählt im Vergleich sieben Tage, sechs Arbeitstage und einen Ruhetag. Sieben ist daher auch die Zahl der Schöpfung. Sie ist gleich drei plus vier, also die göttliche Trinität vereint mit der materiellen Welt. Die Schöpfung ist vollkommen, denn die Zahl der Planeten ist unveränderlich — ausser, wenn, oh Unglück, ein Komet erscheint. Auch Salomon baute seinen Tempel in sechs Jahren. Im siebten ruhte er. Die Sieben als Zahl der Planeten ist auch die Zahl der Wochentage, die Planetengötter geweiht waren. (Die Namen erkennt man heute noch: Sonntag, Montag, Mardi (Mars), Mercredi (Merkur), Giovedi (Giove (Jovem), Jupiter), Venerdi (Venus), Saturday (Saturn).) Die Sieben war dem Apollo geweiht, von dem manche Dinge erzählt werden, die die Sieben betreffen. In den auf Pythagoras zurückgehenden Tonleitern gibt es sieben wiederkehrende Ganztonschritte. Z.B. bei Dur (äolisch) drei plus vier, durch einen Halbtonschritt verschmolzen (von $\bar{c}$ bis c: $c \to d \to e \to f \to g \to a \to h \to c$). Der Mensch hat entsprechend der Himmelssphäre sieben Öffnungen im Körper, durch die er Stoff und Töne aufnimmt oder abgibt. Im jüdischen Tempel stand der siebenarmige Leuchter. Ebenso ist sieben die Zahl der (antiken) Weltwunder. Man redete zwar von weiteren Weltwundern, da es weitere Bauwerke auf Erden gab, die weltwunderverdächtig waren. Das „achten Weltwunder“ z.B. war die Mole des Polykrates (Zeit des Pythagoras) in Pythagorion auf Samos, die heute noch imposant den Hafen säumt. (Polykrates liess auch in der damaligen Zeit der Bronze–Werkzeuge den 1.2 km langen, mannshohen Tunnel durch den Kalksteinberg meisseln, um so eine Wasserleitung zu bauen — Zustände, die die Flucht des Pythagoras nach Ägypten verständlich machen.) Es gibt aber auch die sieben Zwerge und bei uns die sieben Bundesräte. In Grimms Märchen erscheint überhaupt die Zahl sieben oft: Neben den Zwergen gibt es die sieben Geisslein, die sieben Schwäne und die sieben Raben. Der erwachsene Mensch besitzt vier mal sieben Zähne, bevor er die „Weisheit“ erlangt, d.h. die Weisheitszähne bekommt. Geometrisch ist das regelmässige Siebeneck das Symbol der Sieben. Wenn man aber um einen Kreis sechs weitere Kreise geschlossen gruppiert, so erhält man mit sieben Kreisen eine regelmässige Figur, die geschlossen ist. Sieben Kreise bilden hier eine Einheit.

Bemerkung zum alten Ägypten: Da hatten die Priesterinnen der Hathor sieben Krüge. Die sieben Töchter des Re hatten sieben Knoten in ihre sieben Tuniken zu machen. Die sieben Falken des Re symbolisierten die sieben Weisen. Sieben Kühe mit ihren Bullen standen für die Fruchtbarkeit. Und es es gab sieben Häuser der Unterwelt mit dreimal sieben Toren. Sieben war eine heilige Zahl des Osiris.

Bei den folgenden Zahlen bis zur Dreizehn wollen wir immer auch an die Sieben als Zahl der Planetensphären anknüpfen.

Die Bedeutung der Acht

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Zwei mal die Vier oder viermal die Zwei ergibt die Acht. Die Acht finden wir eher in maurisch–arabisch–byzantinischen Raum verkörpert als im Westen. Das Oktogon ist Grundriss nur weniger sakraler Bauten im Abendland: Z.B. der Dom Karls des Grossen in Achen (Karl sollte die Tochter des byzantinischen Kaisers heiraten), San Vitale in Ravenna (byzantinischer Einfluss) und die Klosterkirche der Antoniterinnen von Ottmarsheim am Rhein bei Mühlhausen oder Basel. Achteckige Bauwerke begegnen uns auch ab und zu in Paptisterien (Beispiel: Florenz). Der achteckige Grundriss kann übrigens aus dem Grundriss der im byzantinischen Raum verbreiteten Kreuzkuppelkirche einfach dadurch gewonnen werden, dass man aussen Sekanten ans Kreuz legt, die Mauer diesen Sekanten entlang führt und so die nach innen führenden längern Mauern verkürzt. Das ergibt mehr Innenraum, weniger Mauerwerk, jedoch mehr Dach.
Acht ist auch die Zahl der Beine der Spinnen. Aber auch die Zahl der Pfade zur Aufhebung des Leidens im Buddhismus. Die Acht war die Anzahl Sphären mit der Fixsternsphäre. Im Babylonischen war sie schon bedeutsam, wo es sieben Höllen, aber acht Paradiese gab. Im Islam tragen acht Engel den Thron Gottes.

Acht ist auch die Zahl der geteilten Windrichtungen und des Inhalts des Kubus, der der Einheitskugel umschrieben werden kann, also der „Wohnung“ der Kugel. Die Kaaba (arab. Würfel) in Mekka, das zentrale Heiligtum des Islam und Ziel von Pilgerfahrten, das der schwarze, einst „vom Himmel (aus dem Paradies) gefallene Stein“ (Meteorit) beherbergt, ist würfelförmig. Er hat acht Ecken – gleichviele Ecken wie z.B. auch der Felsendom (Moschee) auf dem Tempelberg in Jerusalem im Grundriss. Andererseits findet man in Athen auf der römischen Agora noch den achteckigen, 12 Meter hohen Turm der Winde. Er zeigt die acht Windrichtungen mit den acht Windgöttern Athens: Boreas, Kaikias, Apeliotes, Euros, Notos, Lips, Zephiros und Skiros. Im 1. vorchristlichen Jahrhundert soll er vom Astronomen Andronikos Kyrrhestes errichtet worden sein. Er hat im Innern eine Wasseruhr beherbergt, die es erlaubt haben soll, die Stunden abzulesen. Unter den Friesen kann man heute noch die Überreste von Sonnenuhren sehen. Das Dach bildet eine achteckige Pyramide. Acht bedeutet hier offensichtlich die Windrose mit ihren Zwischenrichtungen. Interessanterweise sind die Kanzeln in christlichen Kirchen oft achteckig: Damit das verkündete Wort sich in alle acht Windrichtungen ausbreitet? Oder ein Paptisterium wie auch ein Taufstein: Acht ist sieben plus eins ($8 = 7 + 1$), in die Schöpfung soll hier der Geist einkehren.
Neben den sieben Fixsternsphären gab es nach dem aristotelischen und ptolemäischen Weltbild etwa bis zu Kepler die achte Sphäre, die Fixsternsphäre, durch deren Löcher man das Weltenfeuer flackern sah. Alle Sphären aber drehten um die Erde in ihrem Zentrum. Da zur Aufrechterhaltuung der Drehbewegung und zur zeitweiligen Rückwärtsbewegung (resp. die Epizyklen der Planeten) keine Kraft ersichtlich war, gab es nur eine Erklärung: Gott selbst musste die Kraft liefern. Weil die Planetenbewegung eine Tatsache ist, hatte man damit einen „Gottesbeweis“. Wer daher am geozentrischen Weltbild zweifelte, stellte somit die Grundlage des Glaubens in Frage, musste also ein Ketzer sein oder handelte unter Eingebung des Teufels. Vor diesem Hintergrund sind die Hexenprozesse gegen Gelehrte wie Giordano Bruno (verbrannt um 1600 auf dem Campo dei fiori in Rom) oder Galilei verständlich. Giordano Bruno hatte behauptet, dass Gott in der Natur anwesend und dass das Weltall unendlich sei, im Widerspruch zu Aristoteles und den Kirchenvätern. Galilei wurde erst um die Jahrtausendwende rehabilitiert...
Acht ist die Zahl der Sphären, der Planetensphäre zusammen mit der Fixsternsphäre. $8 = 2 \cdot 4 = 1 + 7$: Dualität in der Materie oder Materie in der Polarität — Einheit und Schöpfung...

Die Bedeutung der Neun

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Zur Neun ist es schwierig, in der Natur eindrückliche Beispiele zu finden. Neun ist drei mal drei. Odysseus war neun Jahre unterwegs, Christus starb zur neunten Stunde. Das Christentum kennt drei mal drei gleich neun Engelshierarchien (nach Dionysius Areopagita, angeblich Schüler des Paulus). Die zehnte Stufe ist dann der Mensch. Im indo-germanischen und nördlichen Bereich ist die neun bedeutender (neun dunkle Monate etc.). $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$: Das Göttliche potenziert, Gott in sich.
Hier eine Liste der Hierarchien, die sich im Menschen und den niedereren Reichen fortsetzt:

1. 1.1. Seraphim (Liebe)
2. 1.2. Cerubim (Harmonie)
3. 1.3. Throne (Wille)
4. 2.1. Kyriotetes (Weisheit, Herrschaft)
5. 2.2. Dynameis, Dynamis (Bewegung, Macht)
6. 2.3. Exusiai, Elohim (Form, Gestalt)
7. 3.1. Archai (Persönlichkeit, Urkräfte)
8. 3.2. Archangeloi, Erzengel (Erzboten)
9. 3.3. Angeloi, Engel (Boten)

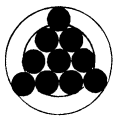
10. 4.1. Mensch
11. 4.2. Tier
12. 4.3. Pflanze
13. 4.4. Mineralisches (falls in fester Form)

Neun ist die Zahl der Sphären zusammen mit ihrem Zentrum, der Erde: Das Irdische in seinen Sphären.

Die Bedeutung der Zehn

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Zehn ist das abgerundete Ganze: Wir haben zehn oder zweimal fünf Finger, wo sich einfach abzählen lässt und zehn Zehen. Zehn ist die Grundzahl des Dezimalsystems in dem schon die alten Ägypter rechneten. Unsere Kultur kennt heute zehn Ziffern, die aber aus dem indisch–arabischen Kulturraum stammen und die griechische und lateinische Ziffernschreibweise verdrängt haben. Schuld daran mögen vielleicht die Übersetzerschulen Toledos im Mittelalter sein. Die kulturelle Bedeutung der Zehn ist aber älter als der Kontakt zwischen Muselmanen resp. Mauren und Christen.
Nach dem Exodus aus Ägypten übergab Gott auf dem Berg Sinai die zehn Gebote. Bekannt sind auch die zehn Plagen im alten Ägypten, als der Pharao das Volk Israel nicht ziehen lassen wollte. Im alten Judenstaat waren auch die zehn ausländischen Städte bekannt, wo es jüdische Minderheiten gab. Zehn ist zudem die Zahl der Tetraktys, einer „dreieckigen Zahl“: Auf vier Steinen liegen drei, auf den drei dann zwei, auf den zwei dann einer. Bei ihr schworen die Pythagoräer. Man kann die Figur von drei Seiten her betrachten: Sie ändert die Gestalt nicht. Zehn ist so als Zahl eine Vollkommenheit (aber keine vollkommene Zahl im Sinne der Gleichheit mit der Summe ihrer Teiler). Und auch der kabbalitische Sefiroth–Baum (Baum des Lebens) besteht aus zehn Elementen. An Engel–Hierarchien mit dem Menschen gibt es zehn.
Zehn ist auch sieben plus drei (Schöpfung und göttlich). Als geometrische Figur steht das regelmässige Zehneck, in dem auch der goldene Schnitt steckt.
Interessant ist auch die Zehn im Kirchenjahr. Vierzig oder vier mal zehn Tage nach Ostern ist Auffahrt: Nach altem Denken die „pythagoräische“ Vollkommenheit auf Erden, der materiellen Welt. Und wieder zehn Tange später, wieder eine Vollkommenheit weiter ist Pfingsten, Pentecoste. Man beachte „pente“, griechisch fünf. Griechisch, denn das Zentrum des Römerreiches zur Zeit der Einführung des Christentums war nicht Rom, sondern Konstantinopolis, die Polis, die Stadt des Konstantin des Grossen, das spätere Byzanz (Istampul nach der Eroberung durch die Türken). Der im heutigen Nisch (Naissus) geborene Konstantin, der anfänglich in Trier residierte, war es ja, der das Christentum zugelassen hat (Edikt von Mailand).



Die Tetraktys: $1+2+3+4 = 2 \cdot 5 = 10$: Das Duale im Menschen, die Summen von Einheit, Dualität, des Göttlichen und Materiellen.

Zehn ist die Zahl der Sphären zusammen mit ihrem Zentrum, der Erde — und darauf dem Menschen mit seinem Geiste resp. seiner Seele, also der beseelte, geisttragende Mensch im Irdischen mit seinen Sphären: Die bewusst wahrnehmbare Schöpfung.

Die Bedeutung der Elf

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Elf ist die Zahl der Hierarchien inklusive Mensch und Tier. Elf war wahrscheinlich auch die ursprüngliche Tierkreiszahl. Eines der Zeichen steht immer hinter der Sonne. Elf sind „sichtbar“ . Auch sind elf Jünger

„intakt“ geblieben. Weiter ist es schwierig, auf beeindruckende Weise die Elf in der Natur abzulesen.
Interessantes aus der Gegenwart: Am 11.9.2001 fand der Angriff auf das World trade center statt. Exakt $9 \cdot 11 = 99$ Tage später meldeten die Medien (mit Betonung der 99) das Ende von Al Kaida in Afganistan: Tora Bora war erobert. Er erwächst jetzt die Frage, ob jemand hier den „Krieg der Symbole“ führt.
Zudem fiel am 11. 11. 1989 die Mauer in Berlin: Der kalte Krieg hatte sein Ende gefunden.
Vielerorts beginnt die Fasnacht am 11.11.. 11 ist auch die „Solothurnerzahl“.

Elf ist die Zahl des beseelten, geisttragende Menschen im Irdischen mit seinen Sphären zusammen mit den Engeln (zusammen mit dem Menschen und zugleich mit über ihm).

Die Bedeutung der Zwölf

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Normalerweise zeigt das Jahr zwölf Vollmonde und Neumonde resp. zwölf Mondphasen. Doch Manchmal sind es — oh Unglück — dreizehn Vollmonde. Vollmonde und Tierkreis harmonieren dann nicht mehr: Es herrscht Chaos! Die alten Babylonier und Juden rechneten nach Monden (Mondkalender). Da von Vollmond zu Vollmond ca. 28 Tage vergehen, gleich wie beim Zyklus der Frau, war mit dem Mond ein Ryhthmus gegeben, der die Kalenderzeit bestimmte. Zwar ist die Einteilung des Tierkreises (Zodiac) in zwölf Sternbilder nicht logisch abzuleiten, doch wenn der Vollmond der Taktgeber ist, so wandert die Sonne im Takt des Mondes in zwölf Stationen im Jahr durch den Fixsternhimmel. Der Tierkreis musste so in zwölf Abschnitte eingeteilt werden. Der schon in uralten Zeiten bekannte Tierkreis muss also recht beeindruckt haben. Die Babylonier entwickelten eine Tierkreisastrologie. Am Tierkreis war ablesbar, dass sich die Fixsternsphäre täglich einmal über der Welt, der Erde drehte und dass je nach Jahreszeit andere Tierkreisbilder am Abend im Zenit stehen. Pro Jahr kommen alle Tierkreisbilder einmal dran, eines nach dem andern, rhythmisch. Und dann sah man die Planeten, d. h. die Wandelsterne. Seit der geschichtlichen Zeit waren bis in jüngste Jahre nur deren sieben bekannt. Wobei der Mond, damals einer der Planeten, im Jahr wie erwähnt meistens zwölf, manchmal aber auch dreizehn mal die bekannten Phasen durchlief, synchron den Frauen: Der Mond musste gewiss weiblich sein (ausser im Deutsch). Dann die Kometen, die unvorhersehbaren, die den kosmischen Rhythmus störten. Und dann noch die Sonnen- und Mondfinsternisse, ursprünglich wohl auch unvorhersehbar, was wiederum die kosmische Ordnung störte, der der Mensch ja so ausgeliefert war. Es mag nachvollziehbar sein, welchen Eindruck diese Ordnung, dieser Kosmos[6], machte und wie erschreckend es war, wenn etwas diese Ordnung störte und Chaos[7] hereinbrach. Chaos konnte sein: Ein Komet, ein 13. Vollmond, eine Sonnenfinsternis, eine Mondfinsternis. Das hat Unglück bedeutet. Diese Sichtweise blieb bis in die jüngste Zeit, z.B. als 1949 ein Komet den Tibetern ein Unglück ankündigte: Der chinesische Einmarsch (vgl. z.B. (Harrer, U4)).
Das Jahr hatte also zwölf Mondmonate, Israel (Jackob, der sein Weib aus Mesopotamien hat hohlen müssen) zwölf Stämme. Einer (Joseph), oh Unglück, das sich zum Glücke wandelte und dann wieder zum Unglück, wurde nach Ägypten verkauft. Jesus hatte zwölf Jünger. Und oh Unglück, eigentlich waren es dreizehn, denn einer musste ausgewechselt werden (Judas, Paulus). Das Christentum kennt zwölf Patriarchen, die Tonleitern des Pythagoras zwölf Halbtonschritte, aus der sieben Tonschritte ausgewählt werden. Auch die Anzahl der Tonarten, heute Kirchentonarten genannt, sind jetzt abschliessend zwölf. Der lichte Tag hat entsprechend zwölf Stunden, ein rundes „Dutzend“. Zwölf ist vier mal drei oder drei mal vier (göttlich in allen Winden) oder auch sieben plus fünf (Schöpfung und Mensch). Das himmlische Jerusalem hat zwölf Tore. Das alte hebräische Alphabet hat zweiundzwanzig Konsonantenschriftzeichen: Die drei Mütter, die sieben Doppelkonsonanten und die zwölf einfachen Konsonanten. Zwölf ist die Zahl des Kosmos, der jedoch nicht vollkommen ist, da er wie beschrieben manchmal gestört wird. Geometrisch findet die Zwölf ihre Entsprechung im regelmässigen Zwölfeck. (Oder auch z.B. im Dodekaeder).
Zwölf ist auch eine „Eckzahl“ im Rechensystem der alten Babylonier, die offenbar im sechziger System gerechnet haben. Fünf mal zwölf ist sechzig, der Mensch im Kosmos. Noch heute rechnen wir mit

[6] Kosmos: Griech. Ordnung
[7] Chaos: Griech. Unordnung

dem Dutzend und kaufen z.B. die Eier (die alten Fruchtbarkeitssymbole der Artemis) in Halbdutzendschachteln.
Interessant ist dazu noch folgendes Phänomen der geometrischen Natur: Klebt man um einen Tennisball im Zentrum (Meister) weitere Tennisbälle, die sich nachbarlich sowie das Zentrum berühren sollen, so gelingt es, genau zwölf Tennisbälle zu einen zentralen anzuordnen. Doch die Packung ist nicht ganz dicht. Es ist noch Platz vorhanden. Doch ist es unmöglich, einen Dreizehnten zerstörungsfrei zu plazieren! Zwölf ist auch die Zahl der Kanten im Würfel. Die Zahl zwölf tritt zudem unter den Ecken– Kanten und Flächenzahlen der paltonischen Körper am häufigsten auf.
Bemerkenswert ist noch ein Phänomen aus der deutschen Sprache (wie auch aus gewissen andern Sprachen): Für die Zahlen eins, zwei, drei bis zwölf haben wir eigene Zahlworte. Aber ab dreizehn (und nicht ab zehn nach der Art unseres Positionssystems) werden die Zahlworte zusammengesetzt. Sprachhistorisch ist hier anzufügen, dass man noch heute in hiesigen Dialekten die Ausdrücke „Einslif“ und „Zweilif“ hören kann. „Lif“ ist dabei ein altes Wort für „über“ oder „hoch“ (man denke an den Lift oder liften). Im Zehner–Positionssystem wird hier über der Zahl zehn noch eine Eins hochgestellt. Das macht einslif, elif oder elf. Wird eine Zwei hochgestellt, dann macht das zweilif oder zwölf. „Dreilif“ hat sich dann allerdings nicht mehr durchgesetzt oder erhalten...
Da zwölf ($= 4 \cdot 3$) gleich der Anzahl Glieder einer Hand ohne den Daumen ist, wird aus Plausibilitätsgründen auch vermutet, dass die Wichtigkeit der Hand beim Abzählen im Zeitalter des Analphabetentums der Zwölf zu ihrer zentralen Stellung verholfen hat.
Eine interessante Anmerkung: Ein Mondmonat dauert etwa 29.5 Tage. Das Mondjahr dauert demnach $12 \cdot 29.5 = 354$ Tage, Das Sonnenjahr dagegen etwa $365 + \frac{1}{4}$ Tage. Da ein angebrochener Tag auch zählt, sind es 366 Tage. Das *ideale Jahr* liegt in der Mitte und hat 360 Tage. Zwischen Mond– und Sonnenjahr liegen die 12 geweihten oder heiligen Nächte, beginnend mit Weihnachten (Plural!) und endend mit Epiphania (d.h. „von oben“, das Dreikönigsfest). Dazwischen beginnt der Januar: Janus, zweigesichtig, blickt voran und zurück.
Man muss wissen, dass Christi Geburt erst seit dem Jahr 354 an Weihnachten (25. Dezember) gefeiert wird. Weihnachten war für die Christen erst eine heidnische Unsitte (um diese Zeit ist das altägyptische Fest der Geburt von Horus, dem Sohn von Isis und Osiris). Erst wurde die Geburt Christi nicht gefeiert. Dann begann man sie trotzdem zu feiern: Erst im März, dann im April, dann im November, und heute ist es im Dezember.
$12 = 7 + 5 = 3 \cdot 4$: Das Göttliche im Materiellen oder die Schöpfung und der Mensch ergibt das Universum...

Zwölf ist die Zahl des beseelten, geisttragende Menschen im Irdischen mit seinen Sphären und den Engeln zusammen mit Gott — oder dem Göttlichen, „wie es gut so war...“

Die Bedeutung der Dreizehn und weiterer Zahlen

Bildmaterial siehe Seiten 147 ff.

Die Dreizehn wurde bereits erwähnt. (Dreizehn Vollmonde: Chaos statt Kosmos.) Im Tarotspiel bedeutet sie der Tod: das Unglück.
Kristalle „wachsen“ bekanntlich und zeigen eine feste Ordnung. Ohne die Kristalle, die keine weiteren sofort ersichtlichen weiteren Lebensprozesse zeigen, zählte man zwölf Hierarchien der Engel, Menschen, Tiere und Pflanzen. Mit dem Mineralischen sind es dreizehn. Und wiederum: Manchmal wachsen die Kristalle, dann ruhen sie wieder...

In der Natur ist es nun schwierig, weitere einleuchtende Beispiele für die Dreizehn und weitere Zahlen zu finden. Interessant ist noch das kleinste pythagoräische Zahlentripel: Einen rechten Winkel können wir bekanntlich mit einer Schnur wie folgt herstellen: Wir knüpfen dreizehn Knoten mit gleichen Abständen. Dann erhalten wir zwölf Abstände. Legen wir den ersten und den dreizehnten Knoten aufeinander, so können wir ein gleichmässiges Zwölfeck oder ein rechtwinkliges Dreieck spannen mit den Seitenlängen drei, vier und fünf. Berechen wir die Harmonie des Zwölfecks umgekehrt wieder auf, so erhalten wir

wieder dreizehn Knoten im unharmonischen, zerlegten Zustand.
Weiter gibt es neben den fünf vollkommen regelmässigen platonischen Körpern dreizehn halbregelmässige archimedische Körper. (Noch weniger regelmässig sind dann die 92 Johnsonkörper.)
$13 = 7 + 6$: Die Schöpfung und die Arbeitstage — oder die Schöpfung und die Volkommenheit... Dies erscheint doppeldeutig...

Dreizehn ist die Zahl des beseelten, geisttragende Menschen im Irdischen mit seinen Sphären, den Engeln, mit Gott oder dem Göttlichen, zu dem jetzt noch das Unglück, nämlich der Teufel hinzutritt. „... der Teufel will es so..."das kann kein Glück bedeuten...

Wir besprechen nur noch kurz die folgenden Zahlen, obwohl es noch viele interessante gibt:

Die Bedeutung der Einundzwanzig

Als Produkt von drei und sieben, dem Göttlichen in der Schöpfung, ist die Einundzwanzig interessant. Ist es Zufall, dass im gregorianischen (heutigen) Kalender der Frühlingsanfang (Jahresbeginn in der Antike, Früjahrsäquinoktium) auf den 21. März, der Sommeranfang (Sommersolstitium, längster Tag) auf den 21. Juni und der Winteranfang (Wintersolstitium, kürzester Tag) auf den 21. Dezember gesetzt wurde? Und dass nach dieser in der Realität stattfindenden tiefsten Nacht dann im im Kirchenkalender drei Tage vergehen (drei, „das Göttliche wirkt") bis zum heiligen Abend (Weihnachten), wo dann das „Licht der Welt" in dieser tiefen Finsternis zu leuchten beginnt, d.h. die Geburt Christi gefeiert wird?
$21 = 3 \cdot 7 = 10 + 11$: Das Göttliche in der Schöpfung — Vollkommenheit und alter Tierkreis...

Die Bedeutung der Zweiundzwanzig

Die Zweiundzwanzig erscheint uns wegen ihrer Symbolik als bedeutsam. Als ursprüngliche Zahl des hebräischen Alphabets ist sie uns schon begegnet. Auch wird sie im Zusammenhang mit der hermetischen Tradition (nach dem (?) chaldäischen Mystikers Hermes Tris Megistos, dem Schöpfer der Tabula Smaragtina) erwähnt. Die Zahl taucht dann in der grossen Arcana, den 22 bedeutenden Karten des heutigen Tarotspiels auf. (TAROT hat oft auch die Bedeutung von Spielgel. Ordnet man die Buchstaben T A R O T in einem Kreis in der Weise, dass das letzte T auf dem ersten zu liegen kommt, so erhält man eine symbolträchtige Figur: Durchläuft man den Schriftzug jetzt rückwärts, so kann man hier TORA lesen, wobei diesmal das T nicht doppelt genommen wird. Damit wird auf eine Beziehung zur jüdischen Kultur hingedeutet. Neuere Karten sind oft nummeriert von 0 bis 21. Noch im Mittelalter war 0 aber keine Zahl.) In der Literatur findet man auch eine Einweihung im alten Aegypten nach dem Buche Thoth geschildert, dargestellt durch 22 Bilder nach einem Bilderzyklus in einem „Einweihungstempel" zu Memphis. (Thot, auch Thoth, Tehutn oder Djehuti, begegnet uns in der ägyptischen Mythologie. Er ist der ibisförmige resp. paviangestaltige Gott des Mondes sowie der Magie, auch der Wissenschaft, der Weisheit, des Kalenders und der Schreiber. Magie, Wissenschaft und Weisheit erforderte in mancher Beziehung eine Einweihung. In Pyramidentexten galt Thot als ein Gott des Westens.) Die Zahl zweiundzwanzig ist auch die Anzahl der Schöpfungswerke, der Bücher des alten Testaments und der Tugenden Christi sowie der Visionen des Johannes. Auch kennt das Avesta zweiundzwanzig Gebete.
$22 = 2 \cdot 11 = 10 + 12$: Vollkommenheit und Kosmos — Dualität im alten Tierkreis...

Die Bedeutung der Vierundzwanzig

Vierundzwanzig als zwölf plus zwölf ist die Zahl der Stunden des lichten Tages und der Nacht, also des heutigen vollen Tages mit seiner Polarität. Es ist auch die Zahl der Vollmonde und Neumonde (Halbmonde) im Jahr, wenn nicht ein Unglück geschieht. Die Babylonier haben die Vierundzwanzig zu einer Grundzahl des Systems gemacht, in dem sie gerechnet haben. Und die alte Elle wurde nach vierundzwanzig Fingerbreiten bemessen. Auch kannte das griechische und ebenso das ursprüngliche lateinische Alphabet vierundzwanzig Buchstaben. (Im Latein gibt es das W und die Unterscheidung I–J nicht.) Auch hat man in der alten, noch nicht temperierten Stimmung, wo z.B. fis und ges noch nicht dasselbe waren, eben nicht

zwölf sondern vierundzwanzig Halbtonschritte. Wenn man jetzt weiss, dass die alten Griechen die Zahlen durch Buchstaben ausgedrückt haben, versteht man, dass Musik Klang gewordene Zahl bedeutet. (Den Pythagoräern schreibt Aristoteles die folgenden Aussprüche zu: "Der Himmel ist Harmonie und Zahl". Oder: "Die Dinge sind durch Nachahmung der Zahl." Kurz: "Alles ist Zahl." Zahl bedeutet hier, in diesem Umfeld, "rationale Zahl".) Pythagoras sah in der Vierundzwanzig die Gesamtheit der Glieder des Himmels. Weiter: Das hebräische Alphabet soll ursprünglich zweiungzwanzig Buchstaben gehabt haben. (Elf Tierkreiszeichen.) Doch heute sind es ohne die Füllbuchstaben und die Varianten an Wortenden auch vierundzwanzig. Und die altägyptische Elle hatte sechs Fäuste zu je vier Fingern, also vierundzwanzig Finger.
Vierundzwanzig als zwei mal zwölf (Stunden!) ist die Zahl der grossen Harmonie zwischen Himmel und Erde. Die Zahl tritt in der Apokalypse auf. Dort erscheinen die vierundzwanzig Ältesten, die die doppelte Harmonie der Priester und Könige verkörpern.
$24 = 2 \cdot 12 = 5 + 7 + 12$: Die Dualität im Kosmos — Mensch, Schöpfung und Kosmos— Halbmonde...

Die Bedeutung der Achtundzwanzig

Achtundzwanzig ist die ungefähre Anzahl Tage im Monat von Vollmond zu Vollmond. Ebenso ist es die Anzahl Tage des Zyklus der Frau. Das mag beeindruckt haben. Zudem ist Achtundzwanzig gleich vier mal sieben: Die Schöpfung in allen Winden. Die Übergänge von Vollmond zu Halbmond zu Neumond zu Halbmond zu Vollmond lassen sich wohl unterscheiden. Die Tage eines solchen Übergangs (oder Phase) harmonierte mit der Planetenzahl. Das ergibt die Woche. Die vier Phasen des Mondes sind vollkommen. Der Mond wandert in einem Zyklus auch durch achtundzwanzig Sterngruppen.
Achtundzwanzig ist die Mondzahl. Das arabische Alphabet kennt achtundzwanzig Buchstaben, in denen der Koran, d.h. „Gottes Wort" , aufgezeichnet ist.
Es gilt auch: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$. Das ist die „Summe aller Tage".

Interessanterweise gibt es auch genau 28 einfache konvexe Körper aus regelmässigen Vielecken (d.h. Körper, die nicht durch einen einzigen Schnitt wieder in regelmässige Teilkörper zerlegbar sind).

Weiter bemerkenswert erscheint noch, dass im Pantheon Roms an der Decke 5 Kassettenringe zu je 7 mal 4 gleich 28 Kassetten zu finden sind. Hier ist die im babylonischen Bereich wichtige Zahl 28 neben der im ägyptischen Bereich wichtigen 5, resp. der im gesamten Bogen vorhandenen doppelten 5, also der 10, im Tempel der Götter des Reiches baulich verewigt.

Die Bedeutung der Dreissig

Dreissig hat eine symbolische Bedeutung. Moses und Christus begannen ihr öffentliches Wirken mit dreissig. Judas verriet Christus um dreissig Silberlinge.
$30 = 3 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 24 + 8$: Göttliches im Vollkommenen — Dualität im Menschen im Göttlichen — Sphären und grosse Harmonie...

Die Bedeutung der Dreiunddreissig

Dreiunddreissig hat ebenso eine symbolische Bedeutung, vielleicht auch als drei mal elf. Christus lebte dreiunddreissig Jahre. Im islamischen Paradies ist dreiunddreissig das ideale Alter. Dantes Divina Commedia besteht aus hundert Gesängen: vierunddreissig resp. dreiunddreissig plus einer über die Hölle, dreiunddreissig über das Fegefeuer und dreiunddreissig über den Himmel.
$33 = 3 \cdot 11 = 10 \cdot 3 + 3$: Das Göttliche im alten Tierkreis — das Göttliche im Vollkommenen und Gott...

Die Bedeutung der Vierzig

Vierzig hat ebenfalls symbolische Bedeutung. Wer kennt nicht Ali Baba und die vierzig Räuber? Wie war das mit dem vierzig–tägigen Regen bei der Sintflut? Christus fastete vierzig Tage lang in der Wüste, Die

Zeit vom Exodus bis zur Erbauung des Salomonischen Tempels beträgt zwölf Generationen zu vierzig Jahren, das Volk Israel wanderte vierzig Jahre in der Wüste, Moses weilte vierzig Tage auf dem Berg Sinai, Christus ruhte vierzig Stunden im Grabe. Etc. etc.. Vierzig ist die Zahl des Wartens, der Vorbereitung. Wir können die Zahl symbolisch deuten als zehn mal vier, also die pythagoräische Vollkommenheit auf Erden — ohne den Menschen, ohne die Vollendung. Das Warten auf die Vollendung findet statt. Zwischen und inklusive Ostern und Auffahrt liegen vierzig Tage. Zehn Tage, also eine Vollkommenheit später, ist Pfingsten.
Es lassen sich noch sehr viele Beispiele anführen, vor allem aus dem Islam. Man kann vierzig symbolisch ausdeuten als vier mal zehn gleich acht mal fünf — oder auch als achtundzwanzig plus zwölf. Dies sei hier dem Leser überlassen.
$40 = 10 \cdot 4 = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 28 + 12$: . . . Summe aller Tage und Kosmos. . .

Die Bedeutung der Fünf- und der Sechsundfünfzig

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{10} k = 55$$

55 ist die Summe der Zahlen von 1 bis 10, also der ersten alten Dekade. 10 ist auch die Anzahl der Punkte in der gängigen Darstellung der Tetraktys, eine der wichtigsten Figuren der Pythagoräer. Als Summe umfasst die 55 also alles, was zur Grundlage hier beiträgt. Die 56 bedeutet daher als überstiegene 55 die Übersteigung der Grundlagen der Ordnung, damals als Ordnung auch Ordnung des Pharao und somit göttlich, deren Wichtigkeit und Stellenwert im vormaligen Denken uns durch den angeblichen Ausspruch Pythagoras „Alles ist Zahl“ erkennbar wird. 56 ist auch die Anzahl der Karten der kleinen Arcana im bei der Zahl 22 erwähnten Tarot. Nach der 56 wird im einschlägigen Analogiedenken auch oft Ausschau gehaltlen, wenn es um Zyklen in der Zeit geht.

Die Bedeutung der Sechzig

Sechzig ist eine der zentralen Zahlen antiker Zahlensysteme: Wir kennen sechzig Sekunden pro Minute, sechzig Minuten pro Stunde. Sechzig ist die erste grosse Einheit oder Grundzahl des babylonischen Zahlensystems: Es ist die Grundzahl im Keilschrift-Positionssystem.(Siehe Seite 60.) 60 ist die Zahl des höchsten Gottes der Babylonier, des Himmelsgottes Anu. Mit dem Zirkel teilen wir den vollen Kreis in sechs gleiche Winkel zu je sechzig Grad. Das gleichseitige, „göttliche“ Dreieck besitzt drei sechzig–Grad Winkel. Sechzig ist drei mal fünf mal vier: Das Göttliche im Menschen auf Erden (in der Welt, der Materie).
$60 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \rightsquigarrow$ „Der Mensch in der Welt, die Welt in Gott“.

Die Bedeutung der Dreihundertsechzig

Dreihundertsechzig ist die Anzahl Tage im Idealjahr (360 markiert die Mitte zwischen Mondjahr zu 354 Tagen und Sonnenjahr zu 366 Tagen.). Das Sonnenjahr ist im Gegensatz zum Mondjahr schwierig festzustellen, da man nicht einfach Vollmonde zählen kann, sondern ziemlich exakte astronomische Beobachtungen machen muss (Sonnenwenden, d.h. Solstitien (die beiden Johanni–Feste im Kirchenjahr) und Tag–und–Nachtgleiche, Äquinoktien, Frühlings–und Herbstpunkt.). Dreihundertsechzig ist drei mal zehn mal zwölf: Vollkommen mal das Göttliche im Kosmos. Noch heute verwenden wir gerne die Einteilung des vollen Winkels in dreihundertsechzig Grad oder „Tage“ , wie man jetzt sagen könnte. Pro Tag rückt die Sonne um etwa ein Grad vorwärts im Tierkreis. Die Stunde hat entsprechend noch heute zehn mal dreihundertsechzig Sekunden. ($10 \rightsquigarrow$ ägyptisch, $10 \cdot 360 = 60 \cdot 60 = 3600 \rightsquigarrow$ babylonisch)

Denkwürdig erscheint im Zusammenhang mit der Vermittlung zwischen Sonnen– und Mondjahr durch das ideale Jahr (und damit die 360) auch das Osterdatum. Ostern wurde 325 im Konzil von Nicäa auf den 1. Sonntag nach dem 1. Frühlingsvollmond gelegt. Der Vollmond führt zum Mondjahr, der Frühlingsbeginn aber zum Sonnenjahr (und zum antiken Jahresbeginn). Das Osterfest vermittelt daher auch zwischen zwei Kulturen.

$360 = 3 \cdot 10 \cdot 12$: Das Göttliche in der Harmonie im Kosmos.

Hinweis:

http://www.123sig.de/Religion_u__Mythol_/Zahlen-Symbole/zahlen-symbole.html

Weitere Bemerkungen zur Bedeutung einzelner oben besprochener Zahlen findet man auf den Seiten 122 und 124.

Bemerkung zu weiteren Zahlen und zum Weltbild

Die Bedeutung weiterer kulturgeschichtlich und architektonisch interessanter Zahlen soll hier aus Gründen des Rahmens nicht weiter diskutiert werden. Ebenso die Ausweitung und Aufbrechung der ruhenden Formen des Kreises und der regelmässigen n–Ecke in der Barockzeit, die der Mensch wohl als Ausweitung des Bewusstseins verstanden hat. Interessant ist, dass im Spätbarock dann auch konsequenterweise die Ellipse in den Spielformen der Architektur auftaucht, nachdem sie den Kreis resp. die Sphäre im naturwissenschaftlichen Weltbild verdrängt hatte. Denn waren bei Kopernikus die Planetenbahnen noch Kreise, so sind diese bei Kepler jetzt Ellipsen, die in den Keplerschen Gesetzen genau beschrieben werden. Eindrückliche Beispiele von Anwendungen der Ellipse in der Architektur gibt es viele (vgl. z.B. 207). Weitere Beispiele: Petersplatz in Rom (Bernini, Säulenhallen), Karlskirche in Wien (Bernhard Fischer von Erlach: Grundriss, Kuppel). In diesem Zusammenhang sei auch auf die „Perle des Spätbarock“ oder Rokoko hingewiesen: die Wieskirche in Bayern, wo die Ellipse auch andeutungsweise vorliegt. Als Beispiele aus dem anitken Rom resp. Hellenismus ist das Kolosseum sowie das Amphitheater Pompeji — oder auch dasjenige in Augusta Raurica wie auch die Arena in Aventicum bekannt. Weiter denke man an die Amphitheater von Arles und Nîmes in der Provence. Vermutlich waren damals praktische Gründe für die Verwendung der Ellipsenform entscheidend (Spiegelung der Hierarchie, bessere Sicht u.s.w.). Man sieht, dass die Weltsicht auf die Architektur prägend wirkt.

Das Weltbild spiegelt sich in den Ausdrucksformen der Architektur.

Kurze Übersicht

Zahl	Symbolgehalt
1	Einheit
2	Polarität
3	Göttliche Zahl
4	Materie
5	Mensch
6	Vollkommenheit
7	Schöpfung; Planeten
8	Sphären; Einheit und Schöpfung oder Materie in der Polarität
9	Göttliches potenziert; Erde mit den Sphären
10	Abgerundetes Ganzes; Erde mit den Sphären und beseelter Mensch
11	Ursprüngliche Tierkreiszahl; Erde mit Sphären, Mensch und Engel
12	Kosmos; Erde mit Sphären, Mensch, Engel und Gott
13	Unglück, Tod, Doppeldeutigkeit; Erde mit Sphären, Mensch, Engel, Gott und Satan
⋮	⋮
21	Das Göttliche in der Schöpfung...
22	Vollkommenheit und Kosmos...
24	grosse Harmonie
28	Mondzahl
30	Sphären und grosse Harmonie...
33	Göttliche im Vollkommenen und Gott...
40	Warten
60	1. grosse Einheit (Mesopotamien)
360	Idealjahr
⋮	⋮

3.2.6 Historische Beispiele nichtrationaler Aspekte von Bedeutungsinhalten

Dass u.a. in der europäischen Geistesgeschichte nicht immer die empirisch–rationale Gewinnung von Gewissheit über unsere materiellen und geistigen Gegebenheiten zum Fundament der Erkenntnis gemacht worden ist, bezweifelt heute kein gebildeter Mensch mehr. Oft waren es axiomatische, machtgestützte Vorstellungen, die den Menschen Denkgrundlage war — oder auch mystische Inhalte und Vorstellungen, zu denen die Sprache nicht hinreicht. Nachfolgend ist ein Beispiel aus tausenden beschrieben. Hinweise zu solchen Angelegenheiten findet man heute oft in der verbereiteten Vulägrliteratur.
Im Umkreis der Alchemisten und anderer mystisch ausgereichteter Gruppen stossen wir manchmal auf diese Symbole für die 4 Elemente, teils vermischt mit Symbolen für die Metalle, Planeten oder Tierkreiszeichen:

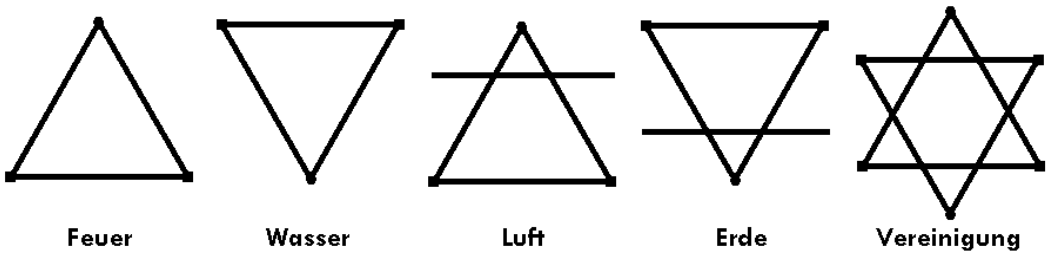


Abbildung 26: Symbole der Elemente aus dem Barockzeitalter (z.B. J.D. Mylius, 1618)

Schiebt man die Symbole übereinander, so entsteht in der Vereinigung der Davidstern als Symbol des

Ganzen. Nun betrachten wir die folgende Tabelle:

Elemente	hebräisch	Initiale	christl. Bedeut.	alchem. Bedeut.	alchem. verwandelt	neckisch
Wasser	Imain	**I**	Iesus	Igne ↘	Nigredo (Schwärzung)	Iustum
Feuer	Nor	**N**	Nazarenus	Natura ↗	aLbedo (Weissung)	Necare
Luft	Ruach	**R**	Rex	Renovatur ↘	cItrinitas (Gelbung)	Regem
Erde	Ibescha	**I**	Iudaorum	Integra ↗	Rubedo (Rötung)	Italiae

Die Elemente Wasser, Feuer, Luft und Erde, also das, woraus der materielle Kosmos, die ganze materielle Ordnung besteht, wird hier übertragen in Iesus Nazarenus Rex Iudaorum (I statt J geschrieben), also das bekannte INRI auf der Tafel oben am Kreuz, viele tausend mal gemalt oder bildhauerisch geformt und zu bestaunen in der heute in Museen gezeigten alten Kunst oder auch im käuflichen Kunsthandwerk. Dieses INRI wird im alchemistischen Prozess der Reinigung durch das Feuer umgedeutet in Igne Natura Renovatur Integra (etwa: Das Feuer erneuert den Stoff, die Natur ganz, neu, frisch). Alchemistisch wird dies verwandelt (paarweise ausgetauscht, verschoben oder an den „Haaren herbeigezogen“) in NIGREDO, ALBEDO (L ähnlich I), CITRINITAS, RUBEDO, d.h. an den Farben erkennbar in Schwärzung, Weissung, Gelbung, Rötung. Diese Farben finden wir nun oft in der spätgotischen religiösen Malerei in spezieller Bedeutung, symbolhaft, von der Bedeutung her nur dem „Eingeweihten“ zugänglich. (Man denke z.B. an Grünewalds Isenheimer Altar) So verschleiert die Sprache der Symbole die Botschaft dem Profanen. Und natürlich bleibt dem Witz des Volkes nichts verborgen: Im für die römische Religion zentralen Italien gibt es die neckische Umdeutung im lateinischen Spruch „Iustum Necare Regem Italiae“, d.h. es ist richtig, den König von Italien zu töten.
Hier treffen wir also Zahlenbedeutung, Symbolgeometrie, Farbbedeutung mit Anwendung in der Kunst, in der Transformation und im Witz im Umkreis einer denkwürdigen Sache.

3.2.7 Nochmals kompakt: Zur Bedeutung von Zahlen — Sphärenmusik

1. Die 1 $\rightsquigarrow$ Individuum, Einheit, das Eine, das schon im Denken nie alleine sein kann. Erkenntnis ist immer nur zwischen Objekt und Subjekt möglich. Erkenntnis eines Etwas setzt die Existenz des Erkennenden, eines Bewusstseins voraus. Speziell kommt somit dem absoluten NICHTS keine Existenz zu. Denn das Nichts als Gedachtes ist ein ETWAS, ein Denkinhalt und damit kein NICHTS. Und ein ETWAS kann nie alleine, ohne den Denkenden, gedacht werden. Damit ist man immer schon bei der 2 (der Denkende und das Gedachte) und nie alleine nur bei der 1. Ausser der Denkende denkt nicht. Dann fehlt aber das Bewusstsein und damit die Wahrnehmung...

2. Die 2 $\rightsquigarrow$ Subjekt und Objekt: Die Dualität. Und für uns Menschen zentral: Die beiden Geschlechter. Allgemein die Spannung, die Symmetrie, die Spannung der Symmetrie und auch die Symmetrie als Ausgleich der Spannung. Eingeschlossen Symmetrie contra Spannung. Und mit der Spannung auch die Teilung. Damit beginnt das Teilen der Welt, endlos, unendlich in der Vorstellung, in der Mathematik, doch nicht in der Physik, weil es dort dagegen Gesetze und damit Grenzen gibt.

3. Die 3 $\rightsquigarrow$ Subjekt, Objekt mit der Wahrnehmung. Die Geschlechter mit der Fortpflanzung: Das Leben, die Liebe, das Göttliche. Die Dialektik (These, Antithese, Synthese). Der evident vorhandene Raum (3D). Sonne, Mond und Sterne (Fix– sowie Wandelsterne oder Planeten). Dreiecke als regelmässige Kachelung...

4. Die 4 $\rightsquigarrow$ Die Himmelsrichtungen, in der Ebene–2D, wo der Mensch seine Bewegungsfreiheit hat: Dualität in der Dualität. Er kann nicht in die Höhe und Tiefe wie Fisch und Vogel. Die vier Elemente: Die Materie. Der Punkt, die Gerade, die Ebene, der Raum: Der Zeit-Raum, die Raum-Zeit (4D). Quadrate als Kachelung. Die Anzahl Extremitäten des Menschen: Sein Handeln. Das Tetraeder... Tetraktys... Oder das Quadrat am Würfel: Die Dualität in der Dualität. Die kosmischen Übel, die Unberechenbarkeiten: Kometen, Mond- und Sonnenfinsternis und der Dreizehnte Vollmond im Sonnenjahr, der die Ordnung bricht.

5. Die 5 $\rightsquigarrow$ Finger einer Hand, Zehen am Fuss zum Zählen. Der goldene Schnitt aus dem 5–Eck: Das Mass des Menschen — der Mensch. Pentatonik... Die Quinta essentia...

6. Die 6 $\rightsquigarrow$ Sechsecke als 3. Kachelung. Die sechs Kugeln um eine in der Mitte: Vollständige Figur. Die Dualität mit der Drei: Gut und Böse. Davidstern. Das Hexaeder: Würfel...

7. Die 7 $\rightsquigarrow$ Die alten Planeten (Wandelsterne). Taktgeber am Himmel, die Zeiger der Zeit, welche der Macht des Menschen entgeht. Der Mensch kann sie nicht beeinflussen: Ausgeliefert! Götter! Tonleiter... zum göttlichen Erleben.

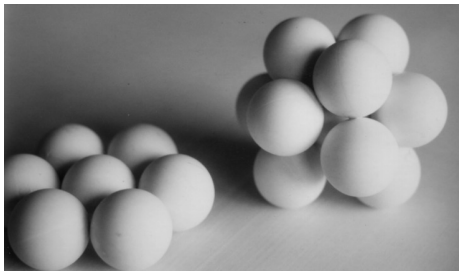
8. Die 8 $\rightsquigarrow$ Vier und die Dualität. Das verdoppelte Würfelvolumen. Oktaeder. Die sechs Kugeln mit der siebten im Zentrum. Die Zahl der Sphären...

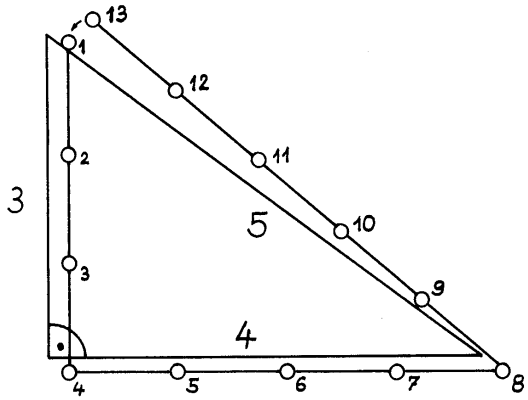
9. Die 9 $\rightsquigarrow$ Die Drei in der Drei: Der Baum der Drei. Die Zahl der Sphären mit der Erde: Vollkommenheit! — Der Kubus: Drei mal die wirkende Dualität. Und die Erde mit den Sphären.

10. Die 10 $\rightsquigarrow$ Die Fünf mit der Dualität. Die Anzahl der Finger der Hände, der Zehen. Der ganze Mensch beim Zählen, rechnen, planen. Die Grundlage des Staates und so des Überlebens: Grundzahl des ägyptischen Zahlensystems. Bei der Tetraktys schworen die Pythagoräer: Endliche 8 Sphären, Erde, der unendliche Geist in der der Geometrie... Auch die Zahl des kabbalistischen Lebensbaumes mit dazu den 22 Pfaden. Bei der Tetraktys $(1 + 2 + 3 + 4 = 10)$ schworen sie also, die Pythagoräer. Und das Pentagramm war ihr Erkennungszeichen, in der Dualität das 10–Eck. Und die Erde mit Sphären und dem beseelten Menschen.

11. Die 11 $\rightsquigarrow$ Die Anzahl der vollen Mond–Monate zu vollen Tagen (30) im Sonnenjahr. Der letzte Monat (römisch der Februar) wird nicht mehr voll. Die ursprüngliche halbe Zahl der Buchstaben im Alphabet: Das Alphabet des lichten Tages. Auch die „Solothurnerzahl“... Dazu die Erde mit Sphären, Mensch und Engel.

12. Die 12 $\rightsquigarrow$ Die wesentlichste Zahl der Vollmonde, die Hauptzahl aller Mondmonate in einem Jahr (12 mal 29.5 Tage = 354 Tage). Das Sonnenjahr voll: 366 volle Tage. Das Mittel: $(\frac{366+354}{2} = 360)$ Tage: Die Gradteilung des Tierkreises. Mondmonate sind für Tiere–züchtende Wüstenvölker wichtiger als das Sonnenjahr: Wegen der Trächtigkeit. Die halbe Zahl der Buchstaben im neuen Alphabet: Das Alphabet des lichten Tages. Und in der Geometrie, geistgeboren: Zwölf ins Seil geknüpfte Knoten in gleichen Abständen hat das kleinste pythagoräische (rechtwinklige) Dreieck. Um einen Tennisball lassen sich maximal zwölf weitere Tennisbälle gruppieren. Es bleibt aber eine kleine Lücke wie bei den Vollmonden. Musikkosmos (Pythagoräer)... Somit: Der Mond im Sonnenjahr, der Kosmos, die Zwölf. Manchmal jedoch auch die Dreizehn, wenn es mal 13 Vollmonde gibt in einem Jahr. Denn das Sonnenjahr kann nicht exakt in Vollmondzyklen geteilt werden. Dann tritt eines der vier kosmischen Übel der Unberechenbarkeiten ein, welche man kannte als die pythagoräische oder die göttliche Harmonie störend: Kometen, Mond- und Sonnenfinsternisse und dreizehnter Vollmond. Weiter haben wir den Kosmos der Musik: 7 Schritte, Töne, aus 12 ergibt eine Tonleiter. Dazu die Erde mit Sphären, Mensch, Engel und Gott. Wie es gut so war.





13. Die 13 $\rightsquigarrow$ Manchmal hat das Jahr dreizehn Vollmonde, denn die Rechnung geht ja nicht auf: Eines der vier kosmischen Übel (neben den manchmal überraschenden Unberechenbarkeiten und damit wegen des Unglücks des Versagens der Berechnung daher Unglückkünder) „Kometen“, „Mond–“und „Sonnenfinsternisse“und „dreizehnter Vollmond“. Dann aber auch in der geistgeborenen Geometrie quasi synchron: Zum Knüpfen des kleinsten seilgeknüpften pythagoräischen Dreiecks (mit rechtem Winkel) braucht es dreizehn Knoten im selben Abstand. Der Anfangsknoten und der Endknoten werden dann zusammengelegt um das Dreieck zu bilden. Um einen Tennisball lassen sich zwölf Tennisbälle mit Lücken gruppieren (Dodekaeder). Der dreizehnte Platz ist kein voller mehr, kann keinen ganzen Ball mehr aufnehmen. . . Dazu die Erde mit Sphären, Mensch, Engel, Gott und schliesslich noch der Schlange, der Satan. Das kann kein Glück bedeuten. . .

14. Weitere wichtige Symbolträger: $\rightsquigarrow$ 15, 21, 16, 20 (Ikosaeder), 21, 22, 24, 30, 33 usw. Man informiere sich dazu mittels einschlägiger Lexika.

15. Zu den Zahlen als Symbolträger und deren Erscheinen in Kunstwerken gesellen sich auch ebene Figuren oder Raumkörper.

3.2.8 Zur Tetraktys

Zwei mal fünf gleich zehn, wie die Finger der beiden Hände, ist die Summe der Tetraktys, einer „dreieckigen Zahl“: Die Darstellung der Zahlen eins, zwei, drei und vier im gleichseitigen Dreieck.

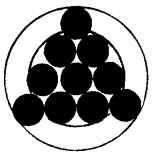
Bei der Tetraktys schworen die Pytagoräer — und das Pentagramm war ihr Erkennungszeichen. . .

Darstellung der Tetraktys auf der Geraden: $1 + 2 + 3 + 4 = 2 \cdot 5 = 10$

Nummern:

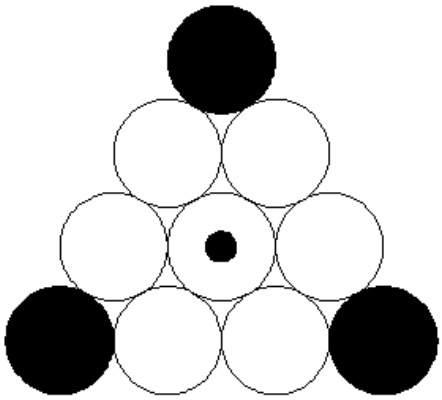
$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \end{array}$$

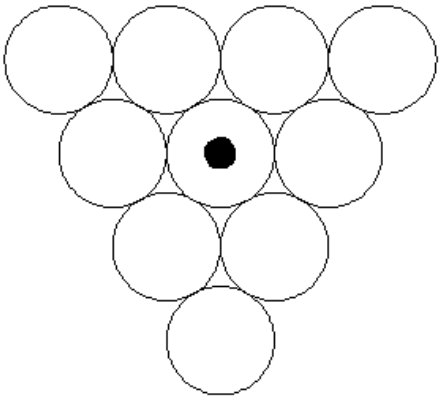
Die Darstellungen der Tetraktys in der Fläche: Dies ist ein Aufbau der Harmonie! — Harmonie, ein Ziel des Strebens der Pythagoräer!



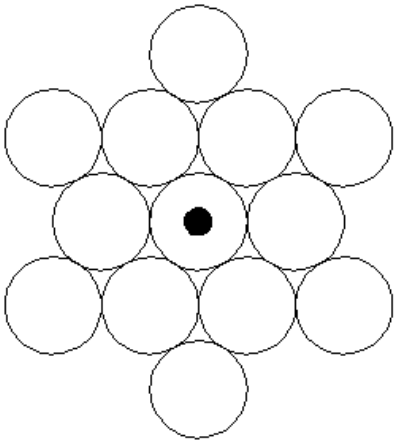
Im Bild rechts sieht man zwichen den 10 Punkten 9 gleichseitige Dreiecke (Harmonie: Sphärenzahl inklusive Erde) und auch eine Ansicht eines Würfels! Die 9 Dreiecke besitzen 27 Kanten, wovon $9 + 9$ paarweise verschmelzen.

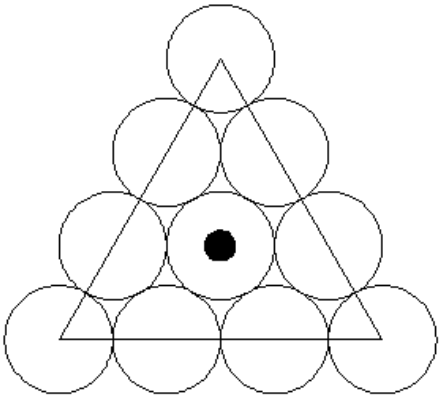
Die Tetraktys flächig, mit Zentrum: Sie ist hier 3-eckig, seitlich mit je 4 Kreisen als Kanten, total 10 Kreise. Entfernt man die Kreise an den 3 Spitzen, so bleiben die 7 inneren Kugeln, welche die Spitzen verbinden.

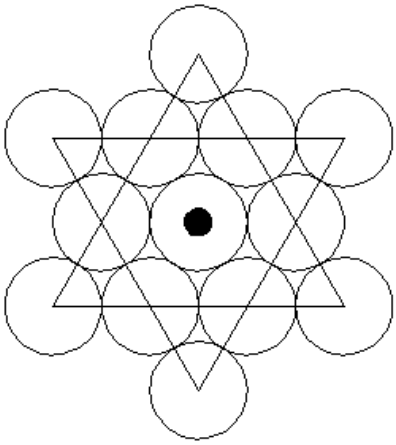




Dann gedreht oder gespiegelt: Die Dualität, zu 6 Achsen symmetrisch.







Dann überlagert: 6 Ecken, mit Zentrum 7. 12 umschliessen die innere Kugel. Total 13. Auch die Parkettierung... Harmonie. Ohne die Kugel im Zentrum sind es 12.

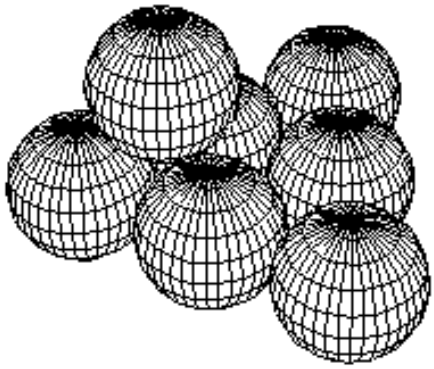
Dann die **Tetraktys im Raum**: Das **Tetraeder** — damit ist der Aufbau der platonischen Körper möglich — der Harmonie....

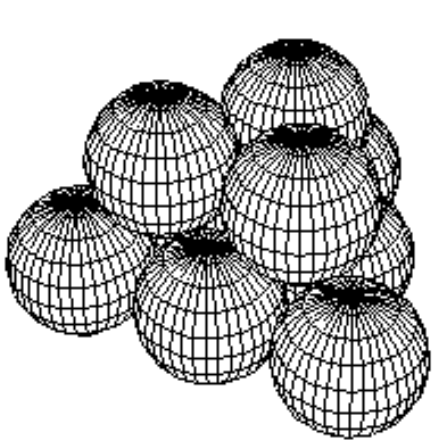
Im Raum lassen sich diverse Modelle realisieren:

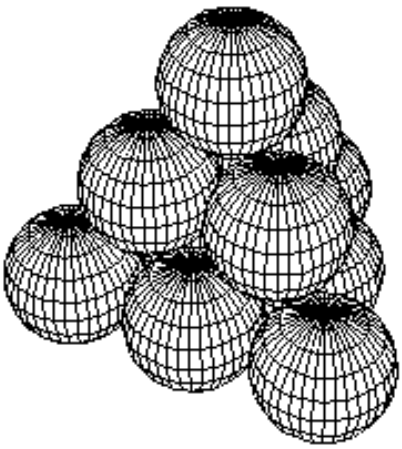
1. Mittels einer Abwicklung das Flächenmodell. Der Körper wird durch seine Hülle dargestellt.

2. Ebenso kann man Kantenmodelle herstellen, mittels Drähten oder Strohhalmen als Kanten.

3. Und weiter Raummodelle, indem man den Körper aus einem Volumen herausarbeitet, in Anlehnung an die Bildhauerei. Modelle dafür lassen sich mit einfachen Grundkörpern annähern, z.B. mit der Hilfe von Kugeln. Diesen Weg wollen wir jetzt beschreiten, denn damit lässt sich die Welt der platonischen Körper durch aufbauende Konstruktion realisieren, ohne dass die Teilung, also eine Destruktion verwendet wird.







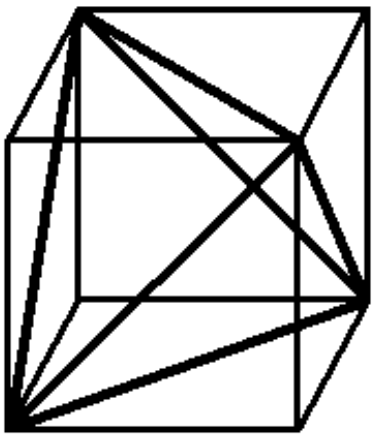
$\rightsquigarrow$ Hier erscheint das Tetraeder mit den 4 Ecken und den 6 Kantenmittelpunkten.

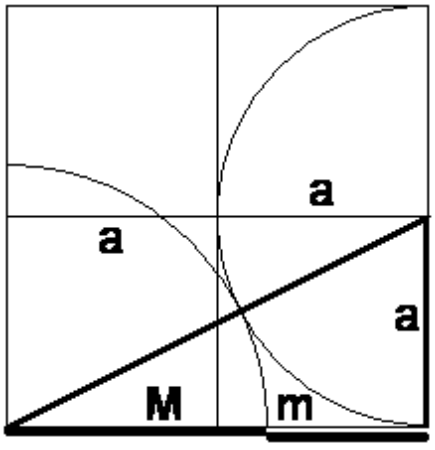
Mit den 6 Kanten des Tetraeders besitzt man auch die gegenüberliegenden Diagonalen des Würfels, eine pro Fläche. (Siehe Bild unten.) Man hat den Würfel. Damit hat man auch das Quadrat. Die 4 Differenzteile des Würfels zum Tetraeder lassen sich zu einer Pyramide gruppieren.

Mit den 6 Flächenmittelpunkten des Würfels kennt kennt man die 6 Ecken des Oktaeders. Mit den 8 Ecken des Würfels kennt man die 8 Flächenmittelpunkte des Oktaeders. Man hat das Oktaeder. Würfel und Oktaeder sind somit duale Körper. Das Tetraeder dagegen ist zu sich selbst dual.

Nun benötigen wir noch den goldenen Schnitt beziehungsweise das 5–Eck — um das Dodekaeder als Volumenmodell zu erhalten.

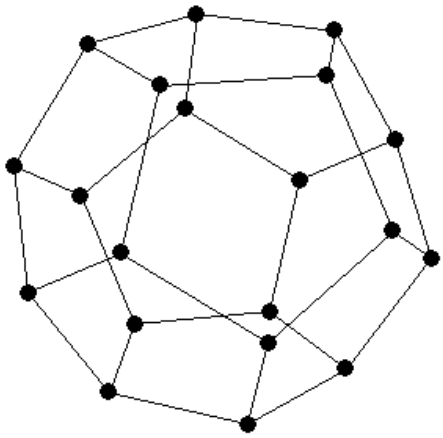
Rechts im Bilde sieht man eine Konstruktion des goldenen Schnittes. Siehe auch Seite 249. M = Major, m = Minor.

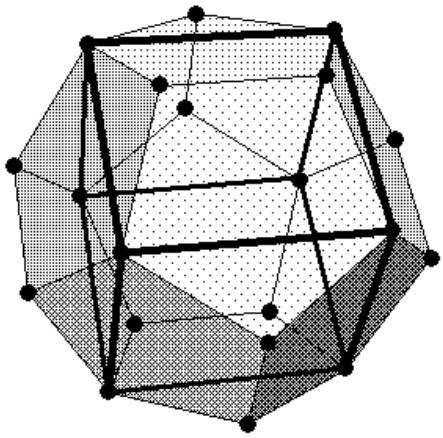




Mit den 12 Kanten des Würfels kennt man 12 Diagonalen der 12 Dodekaederflächen ($\rightsquigarrow$ je einen Eckpunkt im Fünfeck überspringend). Um die Lage dieser Diagonalen in den Fünfecken exakt fixieren zu können benötigt man den goldenen Schnitt ($\rightsquigarrow$ so 5-Eck bestimmbar). Damit gelingt es den Dodekaederkörper zu bauen. (Einfacher kommt man natürlich zum Flächenmodell mittels der Abwicklung, jedoch nicht zum Volumen.)

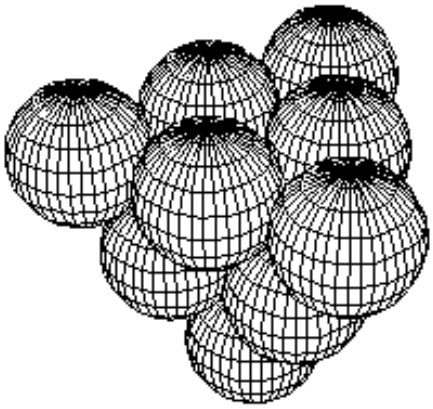
Mit den 12 Flächenmittelpunkten des Dodekaeders hat man die 12 Ecken des Ikosaeders. Damit hat man diesen Körper auch. (Dodekaeder und Ikosaeder sind duale Körper.)

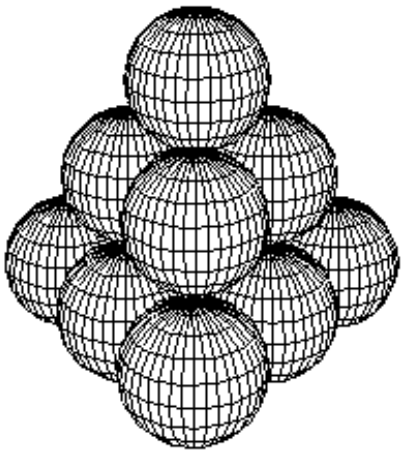




Symmetrien

Spiegelt man das Tetraeder an der Grundschicht, wobei 4 Kugeln wandern, so entsteht wieder ein Tetraeder. Fügt man die beiden Figuren mit gemeinsamer Grundschicht zusammen, so kommen also unten 4 neue Kugeln dazu.

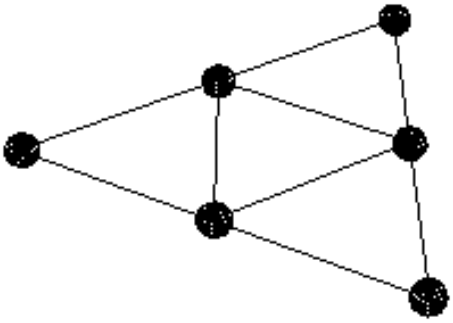


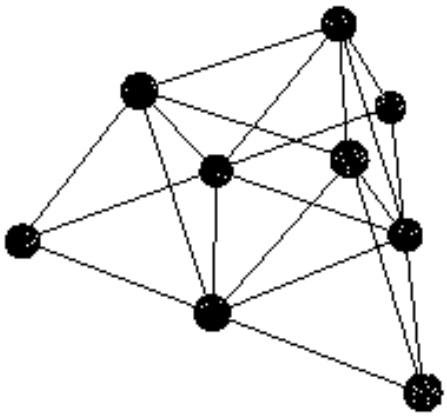


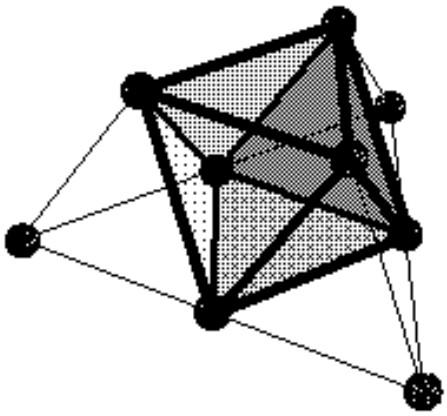
Komplettiert man den Körper so bezüglich allen 4 Seitenflächen nacheinander, so erhält man die Zahlenreihe der Anzahlen der verwendeten Kugeln 10, 14, 18, 22, 26, also das Doppelte von 5, 7, 9, 11, 13. So entsteht ein „Tetraederstern“. Im Zentrum sind seit dem Beginn 10 Kugeln, aussen kommen dazu noch 16 weitere. Entfernt man die 4 Sternspitzen, dann hat man 22 Kugeln als Verbindungselemente zu den Spitzen. Dies wiederum ist die Anzahl der Verbindungen im kabbalistischen Lebensbaum oder die ursprüngliche Anzahl der Buchstaben der Lautschrift. — Und wie sieht ein solcher „Tetraederstern“ wohl aus? Ist ein derartiges Gebilde vielleicht selbst wieder ein Tetraeder? — Ganz einfach: Um solche Fragen

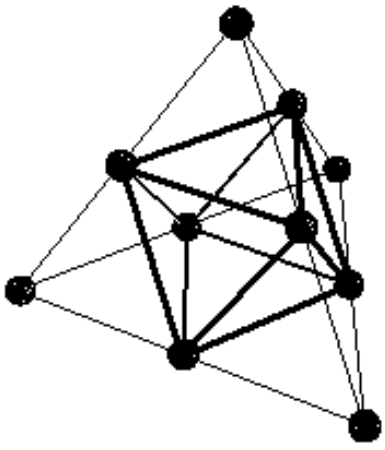
zu beantworten, baut man sich am besten Modelle und kontrolliert die Sache nach. Erst wenn die Frage so nicht entscheidbar ist, etwa aus Genauigkeitsgründen, wird es unumgänglich, exaktere geometrische Methoden anzuwenden.

Manchmal helfen aber auch schon einfache Überlegungen, um geometrische Entdeckungen zu machen. Wie man weiss, kann man bekanntlich mit dem Würfel den Raum „parkettieren“. Das zeigt uns das räumliche kartesische Koordinatensystem, wo ja der Einheitswürfel in gewissen Richtungen pallalel verschoben immer wieder auftritt. Versucht man dasselbe jedoch mit dem Tetraeder, so erscheint im Innern des Gitters das Oktaeder zwischen den Tetraedern, wie die folgenden Bilder zeigen:

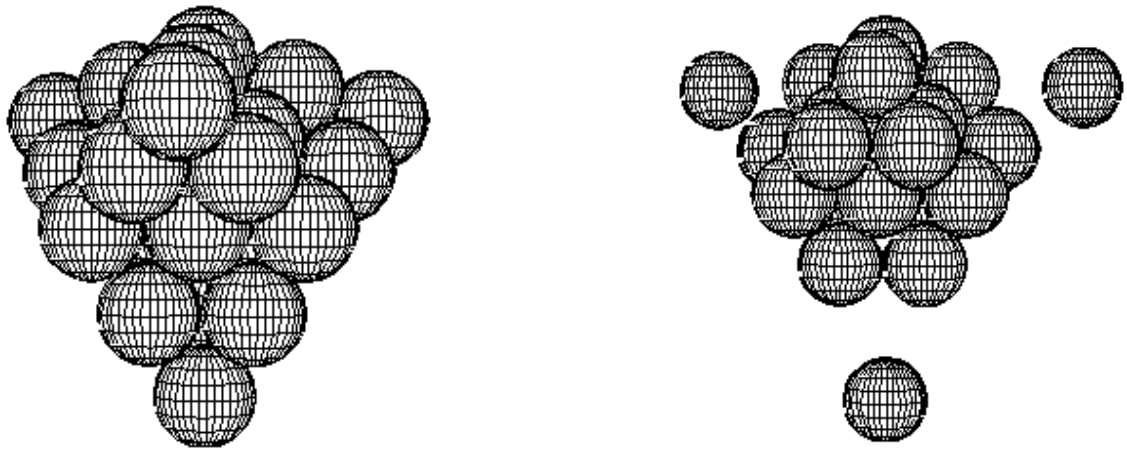




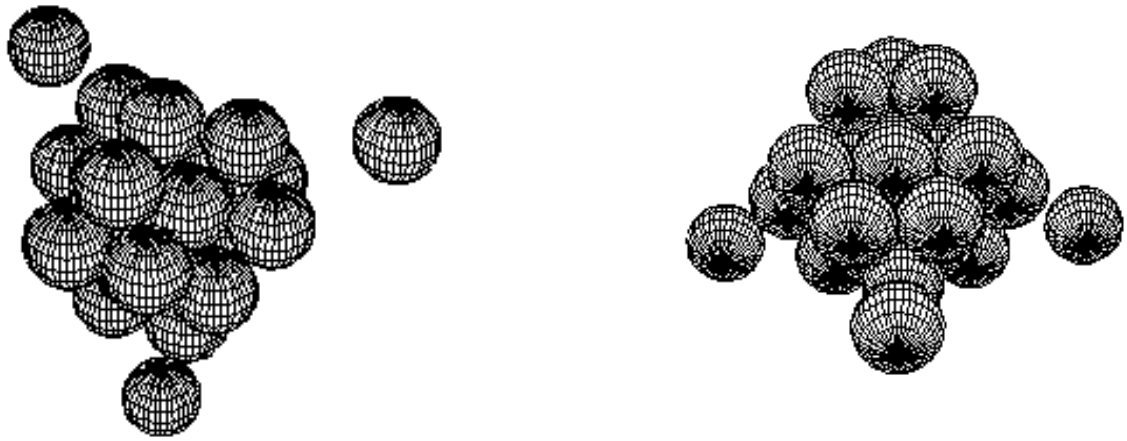




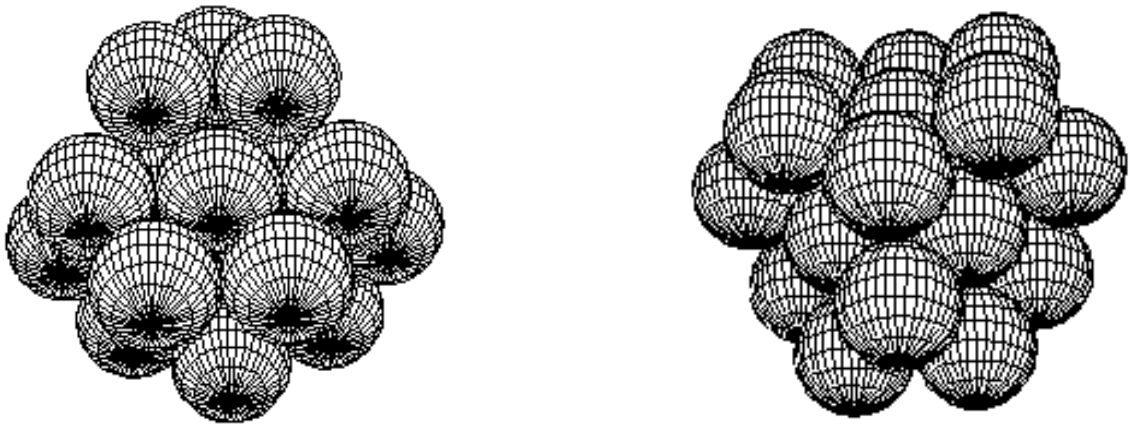
Beim Ebene–Spiegeln der pro Seitenfläche 4 hinter der Fläche liegenden Kugeln erhält man das folgende Tetraedersterngebilde TS26K mit $10 + 4 \cdot 4 = 26$ Kugeln (kein Tetraeder, obwohl es scheinen mag):



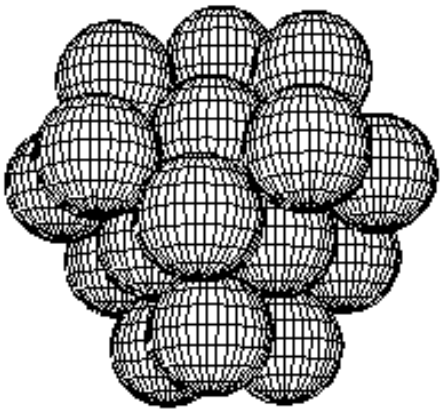
Wir entfernen oder rücken die 4 an den Sternspitzen aussen liegenden Kugeln nach aussen und isolieren so die 22 innen liegenden Kugeln, um den dadurch entstehenden Körper $TS22K$ (oder kurz $K22$) zu sehen:

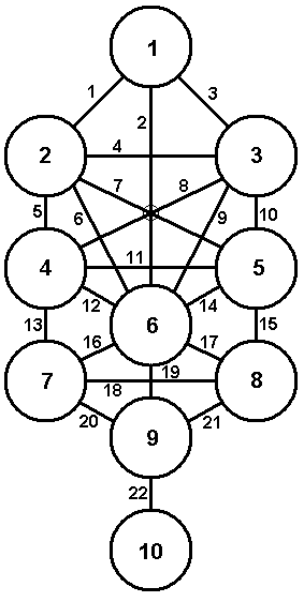


$K22$ hat wieder eine relativ kompakte Form. Man könnte ihn mit „hübsch“ bezeichnen:



Interessant ist der Bezug zum Lebensbaum der Kabbala, welche nach den vorhandenen Quellen uns erst gegen 1300 n.Chr. schriftlich fixiert erscheint. (Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Sephiroth und http://de.wikipedia.org/wiki/Kabbala.) Auch hier treten 10 Ausgangsobjekte (Sephirote) und dann 22 Verbindungen auf (hebräische Buchstaben — Kommunikation). Beim Tetraeder aus 10 Kugeln verbinden die 22 Verbindungskugeln die 4 äusseren Kugeln des Sterns, welche die Position der Ecken eines grösseren, überspannenden Tetraeders markieren. Man könnte in den 4 Ecken daher Symbole der $2 + 2 = 2 \cdot 2 = 4$ Elemente Feuer, Erde, Wasser und Luft sehen. Entsprechend wird auch der Baum des Lebens in 4 Welten eingeteilt. Interessant ist, dass die totale Anzahl 26 der Tetraedersternkugeln und die Anzahl 22 der inneren Kugeln die Zahl 24 in der Mitte einschliessen. Man hat hier wieder die Situation der Reihe 11, 12, 13 zusammen mit ihrer gespiegelten oder dualisierten Form vor sich.





Zusammenfassend kann man bemerken: Die platonischen Körper sind von Platon im Dialog Timaios untersucht und den Elementen des platonischen Weltbildes zugeordnet worden. Sie galten dann an Platons Akademie als geometrische Repräsentanten der Elemente. Das reinigende und daher metallgebärende und daher veredelnde Feuer: Das Tetraeder. Aus ihm lassen sich wie vorher beschrieben die andern Körper hervorbringen, also „gebären“. Dann Erde: Der Würfel. In der Erde als Würfel steckt daher das Tetraeder. Man sollte das Element Erde aber nicht mit dem Planeten Erde verwechseln und danach im Geoid das „richtige Tetraeder“ suchen. Dann aus dem Würfel das Oktaeder, also die Luft, ehemals auch Pneuma oder „Seele“. Aus dem Würfel (bzw. auch aus dem Oktaeder) kann man darauf mit Hilfe des Pentagramms (und damit des goldenen Schnitts) das Dodekaeder hervorbringen, das „fünfte Element“, die quinta essentia (Quintessenz) oder den Äther beziehungsweise den Geist. Zur Seele gesellt sich daher der Geist. Aus dem Dodekaeder erhält man das Ikosaeder, welches für das Wasser steht. Damit ist man am anderen Ende angelangt, denn Feuer und Wasser stehen sich gegenüber. Luft in der Mitte jedoch nährt den Körper so wie Pneuma den Geist.

Zu den platonischen Körpern und ihren Sternformen vgl. auch:
http://rowicus.ch/Wir/MathemDF/PolyederWerkstatt.pdf sowie
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/SpecialsHSB/GeometrieLabor/index.html#Lit

3.2.9 Aus welchem Geist entspringt die Mathematik? — Wo ankert sie?

Von der Quellenlage her treffen wir bei der Suche nach der Beantwortung der gestellten Frage schnell auf die Ursprünge der griechischen Philosophie. Diese lässt man gerne, mangels anderer Überlieferungen, mit Thales von Milet beginnen (ca. 624 v. Chr., bis 546 v. Chr.). Thales ist einer der sieben Weisen des Protagoras. Er gilt seit Aristoteles als Begründer von Philosophie und von Wissenschaft überhaupt, denn er stand am Beginn einer heute noch bekannten Reihe vor Gelehrten. War er doch angeblich Naturphilosoph, Staatsmann, Mathematiker, Astronom, „Ingenieur“ (damals im heutigen Sinne allerdings unbekannte Begriffe — man könnte diese Klassifikation also auch als üble Nachrede verstehen). Von ihm weiss man, dass er schon Geometrie, also Mathematik betrieb. Man denke an den Satz von Thales in der Dreiecksgeometrie. Er soll viele geometrische Sätze entdeckt und auch die Sonnenfinsternis von 585 v. Chr. vorausberechnet haben.

Mathematik und Philosophie treten so als siamesische Zwillinge in die uns bekannte Geschichte ein, wie wir nachher noch genauer erfahren werden. Das Eine ist ohne das Andere nicht denkbar. Es stellt sich daher auch die Frage: Was haben die Philosophen der alten Griechen mit der Mathematik an den „Berührungsflächen“ zu tun? Wie verfliessen diese Grenzen? Verbindet sie etwa nur die Nähe zu Apollo?

Die Frage nach der Mathematik ist daher insbesondere auch die Frage nach der Philosophiegeschichte. Und dort beginnt mit Thales das Kapitel der ersten Philosophen, der Vorsokratiker, welche man heute als Naturphilosophen kennt. Diese haben nach unseren noch möglichen Einsichten vor allem die Frage nach dem Wesen der Natur gestellt und zu beantworten versucht, die Frage nach dem Äusseren des Menschen also.

Für die Mathematik weiter wichtig sind dann einige speziell wesentlichen Philosophen, allen voran Pythagoras von Samos (unweit von Milet, 570 v. Chr., bis nach 510 v. Chr., Schulgründung in Crotone (Crotonei), später in Metapont in der Basilicata, Italien). Die Geschichte seines Lebens ist nicht ganz gesichert. Angeblich soll er in Ägypten Prieserweihen und damit Priesterwissen erhalten haben. Sein Name (Phta–go–ra) lässt sich entsprechend ägyptisch deuten. Dann sei er den Seeräubern in die Hände gefallen und nach Babylon verschleppt worden, wo er unter den jüdischen Gefangenen dem Propheten Ezechiel (oder Hesekiel) begegnet sei, womit man Kenntnisse des Judentums rechtfertigen kann. Jedenfalls hatte er Kenntnisse in den entsprechenden Wissensgebieten. Seine Schulgründung in Süditalien markiert den Beginn der fast 1000 Jahre dauernden Bewegung der Pythagoräer. Diese ist kein Geheimnis. Um Pythagoras als Lehrer bildeten sich Kreise: Im inneren Kreis seiner Schüler (Esotheors: die Esotheriker) versammelt waren die Kenner seiner Lehren, genannt die Mathemata, daher also die Mathematiker. Der äussere Kreis (Exotheros: Exotheriker) bestand aus den Akusmatikern, welche seine Lehren nicht verstanden und daher nur anwenden konnten. Darum herum war der Kreis der Profanen: Der dritte Kreis der Ungeschulten, der Unbebildeten, doch auch liebenswerten Menschen. Dieses Prinzip kennt man auch noch heute bei den Wissenschaftlern und den Anwendern der Wissenschaften.
Für Pythagoras war alles Zahl: „Alles ist Zahl!“ Rationale Zahl nach dem damaligen Stand der Kenntnisse. Das drückte damals aus, dass im Kosmos Ordnung herrschte, dass der von den Göttern stammende Kosmos die Ordnung war. Unordnung kommt so nicht von den Göttern, wirkt aber manchmal, oh Unglück, in die Welt. (Wir kennen die vier kosmischen Übel: Dreizehnter Mondmonat im Sonnenjahr, unangekündigter Komet, Sonnenfinsternis, Mondfinsternis.) Nach Pythagoras wird auch ein wichtiger mathematischer Satz benannt, der jedoch nachweislich schon früher bekannt war. Fest steht allerdings, dass sich Pythagoras und seine Jünger auch mit Dingen beschäftigt haben müssen, welche noch heute zur Mathematik gehören. Z.B. die pythagoräischen Zahlentripel

In Strome von Pythagoras wurde das sittlich strenge Denken mit mathematischen Einsichten verbunden. Und Apollo war der wesentliche Gott der Pythagoräer! In seiner Welt sang sein Sohn Orpheus. Hier entstand unser heute noch gültiges System der Musik der westlichen Kultur mit zwölf Halbtönen, aus

denen man Tonleitern zu sieben Tonschritten auswählt.

Einer seiner Jünger, Pythagoräer also, entdeckte das Irrationale. Z.B. die Wurzel aus zwei, also die Länge der Diagonalen des Einheitsquadrats, ist nicht rational. (Euklid beweist es.) Das hat dem Harmonieweltbild wohl arg zugesetzt. Die Legende sagt, man habe denjenigen, der dies ausgeplaudert hat, in einen Sack eingenäht und im Meere ersäuft. Andere Legenden schilden ähnliche Todesarten.

Parmenides von Elea, ebenfalls in Süditalien (ca. 540/535 v. Chr., bis 483/475 v. Chr.) gilt als Schüler des Xenophanes sowie als Begründer der Eleatischen Schule, aus der dann auch Zenon von Elea und andere hervor gingen. Es scheint — und es ist auch sehr stark plausibel, dass Parmenides auch Pythagoräer war oder diesen nahe stand, geographisch räumlich sowieso, und dass er wohl ebenfalls Orphiker war. Dies verrät sein Werk („Über die Natur“). Von seinem Lehrer, Xenophanes, ebenfalls in Elea, ist das einzige erhaltene Pythagorasfragment überliefert, welches zu Lebzeiten des Pythagoras aufgezeichnet worden ist (!). Wie das Verhältnis zwischen diesen Grossen genau war, verschweigt die Quellenlage. Sicher ist: Man muss sich gekannt haben, denn der Wirkungskreis der beiden deckt sich genügend — und der eine schreibt über den anderen recht alltäglich. Wie dem auch sei: Jedenfalls gilt Parmenides als Begründer der Ontologie, also der Lehre vom Sein, und damit der Metaphysik. Hier zeigt sich erstmals die Spaltung der Welt des Denkens in Begriffe und Chiffren. So etwa: Ist das Nichts denn nichts? Die Notwendigkeit der Schärfung der Begriffe wird offenbar: Die Grundlage des vernünftigen Redens entsteht, des begrifflichen Denkens. Nur auf diesem Boden kann dann die Logik, und damit axiomatische Mathematik, wachsen.

Seinen Schüler Zenon (ca. 490 v. Chr. in Elea, bis ca. 430 v. Chr. in Elea oder Syrakus) kennen wir als Begründer der Dialektik. Mit der Dialketik beginnt ein wesentliches Prinzip des Diskurs — des Methodischen der Sprache und der scharf gefassten Verständigung durch das Mittel der Sprache. Hier entsteht Methodik im Bindebereich von Form mit Intention — im Bereich von geistigem Austausch im Sozialen. Hier erscheint das Gefäss der Logik.
Von Zenon stammt auch das Prinzip des indirekten Beweises, der unendlichen Regression sowie der Beginn der Beschäftigung mit dem Kontinuum. Dies sind Gegenstände der Mathematik. Es steht hier also im Raum die Frage nach der Beweismethodik, dem Hauptwerkzeug der Mathematik. Mit dem indirekten Beweis und der unendlichen Regression werden Prinzipien geboren.
Zenon, so wird berichtet, soll anlässlich von panathenäischen Spielen in Athen geweilt und dort beim Kerameikos (Kyrameikos) Vorlesungen gehalten haben. Und unter seinen Schülern, das ist es eben, sei Sokrates gewesen.

Sokrates dann (469 v. Chr. in Athens Demos Alopeke, bis 399 v. Chr. in Athen) vertrat das Anliegen der Ethik. Er höhrte auf sein Gewissen, unerbittlich. Er gilt auch als Schöpfer der Ethik. Er ist der Verfechter der Wahrheit. Erfahrung ist erfahrene Wahrheit. Für sie lohnt es sich zu sterben. Wahrheit steht somit über allem. Hier ankert die Mathematik: Beweise führen schrittweise zu Wahrheit. Mathematik ist ja jene Wissenschaft, wo man infolge der Beweise Sicherheit in der Wahrheit von Aussagen gewinnt.

Sein Zeitgenosse und Sophist Protagoras (Abdera in Thrakien 490 v. Chr., bis 411 v. Chr.), zeitweise ebenfalls in Athen, verkündete: „Der Mensch ist das Mass aller Dinge.“ Dies interpretierte man damals als Aufruf zur Gottlosigkeit. Es kam zur ersten Bücherverbrennung der Geschichte: Die Bücher des Protagoras. Später allerdings interpretierte man den Spruch anders. Der Mensch gibt das Mass — speziell in der Kunst. Nach dem Masse des Menschen ist die Wohlgefälligkeit geartet. Der goldene Schnitt, ein nicht rationales Verhältnis, wurde wesentlich. Eigenliebe also?

Der grösste Schüler des Sokrates, Platon (428/427 v. Chr. in Athen oder Aigina, bis 348/347 v. Chr. in Athen), gilt heute vielen noch als der Inbegriff des Philosophen. Man redet von der Philosophie als von „Platon und seinen Epigonen“. Nach ihm sind die regulären Polyeder benannt: Die platonischen Körper.

Für ihn galt: „Alles ist Schein“, alles Erkennbare. Die Wirklichkeit liegt dahinter. Man nimmt sie nur wahr wie Schatten an einer Wand. Die Ursachen der Schatten bleiben einem verborgen. Mit Platon beginnt die Erkenntnistheorie. Und, weil das Ideal der Demokratie in der Realität nicht vollkommen zu erreichen war, heisst eines seiner gewaltigen Werke „Der Staat“, eine Anleitung zum Besseren. Er, Platon, gibt der Matehmatik ihren Zweck: Für ihn waren die mathematischen Gesetze die Einblicke in das Reich der Ideen. Über dem Eingang von Platons Schule im Hain des Akademos, daher „Akademie“ genannt,soll zu lesen gewesen sein: „Hier trete keiner der Geometrie Unkundiger ein!“ Platons Philosophie hat sich dann über diverse neue Höhepunkte in der Geschichte (Neuplatonismus in der Spätantike, im Mittelalter speziell an der Schule von Chartres, im Florenz der Medici, im deutschen Idealismus, in heutigen Strömungen und natürlich verdeckt in der Matehmatik) bis in die Gegenwart fortgesetzt.

Platons Schüler Aristoteles (384 v. Chr. in Stageira oder Stagira auf der Halbinsel Chalkidike, bis 322 v. Chr. in Chalkis auf der Insel Euboia) hinterliess wie Platon ein gewaltiges Werk. Er sammelte das Wissen systematisch in Systemen. Er schuf die Ordnungsprinzipien der Bibliothek — und er gilt als „Vater der Logik“, also ein Mathematiker, der den Logos zähmt. Er markiert mit seinen Syllogismen oder Deduktionen ihren Beginn . Damit erst wird das Denken in seinen Gesetzen erkennbar und damit streng.

Beispiele von Syllogismen:

Obersatz oder erste Prämisse: „Alle Menschen sind sterblich.“ (Sterblich ist Oberbegriff sowie Prädikat, Mensch ist Mittelbegriff und auch Subjekt.)
Untersatz oder zweite Prämisse: „Alle Bürger sind Menschen.“ (Bürger ist Unterbegriff sowie Subjekt, Mensch ist Prädikat.)
Folgerung und auch Schlussfolgerung: „Alle Bürger sind sterblich.“ (Bürger ist Unterbegriff sowie Subjekt, sterblich ist Prädikat sowie Oberbegriff.)

Analog (etwas boshaft witzig und das Problem der Spannung zwischen Möglichkeit und Realistaion, also Existenz unterschlagend , man möge dies aus Lust am Gelungenen verzeihen):
Obersatz: „Geistiges ist unsterblich.“
Eingegrenzter Obersatz (eingegrenzt auf eine Untermenge): „Geistige Wesen sind unsterblich.“
Untersatz: „Engel sind geistige Wesen.“
Schlussfolgerung: „Engel sind unsterblich.

Aristoteles Zeitgenosse Euklid (360 v. Chr. vermutlich in Athen, bis ca. 280 v. Chr.), war ebenfalls Schüler an Platons Akademie in Athen: Er wurde Lehrer, Sammler, vermutlich auch Bibliothekar an der vermutlich auf Geheiss von Alexander dem Grossen im damals griechischen Alexandria später errichteten Bibiothek, wo er, vermutlich dann unter Ptolemaios I, das Wissen der Ägypter sammeln sollte. Und was hat dann Euklid dort gesammelt — neben dem später errichteten Grab Alexanders? Überliefert ist sein grosses Werk „die dreizehn Elemente“ der Geometrie und der Arithmetik, jene Bücher zur Geometrie, die im Beweis gipfeln, dass es unter den unendlich vielen denkbaren Polyedern nur fünf regelmässige, also platonische Körper geben kann. Unter den unendlich vielen vorstellbaren Möglichkeiten für ideale Polyeder kann es also nur 5 verschiedene Realisierungen der Forderung nach Flächenregelmässigkeit, Flächengleichheit und Eckengleichheit, also höchstmöglicher Harmonie, geben. Diese Sammlung „Geometrie“ gilt als Urmodell eines streng und exakt–deduktiv–wissenschaftlichen Systems (sprachlich–heuristisch verankerte Grundgebilde, Axiome, Definitionen, Lemmata, Theoreme, Korollare). Dieses Werk hat Modellcharakter für exakte Wissenschaften. Damit beginnt geradezu die Exaktheit jener Wissenschaften, speziell die einer überkommenen mathematischen Disziplin, der Geometrie nämlich, deren Meister seit Jahrtausenden die Ägypter waren. Ägypten, das Land der Seilspanner, wo man periodisch nach den Nilüberschwemmungen das Land neu vermessen musste, ist ein Geburtsland der Geometrie.

Aristoteles Schüler Alexander der Grosse (Alexander III. von Makedonien, 20. Juli 356 v. Chr. in Pella / Makedonien, bis Juni 323 v. Chr. in Babylon, von 336 v. Chr. bis zu seinem Tod König von Makedonien, Hegemon des Korinthischen Bundes): Er machte sich daran, den Zwist, die Ursache des troyanischen Krieges, zu beenden. Er eroberte die Welt, um dann Frieden folgen zu lassen. So verbreitete sich die griechische Kultur und — beendete den Zwist zwar nicht, denn die Nachfolge war nicht wirklich geregelt. Alexander starb zu früh, während die Schule von Alexandria für viele lange Jahrhunderte das geistige Zentrum wurde. Kam nicht bald, trotz Alexanders frühem Tod, Harmonie und Frieden?

Ja, aber wieder ganz anders. Die Pax Augusta aus Rom, von einigen als die Nachfahren entkommener Trojander gehalten, so vielleicht gar Hethiter. Die Römer sind die Macher, die Techniker, die Gross-Organisatoren, die „Akusmatiker“. Sie wenden das Wissen an. Auch jenes aus griechisch Alexandria. Und werden sie auch einmal daran sterben, die Römer? Denn nicht alle römischen Ämter sind erloschen. Rom dauert noch und lebt in Teilen. Wenn auch nicht im Bewusstsein der heutigen Öffentlichkeit, dann aber dennoch in der Realität der Macht.

Und nun, wie war das mit den Zahlen, was sollten sie? — Alles ist Zahl (Pythagoras): Rationale Verhältnisse, Musik, Tonleitern, Tonarten, Zahlenbedeutungen — aus dem Kosmos, die Gestalt des Kosmos, der Ordnung: Die Zahl als Mass der Beziehung, als Verhältnis. Doch bald ist der Mensch das Mass aller Dinge. Sein Wesen ist irrational. Der goldene Schnitt und seine Verwandten treten auf. Die Geometrie entfaltet Wirkung. Seit Obergeometer Pharao war die Geometrie sogar königliche Kunst, den Göttern geweiht, nichts für den Pöbel. Jedoch für die Tempel. Denn das niedrige Volk hatte auch hier, vor den Augen des Geistes, sehr mittellos zu sein. Die für dumm Gehaltenen mussten auch so belassen bleiben wie sie waren, damit die Hierarchie nicht ändern konnte.

Und hat sich dann die Philosophie von der Mathematik entfernt? — Für einige wohl, für andere jedoch weitgehend überhaupt nicht. Namen wie Pascal, Descartes, Leibniz, Russel usw. belegen dies eindrücklich. Das sprengt jedoch diesen Rahmen hier.

3.2.10 Muss man das alles wissen — oder: „Was ist Bildung?“

Dazu gehört auch die Frage: „Was soll Bildung?“

Einmal hat jemand angefragt, ob Bildung an Konferenzen oder „Bildungsanlässen“ zu erwerben sei, z.B. wenn bei solchen Anlässen der Gewinn für die Teilnehmer um ein „Vielfaches“ grösser sei als bei der Bevorzugung von Alternativen.

Hier beginnt das Problem schon bei der Frage „was denn Bildung sei“ und dann auch was „vielfache Bildung von einer anderen Bildung“ sei. Was wäre da zu antworten? Vielleicht dies:
Das mit der Bildung kann nicht so funktionieren wie bei einer moderierten Diskussion, etwa in einer Fernsehsendung oder bei einem Podium an Kongressen. Es muss so funktionieren, wie es eben schon immer funktioniert hat. Und man muss dort gucken wie man vorgehen soll, wo man schon sicher weiss, dass es funktioniert. Das wäre bei unseren Hochschulen. Und wie funktioniert es dort? Wir kennen es von kompetent gehaltenen Vorlesungen, den Seminarien und Kolloquien. Alles andere ist Zeitvertreib, Unterhaltung, bekannt als die Zeitschleudern, also für das Anliegen „Bildung“ wertlos.

Mit der Bildung verhälte es sich eher so:
Bildung beruht auf Eigeninitiative. Bildung holt sich jemand, der Bildung haben will, weil er daran seine Freude hat. Insbesondere weil er auch am Erwerb dieser Bildung Freude hat, in jedem Fall Freude hat am Prozess, unabhängig von jedem Angebot irgendeiner Organisation. Häufig auch gegen jedes Angebot solcher Organisationen, denn Bildung folgt eigenen, inneren Gesetzen: Gesetze der Bildung an sich, der Freude entsprungen, nicht ausleihbar, vielleicht so:
Irgendeine Erkenntnis lässt alleine jemanden erstaunen. Dem Staunen dann entspringt eine Frage.

Das Suchen der Antwort führt darauf zu immer neuen und nochmals neuen Fragen, getrieben von individueller Neugier, genährt durch das Staunen. Das Staunen jedoch ist geboren aus einer inneren Liebe zur Sache. Solche Liebe lässt sich nicht verordnen. Sie lässt sich nicht lehren. Sie ist da, wenn die Musen jemanden küssen — wenn der Amor seinen Pfeil abgeschossen hat und dieser dich trifft. Und sie ist nicht unbedingt da, wenn du den Musen befiehlst dich zu küssen. Und auch nicht, wenn du den Amor anweisest, nun dort und dorthin bitte seine Pfeile zu schießen.
Staunen ist Schicksal. Schicksal lässt sich nicht erzwingen. Es steht über den Göttern. Auch diese müssen den Parzen gehorchen — auch sie können nichts gegen die Moirai ausrichten. 30'000 Stunden verpasste Studienarbeit und 10 Jahre nicht gepflegte Nachbesserung ist Ausdruck von Schicksal, welches lehrt: Diese Stunden liegen jetzt nicht fruchtbar hinter, sondern immer noch vor dir. Es gibt keine Abkürzung zur letzten dieser Stunden hin. Du musst den Weg beschreiten, welcher durch die Sache vorgegeben ist. „Es gibt keinen Königsweg zur Geometrie." Und: „Was, der will mit dem, was er jetzt bei mir gelernt hat, Geld verdienen? — Gib ihm 10 Obolos und jag in weg von hier, dorthin wo er damit was von solchem erwerben kann, dem er Wert beimisst."

Bildung vergibt keine Orden für erfolgreiche Anwesenheit. Sie wird nicht durch Diplome ausgewiesen, denn sie lebt aus sich, aus dem Tatbeweis, nicht aus dem papierernen Vertrauensbeweis mit Referenz auf anno dazumal in Hinterkammer 1a eines Bildungsproduktions–Meisters xy. Bildung zeigt nur den Entwicklungsstand des Geistes. Blecherne Ordenbrüste gelten da nichts.

Und was ist sie, diese Bildung? — Bildung hat verschiedene Facetten. Um da eine fixe Antwort zu geben, muss einer wohl einer Ideologie anhängen, denn ehrliche Antworten sind sehr wohl sehr widersprüchlich:

Bildung war einmal in gewissen Kreisen das, was das Gymnasium lehrt — oder Bildung ist nun das, was dir die Gegenwart erklären kann (abhängig von der jeweils akzeptierten Leitkultur, Religion und Weltanschauung — und hoppla, der Werturteile)! Humanistische Bildung wäre dagegen vor allem die auf den alten Kultursprachen ruhende Bildung. Man müsste also Griechisch und Latein lernen um sie zu besitzen, und das Althebräische ebenfalls. Was wohl hier in diesem Rahmen der Baukultur nicht unbedingt sein kann. Bürgerliche Bildung entstände dagegen eher durch die Vermittlung des Weltbildes der momentan gerade leitenden Parteien, Ideologie also, hier bei uns ihrer Masse wegen also etwa jene Ideologie der grössten Partei mit dem meisten Wählern, eingeschlossen auch den dümmsten, womit man in „gebildeten Kreisen" gleich alle Säle leer fegt. Eine Leitmythologie zum Nachbeten ist da gefragt. Oder Bildung als das, was gerade konsensfähig ist, womit aber immer nur der Konsens von Beteiligten gemeint sein kann, der eines kleinen Kreises also, womit man eine Ideologie errichtet, da der allgemeine Diskurs ausgeschlossen ist, weil ein Konsens nie absolut sein kann in jenen Fällen, wo ein Fortschritt nicht ausschliessbar ist und man nicht schon ein für alle mal eine absolute Wahrheit auf der Grundlage eines nicht a priori evident wahren Zusammenhangs postulieren kann. Etwa dort, wo es jemandem zu vertrauen gilt, welcher ja auch gelogen haben könnte, zumal man seine Wahrheit mit Gewalt durchgesetzt hat. So gelangen wir zur maximalen Unbildung: Zum verschraubten Kopf und zum Glauben an die Schrauben.

Oft wird Bildung auch mit Kenntnis der Geschichte gleichgesetzt, doch Geschichte allein macht die Bildung nicht aus. Geschichte ist einerseits auch eher neu in der Bildung und sicher heutzutage dort nicht mehr alleine. Früher waren da in der Bildung bloß die Artes Liberales, das bekannte Quadrivium (die vier „mathematischen Künste" Geometrie (inklusive Naturwissenschaften), Arithmetik, Astronomie (inklusive Astrologie) und Harmonielehre) und das Trivium (die drei „Sprachkünste" Grammatik (mit Literatur), Rhetorik (mit Recht und Ethik) und Dialektik (mit Logik)), dann neben dem Recht die Philosophie unter der Fuchtel der Theologe und die Naturwissenschaften inklusive Medizin. Diese Künste des freien Mannes haben lange die Bildung ausgemacht. Der Weg zur Universität, wo diese Bildung zu holen war, führte über eine Lateinschule.
Dann hat man die Geschichte „erfunden". Besser gesagt, man hat ihr ihr Existenzrecht ausserhalb der Literatur wieder zugestanden, wohl als Konsequenz der Nationalstaaten, und diese mit auf den Schild

gehievt. Mit der Geschichte ward auch eine neue Fuchtel der Philosophie. Heute sind daneben Soziologie, Psychologie, Ethik, vielleicht auch etwas Kunstgeschichte und Geschichte der Wissenschaften etc. Diese Disziplinen gelten als sehr wesentliche Bildungsinhalte. Außerhalb eines fixen Kanons, wohlverstanden.

Dann das Aber: Bildung braucht aber Zeit. Viel Zeit. Sogar sehr viel Zeit. Sehr, sehr, sehr viel Zeit! Und ebenso viel Zeit sollte man zur Planung seiner Bildung aufwenden. Denn sonst hat sich die schon ausgegebene Zeit nur als Lehrstück dafür gelohnt, herauszufinden wie es nicht funktionieren kann mit der Bildung. Die Dummheit rennt immer allen sehr schnell voran. Sie kann auch erfolgreich sammeln, trotz ihrer Blindheit. Doch die Bildung kriecht. Sogar in die andere Richtung kriecht sie. Sie will mehr sehen. Sie benützt neben dem Mikroskop vor allem auch das Makroskop, um neue, bisher unbekannte Strukturen zu entdecken. Um zu begreifen. Auch um Rückschau zu halten statt Vorschau und Vorausschau. Der grossen Zeitaufwand, um tief zu begreifen, fordert dann ein Opfer: Seine Zeit und damit sich selbst gilt es zu opfern.

Und was soll sie nun, die Bildung? — Das ist die selbe Frage wie: “Was soll sie nun, die Liebe?“ — Sie dient dem Erreichen eines Zustandes: Den des Glücks! Glücklich ist der, der nun erlöst versteht — wenn er das erreicht, was ihn sonst ständig weiter drängen und stechen würde, so wie eine Nadel tief und tiefer im eigenen Fleisch... — Bildung ist so nutzlos für den, der keine drängenden Fragen hat, weil ihn so gar nichts stört, weil für ihn alles so klar, so egal, so richtig ist, weil er seine blechordene Brust als ganze Schwere seines Selbstwertes, als seinen ganzen Schutz erfährt...

3.3 Notizen zu den Ursprüngen unserer Geschichte

Das was wir Geschichte nennen, beginnt mit dem Vorhandensein erster schriftlicher Zeungisse, d.h. von Dokumenten. Geschichte ist daher immer nur Geschichte aus vorhandenen Quellen unter Ausschluss von all dem, was niemand überliefert hat...

3.3.1 Keilschrift

Erste schriftliche Zeugnisse stammen aus der Bronzezeit, ca 3300 v. Chr.. In Mesepotamien kennen wir die sumerischen Stadtstaaten Kisch und Ur. Im südlichen Babylonien, zwischen Euphrat und Tigris (Mesopotamien, heute Irak) lebte das Kulturvolk der Sumerer. Dort tauchte die Keilschrift auf Tontafeln auf. Die Menschen schrieben und rechneten, indem sie mit dreikantigen Griffeln Keile und Winkel in den weichen Ton drückten. Diese Schreibart der Sumerer wurde dann von ganz Babylonien übernommen. Diese Schrift heisst **Keilschrift**. Ein Keil bedeutet 1, ein Winkel 10. Das Positionssystem ist auf der Grundzahl 60 aufgebaut $\rightsquigarrow$ **Hexagesimalsystem**. Die unten wiedergegebenen Darstellungen sind dem alten Basler Rechnungsbuch des 5. Schuljahres (Progymnasium, Realschule) entnommen. Mache Dir zur Übung einige eigene Rechenbeispiele!

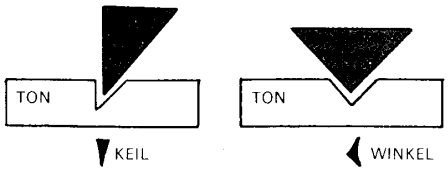


Abbildung 27: Keilschriftschreiben

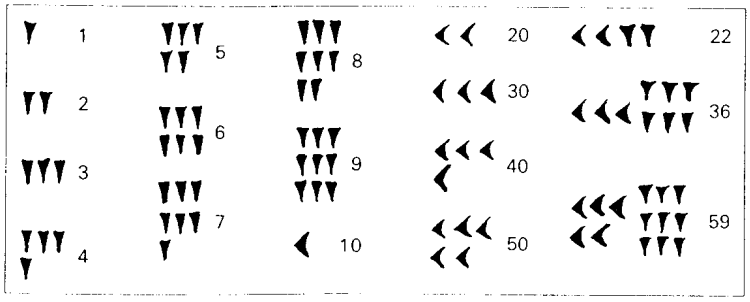


Abbildung 28: Babylonische Zahlenbeispiele

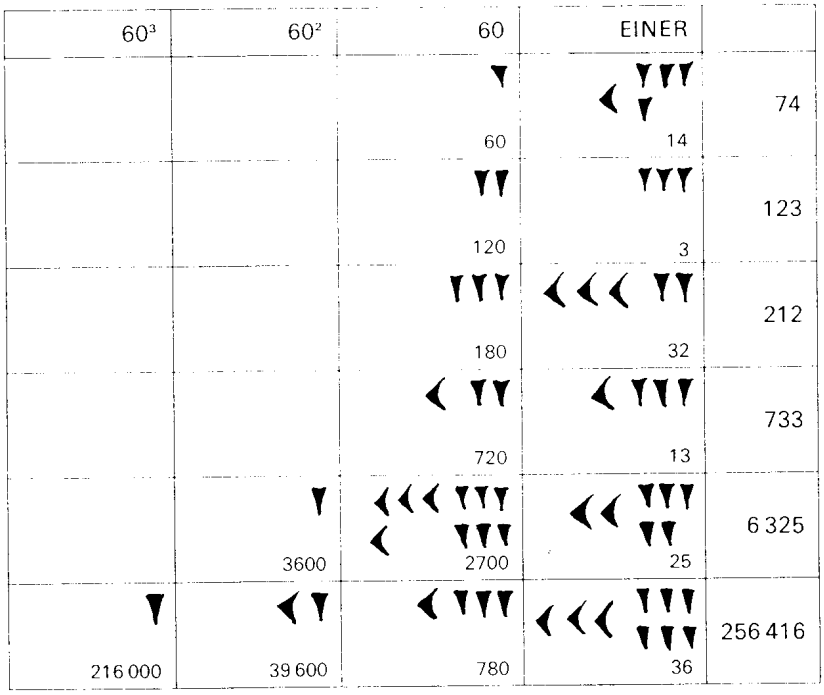


Abbildung 29: Babylonisches Positionssystem

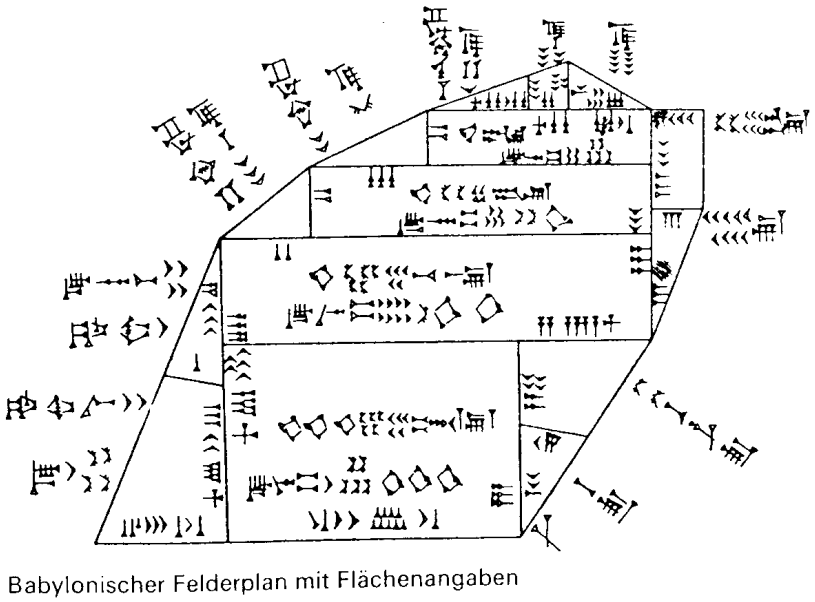


Abbildung 30 (Plan)

3.3.2 Hieroglyphen

In Ägypten vereinigt Menes Unter– und Oberägypten. Um ca 3000 v. Chr. oder früher beginnt die Hieroglyphenschrift. In Kleinasien, Kreta und Griechenland beginnt die frühminoische Zeit.
Eines der ältesten bekannten schriftlichen mathematischen Dokumente ist der im British Museum verwahrte Papyrus Rhind, der zurückgeht auf einen Text aus dem mittleren Reich (2000 bis 1800 v.Chr.).

Da geht es um die Berechnung von Lohnsummen, Getreidemengen, aber auch Flächeninhalten, also um Mathematik. Ein anderer solcher Papyrus ist als Moskauer Papyrus bekannt. Von noch früher wissen wir von statistischen Erhebungen aus der frühsten ägyptischen Geschichte (Zwiebelstatistik beim Pyramidenbau...).
Die nachfolgend wiedergegebenen Darstellungen sind wiederum dem alten Basler Rechnungsbuch des 5. Schuljahres (Progymnasium, Realschule) entnommen. Mache Dir zur Übung wiederum einige eigene Rechenbeispiele!

Die ägyptische Zahlschrift

Bestimmt hast du schon auf Abbildungen die in Stein gemeisselten, bildähnlichen Zeichen der alten Ägypter gesehen. Diese Zeichen werden **Hieroglyphen** genannt. Aus ihnen setzt sich die „Denkmal"-Schrift zusammen, wie sie auf Säulen, Grabplatten und Tempelwänden zu finden ist. Die Hieroglyphenschrift ist älter als die Keilschrift; um 3200 v.Chr. wurde sie im altägyptischen Reich schon verwendet.

Wie sah nun die Zahlschrift der alten Ägypter aus, und was fingen sie damit an?

Die Rechenfähigkeit des Pharaonenvolkes war beachtlich. Schon im 2. vorchristlichen Jahrtausend besass es Rechenbücher. Die Ägypter kannten das Bruchrechnen und wagten sich an anspruchsvolle mathematische Probleme heran. Die Geometer mussten jedes Jahr nach der Überschwemmung des Nils das Land neu vermessen und berechnen. Die Astronomen hatten schon vor über 6000 Jahren das Kalenderjahr zu 365 Tagen bestimmt. Die Gebildeten rechneten schriftlich, indem sie die Zahlzeichen auf Papyrus malten. Der einfache Mann benützte das Rechenbrett, eine Art Zählrahmen. Die Zahlzeichen bestanden zum Teil aus Bildern:

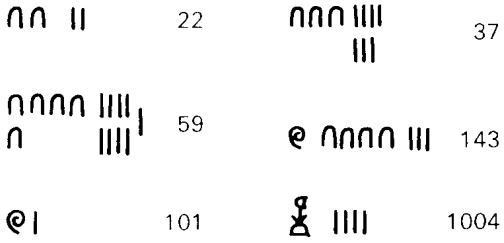
	1	
	10	
	100	aufgerolltes Palmblatt
	1 000	Lotosblume
	10 000	
	100 000	Kaulquappe
	1 000 000	

Die Kaulquappe gilt als Begriff für „viel", da im Überschwemmungsbereich des Nils unzählige davon vorkamen.

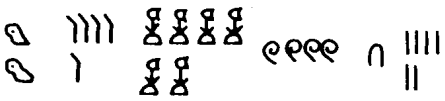
Abbildung 31: Ägyptische Zahlen

Die altägyptischen Zahlen werden von rechts nach links geschrieben. Damit die Übersichtlichkeit nicht leidet, werden nie mehr als vier Zeichen zu einer Gruppe zusammengefasst.

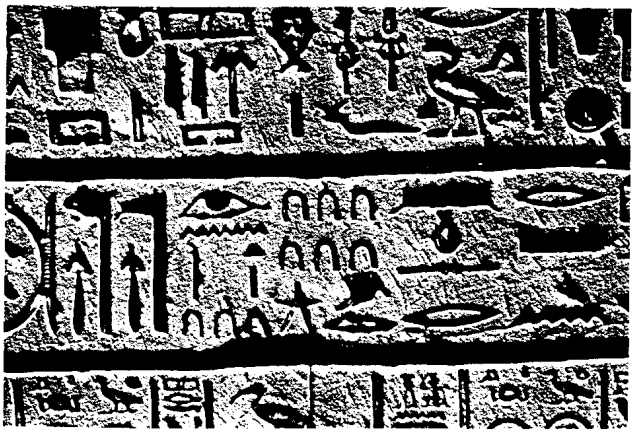
Im Gegensatz zu den Babyloniern rechneten die Pharaonen und ihre Untertanen im Zehnersystem.



Welches Zahlzeichen kannten die Ägypter offensichtlich nicht?



$2 \cdot 100\,000 + 5 \cdot 10\,000 + 6 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 10 + 6 = 256\,416$



Inschrift am Horustempel von Edfu (Oberägypten)

Abbildung 32: Zahlenrechnen

3.4 Zu einigen Grundgesetzen der prägenden Einflüsse auf den Menschen und daher auch auf die Architektur

3.4.1 Den Menschen prägende Einflüsse

Allgemeine prägende Einflüsse

Einflüsse, die die Denkweise, das Verhalten, das Gestalten des Menschen und somit die Architektur beeinflussen, sind vielfältiger Art. Will man eine Liste anlegen, so fallen einem sofort eine Serie von Einflüssen ein, die in ihrer Wirkung mehr oder weniger stark und im Einzelfall gewiss auch durchaus verschieden sind:
Landschaft, politische Situation, Familiensituation, soziale Situation, Herkunft, persönliche Biographie, Geschichte, generelle wirtschaftliche Situation, Zukunftsperspektiven, persönliche Vermögenssituation, Alter, „Intelligenz“, Kreativität, persönliche Kraft und Energie, Gesundheit, Bildung und Ausbildung, Weltsicht, Weltbild, Menschenbild, u.s.w.. Einige dieser Faktoren sind kennzeichnend für das einzelne Individuum, andere für Gruppen, Familien, Dorfgemeinschaften, Landschaften, grössere politische oder in ihrer Eigenart sich unterscheidende Verbände resp. Volksgemeinschaften, wieder andere sind kennzeichnend für ganze Generationen oder Kulturen. Als Beispiele von Positionierungen seien deren zwei genannt; das eine aus der Geographie, das andere aus der Philosophie.

Seitenblick auf die Lehren der Geographie

In der Anthropogeographie gibt es viele Entwicklungsstadien sowie Ausprägungen von Lehren und damit Ansichten. Man mag darüber streiten wie man will. Ein in einem gewissen Sinne prägender Einfluss der Landschaft auf den Menschen, der sie bewohnt, kann nicht bestritten werden. Wir halten daher fest:

> *Die Landschaft übt einen mehr oder weniger stark prägenden Einfluss auf den Menschen aus, der sie bewohnt.*

Darauf gestützt behaupten manchmal böse Zungen , dass die in den engen Tälern ganze Bergwände vor dem Kopfe hätten. . .

Die Sichtweise im Marxismus

Karl Marx hat sich vor allem für die sozialen Aspekte des menschlichen Seins interessiert. Aus dieser Visierrichtung heraus ist der folgende Satz aus der marxistischen Theorie zu verstehen:

> *Das soziale Sein bestimmt das Bewusstsein.*

Man kann für oder gegen den Marxismus sein, ihn annehmen oder ablehnen. Einen gewissen Kern Wahrheit im letzten Zitat kann man aber schwerlich leugnen.

Prägende Einflüsse auf Generationen oder Kulturen

Überlegt man sich, was nicht nur das Individuum, die Familie, Sippe oder gar die Talschaft prägt, was also einen weitreichenderen, allgemeineren Einfluss ausübt, so kommt man neben grösseren Landschaftsräumen auf langandaurende politische Situationen, Geschichte, Weltbild und auch auf das Menschenbild; dies sind alles bestimmende Einflüsse, welche sich über grössere Zeitabschnitte zu halten vermochten. Als Konsequenz verstehen wir, dass u.a. das kosmische Geschehen am Firmament, infolge der beschränkten Wahrnehmungs– und Messmöglichkeiten, während **Jahrtausenden** das Bewusstsein

bestimmt haben muss. Denn es gibt der Zeit den Takt und kann vom Menschen nicht beeinflusst, jedoch überall auf dem Planeten wahrgenommen werden. Dieses Geschehen drückt sich durch Rhythmen und somit durch Zahlen aus, die daher prägend auch auf die Architektur gewirkt haben müssen.
Später hat sich das Weltbild dann verändert — und damit auch die prägenden Einflüsse auf die Architektur.

Das kosmische Geschehen drückt sich durch Rhythmen und somit durch Zahlen aus, die daher auch prägend die Architektur gewirkt haben müssen.
Später hat sich das Weltbild dann verändert — und damit auch die prägenden Einflüsse auf die Architektur.

3.5 Gliederung von prägenden Einflüsse betreffend die Architektur

In groben Zügen kann man folgendes Bild zeichnen:

Prähistorische und grosse Teile der vorgriechischen Periode: Mystisches Weltverständnis. Grosser Einfluss haben kosmischen Rhythmen und der dabei wichtigen Zahlen. (Entwicklung von Zahlensymbolik und Sakralgeometrie). Diese Zeit ist eingangs besprochen worden. Einige Autoren tun die damalige, durchaus nachvollziehbare Sichtweise als Aberglaube ab, weil sie nicht mehr mit unserem heutigen Weltverständnis auf der rationalen Ebene widerspruchslos zu vereinbaren ist. Im Zentrum dieser Weltsicht steht z.B. im alten Ägypten eher das Jenseits und nicht das Diesseits. Im Gegenzug gibt es aber auch heutige, moderne Autoren, die die heutige, technische Sichtweise und unseren Fortschrittsglauben als Aberglaube abtun, weil der Erfolg, der momentane Vorteil daraus durch einen langfristigen z.B. ökologischen oder psychohygienischen Nachteil erkauft werden muss, der in der Zerstörung des Planeten, dem psychosozialen Ungleichgewicht der Gesellschaft und dem Schwarzpeterprinzip gipfelt.

Ältere griechischen Periode, Pythagoräer: „Alles ist Zahl.“ Grosse Wichtigkeit rationaler Zahlenverhältnisse unter Übernahme des Althergebrachten.
Der Götterglaube hat für den Menschen noch grosse Bedeutung, wie z.B. die Odyssee lehrt. Doch verdrängt die Vernunft schleichend die Macht der Götter. Der grosse Sieger von Troya ist Odysseus — und nicht alle die griechischen Helden, die als Halbgötter in Menschengestalt verehrt werden und schliesslich nach ihren Niederlagen auf dem Olymp Wohnung nehmen. Ihre Macht reicht nur solange wie sie von obersten Göttern beschützt werden. Wenn diese mal weg sind, geschieht das Unglück. Odysseus dagegen siegt mit seinem Verstand durch seine List und überlebt schliesslich auch die Rache des Poseidon dank seinem Verhalten...

Griechischen Klassik, Protagoras und später: „Der Mensch ist das Mass aller Dinge.“ Grosse Wichtigkeit des Masses des Menschen, speziell des goldenen Schnittes. Das Diesseits rückt vermehrt ins Zentrum.

Bemerkung: Die griechische Zeit ist auch die „Zeit der Polis“, wo historisch sichtbar Demokratie geboren wurde, und gleichzeitig die „Zeit der Ratio“. Erstmals in der Geschichte wird beobachtbar, wie das vernunftsmässige Denken quasi Allgemeingut wird, also „ins Volk geht“. Mit „Volk“ ist hier natürlich das Volk der freien Bürger gemeint, das hier nicht mehr einer Priesterklasse oder der Klasse der herrschenden Häuser auf Gedeih und Verderb ausgeliefert ist. Es ist die Zeit der Philosophen, deren durchaus eigenständige „Weltbilder“ uns zum Teil schriftlich überliefert sind.

Römertum, Riesenreich: Rom war in der besser bekannten Zeit erst Republik, dann beginnend mit Cäsar und Augustus Kaiserreich. „Rom hat gesprochen, die Sache ist erledigt.“ $\rightsquigarrow$ Grosse Wichtigkeit der Grösse, des Riesenhaften, des Übersteigerten, der Macht: Riesenstädte, Verkehrswege, Variantenreichtum, auch Toleranz. Mächtige Architektur (Kaiserpaläste!), erdrückend, gewaltbezeugend.

Frühmittelalter, Christentum: Das Weltbild ist nur symbolhaft zu verstehen, die Städte werden wieder klein, es muss wieder missioniert werden. Die Bauten werden kleiner und symboltragend (Romanik). Der Mensch tritt aus dem Zentrum, der Blick richtet sich eher nach innen oder ins Jenseits. Das Mittelalter wird oft als Zeitalter des Glaubens interpretiert. Bestimmte symboltragende Zahlen und Figuren werden zentral. Der goldene Schnitt als Proportion des Menschen bleibt weiterhin wichtig.

Hoch– und Spätmittelalter: Das Reich organisiert sich wieder, die Wirtschaft blüht wieder, das Weltbild ist nur symbolhaft zu verstehen: Grössere Bauten, Riesenbauten, „Jahrtausendwerke“: Gotische Dome und Kathedralen, symboltragend, mächtig, erdrückend, gewaltbezeugend. Der Mensch ist ein Nichts gegen die Gewaltigkeit Gottes, ausgedrückt durch die Gewalt der sakralen Bauten: Die Macht gehört der Kirche und ihren überstaatlichen Organisationen, den Orden. Im Zentrum steht der Glaube. Ausgebreitet und militärisch gesichert wird die Macht durch die Kreuzritterorden. Die Gotik ist plötzlich überall da, überall sind Bauhütten, die gotisch bauen: Wer hat das organisiert, wer bezahlt das, wer hat die Bauleute ausgebildet,. . . ? — Eine indiziengestützte Vermutung besagt, dass hinter dem allem der sehr mächtige Templerorden stand, der dem Papst schliesslich zu mächtig geworden ist. . . Wie in der Romanik: Bestimmte symboltragende Zahlen und Figuren sind zentral. Der goldene Schnitt als Proportion des Menschen bleibt weiterhin wichtig.

Hier noch einige Gedanken zur **Wechselwirkung zwischen den Kreuzzügen mit der Gotik**:
Vorläufer der Kreuzzüge sind der aragonesisch–französische Zug gegen das maurische Barbastro in Spanien (1064, Aufruf durch Papst Alexander II) und die Kämpfe gegen die Araber in Sizilien (1059).
Der **erste grosse Kreuzzug** fand um 1096 bis 1099 mit Ziel Jerusalem statt (Kreuzzugsaufruf von Papst Urbans II. auf der Synode von Clermont, 1095).
Nach dem 1. Kreuzzug kam es zwecks Sicherung der Pilgerrouten und der Errichtung einer Infrastruktur (Spitäler, Geldwechselstellen) zur Bildung von Ritterorden.

Hier eine Kurzübersicht über die grössten Ritterorden:
(1) **Ritterorden der Johanniter oder Hospitaliter** (auch Orden vom Spital des heiligen Johannes zu Jerusalem), Gründung 1099. Ein Teil ist seit 1538 eine protestantische Ordensgemeinschaft.
(2) **Malteserorden**: Johanniter, seit 1530 in Malta niedergelassen, dort vertrieben durch Napoleon.
(3) **Templerorden** (auch die Templer, Tempelritter oder wegen dem Sitz auf dem Tempelberg in Jerusalem auch Tempelherren genannt) ca. 1118 - ca. 1312, nach dem Johanniterorden der zweite geistliche Ritterorden. Gegründet und getragen vor allem durch den französischen Mittel– und Hochadel.
(4) **Deutschritterorden**, Gründung 1190. Bekannt vor allem durch die Ostkolonisation.

Eine Bemerkung zum heutigen **„Kuriosum Malteserorden“**: Der „souveräne Ritter– und Hospitalorden vom Hl. Johannes zu Jerusalem, genannt von Rhodos und genannt von Malta“ ist die in Kontinuität aus dem ursprünglichen Hospitalorden oder Johanniterorden (Ritterorden) herausgewachsene systemtreue Fortsetzung dieser Ordensgemeinschaft. Völkerrechtlich wird der Orden international in der Regel anerkannt als ein souveränes, nicht gemeinstaatliches Völkerrechtssubjekt, d.h. als ein Staat ohne Territorium. — Daraus erwächst eine gegenwartsbezogene **Frage**: Könnte man in dieser real existierenden Regelung nicht ein fruchtbar zu machendes Vorbild sehen für konfliktträchtige andere, in der Dimension verwandte Konstellationen wie z.B. die des Vajrayana-Buddhismus? Eine Diskussion dieses Problems auch nur in seinen Wurzeln übersteigt jedoch den thematischen Rahmen dieser Materialsammlung. Sie mag daher anderswo stattfinden und helfen, real existierende Zwangsvorstellungen zu entkrampfen.

Interessant ist die **Verflechtung der Templer mit der Entstehung der Gotik**. Angeblich entstand die Gotik aus dem Zusammenfliessen des burgundischen Spitzbogens (Beispiel Zisterzienserbogen und dazu die Proportionenlehre der Zisterzienser in Cluny, Vorläufer dazu die westgotischen Bogen in Spanien u.s.w.) mit dem normannischen Kreuzrippengewölbe (Beispiel: St–Étienne in Caen, Gewölbe ab 1120), manchmal auch als umgekehrtes Normannenschiff bezeichnet. Die Entstehung der Gotik wird von vielen in der Île–de–France (Gegend um Paris) sowie der Normandie ab 1140 gesehen.

Zu den **Templern**: Diese hatten in Europa einen sehr mächtigen Vorläufer des Bankenwesens (Komtureien) aufgebaut und verfügten daher über Kapital, Infrastruktur und Exteritorialität, mit dem alleine vermutlich eine Finanzierung und einer Großorganisation der damals beginnenden Kathedralenbauten überall in Europa denkbar ist. Bezüglich Architektur wurden damals junge Männter in Cîtaux (Zisterzienser) in die Lehre von Maß, Zahl und Gewicht eingeführt und dann nach Jerusalem zu den Templern geschickt, um zu „Compagnons du Devoir“ (d.h. zu Gesellen) ausgebildet zu werden. Es ging hier höchstwahrscheinlich auch um den Aufbau des salomonischen Tempels und um den Bezug der äusseren Architekturgesetze zu den inneren moralischen Gesetzen. Der Tempelbau wurde als Unterfangen wahrgenommen, die Trennung vom geistigen Ursprung des Menschen zu überwinden. So wird im alten Testament erzählt, dass der in der Arche Noah eingeschlossene Mensch ganz von den grossen „architektonischen Gesetzen“ des Universums erfüllt war, was Sehnsüchte in den späteren Generationen erzeugt hat.
Am 22. März 1312 wurde dann die Auflösung des Ordens durch Papst Clemens V. auf dem Konzil von Vienne (Frankreich) verkündigt und am 18. März 1314 der letzter Grossmeister (Jacques de Molay) in Paris auf Betreiben des französischen Königs Philippe IV (der Schöne) und mit der Duldung des Geschehens durch Papst Clemens V auf dem Scheiterhaufen verbrannt. Wieso?
Die Könige Europas betrachteten die übernational organisierten päpstlichen Orden zunehmend mit Misstrauen, besonders den der Templer. Denn dieser Mönchsritterorden besass das größte stehende und auch das im Kampf erfahrenste Heer. Zudem verstanden es die Templer im Gegensatz zu den andern Ritterorden, sich grosse eigene territoriale Herrschaftsbereiche in Europa bis Vorderasien zu sichern. Weiter haben die Templer den Antrag des französischen Königs Philipps IV auf Mitgliedschaft abgelehnt, was dieser als Schmach empfunden haben muss. Außerdem empfahlen nach dem Fall von Outremer (Levante, d.h. vorderer Orient), insbesondere dabei Jerusalem, mehrere Gelehrte dem französischen König in vertraulichen Berichten einen neuen Kreuzzug. Einen Teil des Geldes sollte sich der König durch Vernichtung und Beschlagnahmung der Templergüter besorgen. Philipp IV. war hoch verschuldet, unter anderem auch bei den Templern. So betrieb der für viele heute so gesehene ruhmlose und verachtenswerte Philippe auf äusserst hinterlistige Art die leibliche Liquidation der Führung der Templer. An einen Kreuzzug dachte er hingegen nicht. (Die Sache ist gerade heute interessant geworden, da der Vatikan die Akten geöffnet hat.) Weiter ist es naheliegend, dass die gut organisierten Ritterorden technisches und architektonisches Wissen nach Europa brachten. Darüber sind bekanntlich auch einige Legenden wie auch denkwürdige Schauergeschichten im Umlauf.

Als Beispiel einer Kathedrale: Laon in der picardischen Ebene (im Norden Frankreichs). Laon, das gallische Laudunum, war ein vorrömischer Kultort und diente später den karolinischen Königen als Hauptstadt. Es beherbergte eine der alten berühmten philosophischen oder theologischen Schulen (analog z.B. Chartres), wo die artes liberales (die freien Künste) gelehrt worden sind. Auch war es der Bischof von Laon, der das heilige Salböl über den Bischof von Reims hielt, welcher den französischen König salben musste.
In Laon kamen ab 1134 die Templer in die Stadt. Der gotische Kathedralenbau begann dann 1155, ungefähr nach den Massen der Arche ($l \times b \times h = 300 \times 50 \times 30\ Ellen^3$). Laon wurden eine Musterbaustelle, Bauzeit bis 1235. Im Mittelschiff ist noch der quadratische Hauptmaßstein sichtbar. Interessant ist, dass die französischen Kathedralen in der Regel Marienkirchen sind und dass ihre Standorte zusammen das Sternbild der Jungfrau bilden (die Krönungsstadt Reims z.B. als Kopf). Nach der Vernichtung der Templer in Frankreich flohen die Compagnons vermutlich an andere Orte, z.B. auch ins römische Kaiserreich, wo an den berühmten gotischen Orten die Kathedralen bereits begonnen worden oder auch

schon beendet waren und nur noch ausgeschmückt werden mussten.

Renaissance: Das Reich ist wieder organisiert, die Kultur sprüht auf andere Kontinente über, in Westeuropa (Spanien) werden die Muslime besiegt. In Osteuropa aber fällt 1453 Konstantinopel (Byzanz), nach der Schwächung durch einen Kreuzzug und das lateinische Keiserreich, an die Muslime: Die Orthodoxie ist besiegt. Griechische Gelehrte wandern nach Italien. Der Kontakt mit der Antike wird intensiviert und neue Techniken entstehen. Wir erleben eine Rückbesinnung auf die Antike und ihre Kust. Anfbruch zu neuem Wissen (erste grosse Entdeckungen wie Buchdruck, Schwarzpulver (Kanonen!), Verbreitung antiker Schriften, Verbreitung von Universtitäten, private Gelehrsamkeit). Der Mensch rückt wieder ins Zentrum, ja er ist sogar formgebend. Grössere, jedoch gut gegliederte, organisierte Bauten, antike Ideale, zentrale Ideen; nicht nur staatliche, sondern auch private, bürgerliche Macht. Die sakralen Bauten streben nicht mehr derart in die Höhe. Sie machen eher den Eindruck einer Behausung des Menschen, wenn auch teils einer grossen, mächtigen. Die ehemaligen Wanderhöfe sind auch weitgehend sesshaft geworden, oft in Städten. Palastbauten zeigen die Macht der neuen Reichen auch profan in grosser Gewalt. (1468 Buchdruck durch Gutenberg, ca. 1519 Luthers Reformation...)

Barock: Die Reichsidee tritt zurück. Einzelne Königreiche sind mächtig. Es geht in Richtung Nationalstaat. Die theoretischen Wissenschaften und das Weltbild entwickeln sich erstmals über die Antike hinaus und werden auch von ihr z.T. unabhängig. (Galilei, Kepler $\rightsquigarrow$ Keplersche Gesetze). Erstmals werden neue Himmelskörper entdeckt (Galilei, Jupitermonde). In der Architektur wird neben dem Kreis die Ellipse wichtig. In einzelnen Königreichen wird auch die Architektur sehr mächtig — Barockschlösser sind riesenhaft, machtstrotzend und auch von den Stadtschlössern unabhängig. Die alten Formen beginnen sich aufzulösen, der Kreis wird geöffnet, analog zum Vorgang im Weltbild.

Die Neuordnung der Welt als Einschnitt: Aufklärung, siegreiche Revolutionen, neue Ordnung.
Die Aufklärung und deren Folgepochen mit ihren neuen Staatsphilosophien führen teils zu einer Abschaffung der alten Ständeordnung (nach und nach auch der Leibeigenschaft und der Sklaverei — abgesehen von Überbleibseln: Kasten in den Armeen, in den Religionen, in den Bildungssystemen). Resultat ist eine politische Neugestaltung. 1776 USA: Unabhängigkeitserklärung, Menschenrechtserklärung (Leben, Freiheit, Eigentum resp. Streben nach Glück), 1789 Frankreich (Freiheit, Gleichheit, Brüderlichkeit), Widerstandsform „aufgeklärter Absolutismus“ in Preussen, k.o.k.–Monarchie u.s.w. (vorerst religiöse Toleranz, teils Humanität, teils Kosmopolitismus). Die alten festen ständischen, weltanschaulichen, politischen und religiösen Schranken fallen. Doch die neue Ordnung endet zum Teil in der Perversion und im Chaos. Eine tragbare Form muss erst erlitten werden. Zuviele Hitzköpfe und festgefahrene Wenigdenker halten ihre Vernunft für die grösst mögliche. Freiheit und Toleranz sind Möglichkeiten, aber keine Sicherheiten, sind nicht unbedingt mehr materielles Wohlergehen.
Auch in den bildenden Künsten hat das Geschehen seine Entsprechung: Die alten Werte und die alte Ordnung aus dem Erbe Roms und der Griechen muss dem Neuen Platz machen. Oft ist es aber das Chaos und nicht eine auf geistigen Fundamenten ruhende neue Ordnung, das der alten Ordnung weicht. (Freiheit wird als Hofnarrentum interpretiert.)

Klassizismus, Romantik, Jugendstil u.s.w.: Die Reichsidee ist in ihrer alten Form begraben. Einzelne Reiche sind mächtig. Der Nationalstaat tritt stärker hervor. Aussereuropäische Einflüsse treten verstärkt auf. Die theoretischen Wissenschaften und das Weltbild geraten in Bewegung. Als Konsequenz der Theorien von Newton, Leibniz und anderen wird die Physik mechanistisch, repetitiv. Langsam entsteht die Chemie, die erst durchaus nur mechanistisch ist. Die Industrie blüht. Mechanische Energie wird verfügbar. In diesem Zuge verschwindet die Sklaverei und die Leibeigenschaft. Die Architektur wird auch eher mechanistisch–repetitiv — oder gar industriell. Im Jugendstil fährt der asiatische Einfluss in die europäische Architektur ein. Die Stilrichtungen beginnen sich jetzt zu trennen oder sind lokal ausgeprägt. Analoges geschieht in den Wissenschaften: Man trennt jetzt Physik, Mathematik u.s.w. in unabhängige Gebiete auf, die sich für sich weiterentwickeln. Die Gesamtsicht geht mehr und mehr

verloren, denn die Stoffmenge ist zu gross.
Interessant ist die Beobachtung, dass sich zwei entgegengesetzte Tendenzen unterscheiden lassen. Da ist einmal die Tendenz zur Auflösung (Einbruch aussereuropäischer Einflüsse, Romantik, Verinnerlichung, Pietismus, Jugendstil, Auflösung der strengen Formen, organische Baustile u.s.w.). Andererseits finden wir die gegenteilige Tendenz: Die Verhärtung und Verkargung oder Übersteigerung (Klassizismus und Neostile, strenge, karge, funktionelle Stile, Ökonomie contra Ästhetik, reine Funktionalität, Kargismus (karge Strenge, Ablehnung von allem Überflüssigen bis zuf Verbissenheit)
Interessant ist auch die experimentelle Beobachtung, wie der Mensch beim Betrachten eines alten, unförmigen und eines neuen, kargen Gebäudes reagiert. Er bleibt oft mit seinen Augen forschend und träumend lange Zeit am Handgeformten hängen, während er das karge strenge Gebäude in wenigen Sekunden erfasst und dann gelangweilt einen anderen Blickfang sucht. Seine Aussagen machen dann deutlich, dass er sich unwohl und kalt fühlt.

Aktuelle Epochen, „Moderne“: Analog dem Individuum ist jetzt der Nationalstaat individuell ausgebildet. Oft halten diese Nationalstaaten ihre Individuuen auch gefangen, so wie die Individuuen ihrerseits ihre Ideen gefangen halten. Im Weltbild wirkend Relativitätstheorie, Quantenphysik und Kosmologie „bewusstseinsverändernd“ oder gar chaotisch. Das Atom wird spaltbar, das Leben auf Erden zerstörbar. Andererseits wird das Leben durch die Genetik machbar, veränderbar. Machbarkeitsglaube und Machbarkeitsgrenzen geraten in Zwist. Entwicklungen stossen an ihre Grenzen. Die Bäume wachsen doch nicht in den Himmel — und falls „doch“, so wirken sie oft zerstörend. Die Suche nach neuen Gemeinsamkeiten beginnt (gemeinsame Menschenrechte, UNO etc.). Eine neue Sorgfalt und Achtung sind gefragt. In der neuen Welt entsteht zudem eine grosse, dirigierende Macht- und Potenzballung, jedoch ohne viel eigene Wurzeln, quasi also entwurzelt. Der ehemalige französische Aussenminister Clemenceau hat dazu spitz bemerkt, diese Macht sei von der Barbarei direkt in die Dekadenz geraten, ohne den Umweg über die Kultur. Sicher ist es jedoch so, dass sie nicht Tradition, Ideale und damit die kulturtragende Kraft aus den Vorbildern und Grössen einer vieltausendjährigen Geschichte schöpfen kann — und daher auch wenig Vorbildliches oder Visionäres weiterzugeben hat, trotz anerkanntem Erfolg bei der Verbreitung der aufklärerischen Ideen. So werden u.a. oft ritterliche Ideale und Tugenden durch Holywood–Helden ersetzt und das geistig billige, verdünnte, dem vereinfachtesten Niveau angeglichene Destillat zum Ergötzen eines zahlenmässig maximierten Publikums über die fernsehende Welt ergossen. Die tiefgründige Kritik der dadurch mitverstrahlen Erziehungswirkung durch den Club of Rome bleibt unbeachtet, denn in einer solchen Welt steht Ethik unabstreitbar im Dienste der Raffgier, also des Lasters und der Verrohung.
Auch in der Architektur „jagen sich die Stile“, sie wirkt als Ganzes oft chaotisch, verflacht, den Menschen bedrohend, zertretend, ausgrenzend, verachtend, begrenzend durch die Schiene der geraden Linie oder die flache Wand. Ihre Gemeinsamkeit ist häufig die Andersartigkeit, das sich Abmühen nach „Originalität“ — und in letzter Konsequenz dann die Gefangenheit in den eigenen Ideen, in einer gewissen Sicht erfahrbar als Ideenlosigkeit — und manchmal somit wieder nur der Ausdruck von Gewalt, so erzeugend die Gegengewalt, z.B. die angezündeten Autos in den Vorstädten im Elsass.
Wie drückt sich da die Suche nach neuen Gemeinsamkeiten aus? Sind solche Gemeinsamkeiten über dem untersten, lebenserhaltenden Niveau im heutigen Kampf der Weltbilder überhaupt noch möglich, wenn jeder sein eigenes Weltbild für das richtige und einzig mögliche hält und auf alles Fremde nur mit Angriff reagiert?

Kapitel 4

Die Kunstfrage — und vom Nutzen der Mathematik für den Architekten

4.1 Bemerkung zum Gebrauch des Begriffs „Kunst “

4.1.1 Zum Historischen Wachstum des Begriffs

Um in der Frage, was Kunst den sei, eine vorläufige Anwort zu finden, wählen wir die in gewissen philosophischen Schulen oft übliche **Mehode der Einkreisung**. Das Wort Kunst und seine Bedeutung in all seinen Aspekten oder Dimensionen sollen eingekreist werden. Dazu stellen wir Fragen: Die Frage nach der Herkunft des Wortes, die Frage nach der heute realen oder wirtschaftlichen Bedeutung, nach der Geschichte der Bedeutung, der kullturellen Bedeutung u.s.w., alles Fragen nach uns wichtigen Aspekten.

Befragen wir zuerst die heute reale oder wirtschaftliche Bedeutung. Kunst demnach ist also, was als solche über den Ladentisch geht und seinen „Preis wert ist“. „Preiswert“ geht hier also der Kunst voraus. Hoher Preis — hohe Kunst, tiefer Preis — schlechte Kunst. Steigen plötzlich die Preise, weil z.B. der Künstler gestorben ist, so wird damit die Kunst höher und damit besser. Kunst ist das, was den Markt befriedigt, was gekauft wird, was unter dem Label Kunst verkaufbar ist und was die dafür eigens ausgebildeten „Wissenschaftler“ per Gutachten oder Attest als Kust deklarieren. „Mamon–Kunst“ schimpfen die einen. „Nichts für arme Schlucker“ frohlocken die andern. Der Graben bleibt offen. Es ist der soziale Graben zwischen den Besitzverhältnissen, bezifferbar durch die wirtschaftliche Potenz. Belegbar gewachsen aus den Gräben zwischen Klerus, Adel, Bürgertum und dem vierten Stand des vorrevolutionären Europas, nachdem die Geldwerte die religiösen Werte in ihrer Funktion als Machtbasis abgelöst hatten ... Darüber liessen sich Bände schreiben, wozu hier der Raum nicht reicht.

Als nächstes befragen wir die Meinung der Gesellschaft. Rasch wird offenkundig, dass hier gruppenabhängig diverse Meinungen vorherrschen. Das reicht zwischen vorbehaltlosem Beifall als Ausdruck der Freude an Schmuck, Spiel, Unterhaltung u.s.w. bis zur totalen Ablehnung, wenn z.B. Kust als Chaos statt Kosmos, als Zufall statt Ordnung wahrgenommen wird. Kunst ist „an die Wand scheissen“. Wenn's kleben bleibt ist's Kunst. Wenn's runter läuft war's Scheisse. — Oder: „Waschmaschine im Walde entsorgt!“— Etwa unterschrieben? — Ja dann ist's Kunst!

Wenn wir die **Etymologie** des Wortes Kunst befragen, so stellen wir rasch fest, dass der damit verbundene Begriff wohl mit „können“ zu tun hat. Das nützt uns herzlich wenig, denn ein Können kann heute mit Recht jeder in einem Beruf, einem Haushalt tätige Mensch oder gar auch jeder als Lebenskünstler tätige Clochard, Stadtstreicher oder Pennbruder für sich in Anspruch nehmen, denn schliesslich schafft er es in einer beliebig widerlichen Situation zu überleben und beweist damit ein sehr

grosses Können.

Kunst hat aber einen wertenden dualistischen Aspekt, denn durch Kunst wird die Welt der Erzeugnisse des Menschen eingeteilt in solche, die das Prädikat Kunst verdienen und solche, die es eben nicht verdienen. Die Ironie: In der demokratischen Schweiz müsste man über die Grenzen von Kunst streng genommen durch eine Volksabstimmung entscheiden, und auch darüber, ob Kunst kommunal, kantonal oder von Bundes wegen sein sollt... Von „Halbkunst“ zu reden ist nicht üblich. Das wird rasch klar, wenn wir versuchen, ein **Begriffsfeld** auszuloten. Damit kommt der Verdacht auf, dass es sich vielleicht bei Kunst heute nicht mehr nur um einen Begriff, sondern mutmasslich um eine Chiffer im Sinne von Jaspers handelt. Bevor wir aber weiter darüber nachdenken, wollen wir die offenliegende **Begriffsgeschichte** bis zur Neuzeit befragen.

Auf Seite 132 ist erwähnt worden: „Schon Aristoteles nennt Mathematik als eine der theoretischen Wissenschaften. Im Mittelalter dann, in der Scholastik war sie ein wesentlicher Bestandteil der sieben "artes liberales" (nach dem spätantiken oder auch frühmittelalterlichen Boethius) welche sind: Geometrie, Arithmetik, Astronomie, Harmonielehre, sowie auf sprachlicher Seite Rhetorik, Grammatik und Dialektik. Im Gegensatz dazu stehen die "artes mechanicae"[8].“

Kunst war also schon in der Antike keine Unbekannte. Auch haben wir auf Seite 13 erfahren, dass die Kunst sogar einen Gott hatte: Apollo nämlich, Hauptgott der Pythagoräer, verehrt vor allem in Delphi, Gott des Lichtes, auch der Erkenntnis, der Künste, der Musik. Gott der Säufer, der willentlich Umnachteten, der Schwärmer dagegen war eher Dionysos und damit eben nicht Apollo — trotz Fritz Nietzsche...

Wichtig ist es zu wissen, dass der Begriff „**Kunst**“ als Übersetzung des lateinischen Ausdrucks „**Ars, artis**“ in der lateingebildeten, vor Jahren (bis heute noch) existierenden Gelehrtenwelt in folgenden Bedeutungen in Gebrauch war:

1. **Subjektivisch:**
   (a) Das **Können**, angeborene oder erworbene Geschicklichkeit, Gewandtheit, Tüchtigkeit im Hervorbringen mechanischer oder geistiger Werte.
   (b) Gute oder schlechte **Eigenschaft**, Tugend oder Untugend, Gewohnheit, Denk- und Handlungsweise, Bestrebung, Grundsatz, oft Verhalten, Verfahren, Art und Weise, Mittel, Wege. Insbesondere Kunstgriff, Künstelei, künstliches Mittel, List, Betrug oder Ränke, z.B. Kunstmittel der Buhlerei, Kriegslist. Oder ungekünstelt im Sinne von echt.
2. **Objektiv:**
   (a) **Niedere Kunst:** Handwerk, Gewerbe (artes illiberales oder sordidae, vulgare,...) wie Zimmerhandwerk, Baukunst, auch Handwerkszeug, Kunshandwerk.
   (b) **Schöne** oder **perfekte Kunst**, auch „schöne Künste und Wissenschaften“ (z.B. Musik, Poesie, Philosophie, Beredsamkeit, Geschichte u.s.w.), bekannt auch unter den Bezeichnungen „artes liberales, ingenuae, bonae, optimae, elegantes, humanitatis, quae ad humanitatem pertinent,...“ u.a..
3. **Metonymisch** (im Sinne von „Vertauschung bedeutungsverwandter Begriffe“):
   (a) Kunstwerk.

[8] Heutige Künstler galten vor Beethovens Zeit noch als gewöhnliche Handwerker, die Artes mechanicae ausübten. Sie waren oft nicht einmal selbständig in Zünften organisiert. So waren zu Michelangelos Zeiten in Florenz die Bildhauer bei den Goldschmieden zünftig, die Maler bei den Ärzten und Apothekern. Später wandelten sich die Höfe und auch die Künstler. Die Hofnarren verschwanden — die Rolle musste neu besetzt werden...

(b) Kunstwert.

(c) Musen, Kunstgöttinnen.

(d) Eine einzelne Wissenschaft oder schöne Kunst (jedoch nicht etwa immer Wissenschaft im Sinne des modernen Sprachgebrauchs. . .)

Kann man daher also wirklich behaupten, dass es richtig ist, wenn jemand glaubhaft machen will: „Kunst ist oder entsteht dann, wenn da eine oder einer keine Fähigkeiten und keine Ideen mehr hat, jedoch dennoch zu Geld kommen will und in der Folge jeden Schrott als das höchste Gut zu noch höheren Preisen mit Erfolg anbietet“? — Natürlich ja! — Kriegslist ist eben auch schon immer „Kunst“ gewesen. . .

Weiter könnten wir auch die Frage nach dem Lebendige stellen: Kunst ist, was zu Leben erweckt werden konnte, dasjenige, dem eine Seele eingehaucht worden ist, dasjenige, das den Geist weitergibt. . . Wir denken an Holbein, Michelangelo — oder auch Literatur. . .

Oder die Frage nach der Freude: Kunst ist, was Freude bereitet, was erhebt, über das Niveau des alltäglichen. . . Zwischen Musik und Rausch?. . .

Oder wir stellen die Frage mit Josef Beuys: Was wirkt heute verändernd zum Guten und darf daher Kunst sein? — Höchste Kust ist damit soziale Kunst. Nicht Kunstgegenstand also, sondern dasjenige, das bessere soziale Vehältnisse schafft. . .
Sind die Politiker heute also die Künstler — oder haben sich welche nur selbst an den Pranger gestellt als grosse Krieger oder grosse Rosinenpicker, als Filzbündler, als Bettler der oberen Klasse — und die Künstler fände man daher unter Leuten wie Mutter Theresa oder Martin Luther King? Politiker als Künstler müssten einer guten Sache im Sinne des langfristigen allgemeinen gemeinsamen Wohls dienen und nicht dem einsamen Ego auf der Grundlage einer Position. . .
In diesem Spannungsfelt stellt sich dann auch die Frage: Und wo bleibt hier die Architektur? — Wie kann sie sozial positiv förderlich wirken? Was wäre also als Hauptsache zu tun? Ein „Eid des Archimedes“, des Vitruv, des Aristoteles oder des Platon — oder der Baufirma Baggerzahn? Mit welcher Begründung, auf welchem geistigen Fundament? Ja und überhaupt: Aus welchen geistigen Fundamenten schöpft sie eigentlich, die Architektur? Schöpft sie statt aus Fundamenten etwa nur — auch nur — aus Kassen?

4.1.2 Zu den raum–zeitlichen Dimensionen der schönen Künste

Sehr interessant ist die Entdeckung, dass sich die „schönen“ Künste nach den raum–zeitlichen Dimensionen ordnen lassen. Aus dieser Ordnung fliesst dann auch eine Berechtigung der einzelnen Typen. Ihre Unersetzbarkeit und Einzigartigleit wird dadurch offenbar.

Dimension	Kunstrichtung	Lokalisation
1	Musik, Dichtkunst, Lyrik, Poesie	Zeit
2	Malerei, Photographie	Fläche im Raum
3	Bildhauerei, Architektur als Kunst	Raum
3	Film	Zeit und Fläche im Raum
4	Theater, Oper,. . .	Zeit und Raum

Damit lässt sich verstehen, dass das Theater nie vom Film abgelöst werden kann. Schon der Dimension wegen, ohne den Inhalt überhaupt in Betracht zu ziehen.

4.1.3 Parallelen zur Schönheit in der Philosophie

Dass in unserer Kulturgeschichte das „Schöne“ immer wieder ganz besonders im Zentrum der als solche begriffenen Kunst gestanden hat, lässt sich kaum bestreiten. Denn wer würde sich schon für das Unschöne, das Hässliche interessieren? Wer würde dem Banalen, nicht zur erhabenen Ergriffenheit

Führenden Wert beimessen? Daher lohnt sich sicherlich der Versuch, die für das Schöne geltenden Begriffsschattierungen auf die Kunst zu übertragen. Das nachfolgende Schema steht auf der Grundlage eines Werks von Hauskeller (Grsg. (Bib.: W1). (Hier folgen wir einem darauf beruhenden Schema aus einem Vortrag von Dr. R. Göschke über das Schöne.)

Pythagoras (580-500/ ? 570-496) und Pythagoräer: Alles ist Zahl, es zählt die Harmonie. Pythagoräer sind da Objektivisten. Die heute als das verstandene Kunst ist in diesem Sinne somit objektiv.

Sophisten und Protagoras(484-415): Der Mensch ist das Mass aller Dinge. Sophisten sind hier Subjektivisten. Die heute als das verstandene Kunst ist hier somit in diesem Sinne subjektiv.

Sokrates (469-399): Zweckmässigkeit ist wichtig. Kunst könnte daher nicht ohne das Zweckmässige sein.

Platon (427-347): Idee des Schönen wird aktuell. Platon ist Transzendentalist. Kunst transzendiert wird damit aktuell.

Aristoteles (384-322): Wichtig werden Ordnung, Eignung, moralischer Nutzen. Heute als solches verstandene Kunst erreicht hier die Dimension des moralisch Nützlichen.

Plotin (203-269): Für Schönheit wichtig ist die Bewältigung des Stoffes durch Form. Kunst ist in diesem Zusammenhang mit Form verbunden.

Augustin (354-430): Schönheit wird nicht durch die Sinne, sondern durch den Intellekt wahrgenommen. Kunst steht daher auf der Basis des Intellektuellen.

Dionysius (ca 500): Schönheit ist verbunden mit dem Schein des Guten — daher ebenso auch die Kunst.

Eriugena (810-877): Schönheit kann verstanden werden als Teilhabe an göttlichem Licht und Farbe – und daher ebenso auch die Kunst.

Thomas von Aquin (1225-1274): Schönheit trägt den Aspekt des Nützlichen, des Gebrauchswerts, der Vollkommenheit, des Guten. — Auf die Kunst fällt der Aspekt des Guten.

M. Ficino (1438-1499): Schönheit kann begriffen werden als das göttliche Licht in den Dingen, dies durch Geist und nicht durch Sinne. Das Bild vom Ding ist schön, nicht das Ding an sich. — Sinngemäs wäre Kunst das Bild vom Ding, nicht das Ding an sich. Nicht Gegenstand sondern Idee.

Während der Renaissance: Hier taucht die Gleichstellung von Kunst und Naturschönheit auf. Kunst ist daher eine spezielle Art von Schönheit.

Niklaus v. Kues (1401-1464): Erkenntnis ist die Begegnung von Intellekt mit Erscheinungswelt. Schönheit wird so Erkenntnis. Kunst daher in diesem Sinne auch: Sie ist Erkenntnis.

Alberti (1404-1472) und Leonardo da Vinci (1452-1519): Schönheit ist sinnliche Qualität, ist Verhältnismässigkeit aller Formen und Farben. Kunst wird so sinnliche Qualität und Verhältnismässigkeit.

N. Boileau (1636-1711): Das Wahre ist schön. Kunst wird so das Wahre, immer Gültige.

J. B. du Bos (1719): Schönheit wird nicht durch Vernunft, sondern Erfahrung (Gefühlserfahrung) erkannt. Kunst hat so den Aspekt von Gefühlserfahrung.

Shaftesbury (1671-1713): Nicht in der Form, sondern im Prozess der Formung durch Wirken des Geistes

liegt das Schöne, also im Wirken des Menschen. Der Mensch ist Künstler aus sich selbst.

Hutcheson (1694-1747): Schönheit ist ohne Bezug auf Gegenstand sowie Nutzen. Schönheit wird instinkiv unmittelbar erkannt. Sie wird modifiziert durch frühere Assoziation. Kunst wird in diesem Sinne instinktiv erkannt und modiviziert durch frühere Assoziation.

G. Berkeley (1685-1753): Schönheit ist vom Zweck abhängig und durch Vernunft oder auch Tugend erkannt. Kunst ist daher an den Zweck gebunden und wird durch Vernunft oder auch Tugend erkannt.

Diderot (1713-1784): Schönheit ist Idee der Beziehungen, ist moralische Wirksamkeit. Kunst hat den Aspekt der moralischen Wirksamkeit.

E. Burke (1729-1797): Das Angenehme ist schön (subjektiviert). Das Angenehme wird so Kunst.

A. G. Baumgarten (1714-1762): Schönheit ist gelungene Erkenntnis im Bereich der Sinnlichkeit, ist ästhetische Wahrheit. Kunst hat den Aspekt von ästhetischer Wahrheit.

Kant (1724-1804): Schönheit ist vom Gefühl des Subjekts von sich selbst abhängig. Daher ist Kunst vom Gefühl des Subjekts von sich selbst abhängig — in der heutigen Sprache auch vom Gefühl von und daher Wissen von sich selbst.

Friederich Schiller (1759-1805): Schönheit ist mit dem Menschlichen gleichzusetzen. Kunst kann daher auch nicht ohne das Menschliche sein.

Schelling (1775-1854): Schönheit wird Wissen um Wahrheit, dem Begriff angemessen, erhaben. Kunst wird so Wissen um Wahrheit.

Hegel (1770-1831): Schönheit kann verstanden werden als das sinnliche Scheinen der Idee. Kunst wird so ebenfalls das sinnliche Scheinen der Idee.

Rosenkranz (1805-1879): Schönheit ist Ausdruck der inneren Freiheit. Kunst wird so ebenfalls Ausdruck innerer Freiheit. So dient Kunst der Befreiung.

Schopenhauer (1788-1860): Schönheit hat zu tun mit ästhetischer Betrachtungsweise. Kunst daher ebenfalls.

Nietzsche (1844-1900): Schönheit kann verstanden werden als Reflex eigener Beschaffenheit, als Bild seiner selbst. Kunst wird so ebenfalls in einem gewissen Sinne zum Bild seiner selbst — ob jetzt dionysisch oder apollinisch.

B. Croce (1866-1952): Schönheit ist Ausdruck, welcher uns anspricht, ist ein Reiz für das Subjekt. Kunst wird daher zum Reiz für das Subjekt — und heute in der Folge dieser Idee manchmal auch, das muss man wohl sagen, zum Überreiz für andere, vielleicht schon blind ins Gegenteil anderer obiger Aspekte verkehrt.

Adorno (1903-1969): Das Schöne ist das Entgleitende, Flüchtige, Unbestimmte. Moderne Naturwissenschaft erhält den Aspekt des Schönen. Auch das Unbestimmte wird so Kunst. Ist moderne Naturwissenschaft daher Kunst? — Den ursprünglichen Ideeen folgt dieser Schluss wohl nicht ohne Gegenargumente. Jedoch sei gemahnt: Beim Überschreiten der Grenzen in einem klippenhaften Gelände, wie es in Anbetracht der Kunst vorliegt, müsste ein Absturz allemal ja keine Überraschung sein.

Merke: Es ist kaum zu bestreiten, dass die Evolution des Kunstbegriffs dem Wechselbad der jeweiligen Zeitgeister derart ausgesetzt war, dass heute im Verständnis des Begriffs viele Gegensätze möglich sind.

Da wir bei uns nicht in einer absolutistischen Zeit leben und wir zu unseren Grundfreiheiten auch die Freiheit eines persönlich gefärbten Begriffsverständnis zählen dürfen, abhängig von persönlichen philosophischen oder gar religiösen Vorlieben oder gar Gebundenheiten, kann uns ein etwaiger „Kunstpapst“ keine Begrifflichkeit aufzwingen. Es steht jedem solchen Papst offen, uns mit guten Ratschlägen zu bedienen. Der Entscheid über Annahme oder Ablehnung solcher Ratschläge kann jedoch aufgrund dieser Rechtssituation nur jedem selbst überlassen bleiben...
Damit wäre dann gesagt, dass Kunst das sei, was einer als Kunst gelten lassen will. Kunst ist heute, so gesehen, für jeden Ausdruck des eigenen Willens seiner Persönlichkeit. Und das kann man auch als gut so gelten lassen, denn sofern Geld vorhanden (womit wir bei den sozialen Klassen wären), kann jede und jeder sich das als Kunst kaufen oder produzieren, was beliebt — sofern Kunst überhaupt käuflich werden kann wie eben käufliche ...— ja, da wäre leider noch dieser Punkt, wo noch nie ein Ende in Sichtweite lag...

Nachstehend sind eineige Zeilen aus Briefen von Rainer Maria Rilke wiedergegeben, welche die Frage „Was ist Kunst“ aus berufener Feder illustrieren mögen (aus den Briefen an den jungen Dichter Kappus):

„Lesen Sie möglichst wenig ästhetisch-kritische Dinge, — es sind entweder Parteiansichten, versteinert und sinnlos geworden in ihrem leblosen Verhärtetsein, oder es sind geschickte Wortspiele, bei denen heute diese Ansicht gewinnt und morgen die entgegengesetzte. Kunst-Werke sind von einer unendlichen Einsamkeit und mit nichts so wenig erreichbar als mit Kritik. Nur Liebe kann sie erfassen und halten und kann gerecht sein gegen sie. — ...“
(Viareggio, 23. April 1903)

„...die meisten Ereignisse sind unsagbar, vollziehen sich in einem Raume, den nie ein Wort betreten hat, und unsagbarer als alle sind die Kunst-Werke, geheimnisvolle Existenzen, deren Leben neben dem unseren, das vergeht, dauert. ...
...Wenn Ihr Alltag Ihnen arm erscheint, klagen Sie ihn nicht an; klagen Sie sich an, sagen Sie sich, dass Sie nicht Dichter genug sind, seine Reichtümer zu rufen; denn für den Schaffenden gibt es keine Armut und keinen gleichgültigen Ort...
...Und wenn Sie selbst in einem Gefängnis wären, dessen Wände keines von den Geräuschen der Welt zu Ihren Sinnen kommen ließen - hätten Sie dann nicht immer noch Ihre Kindheit, diesen köstlichen, königlichen Reichtum, dieses Schatzhaus der Erinnerungen? Wenden Sie dort hin Ihre Aufmerksamkeit.
...
...Ein Kunstwerk ist gut, wenn es aus Notwendigkeit entstand. ...
...Denn der Schaffende muss eine Welt für sich sein und alles in sich finden und in der Natur, an die er sich angeschlossen hat. ...“
(Paris, am 17. Februar 1902)

Dem entgegen begegnet uns bei Josef Beuys eine ganz andere Position: „Alles ist Kunst!“ und „Jeder ist ein Künstler...“ (Man orientiere sich dazu in den „Werkstattgesprächen“ von Josef Beuys.)

Um nicht einer sektenhaften Position (Besitz der Wahrheit und Verteufelung der Gegenposition und damit Anhaftung an die Intolleranz) zu verfallen, kann man sich die Frage stellen, welche der vielen Ansichten über Kunst einem selbst auf seinem eigenen Wege weiterbringt. Diese Position wäre dann für einem selbst als betroffenen Suchenden das vorteilhafteste Werkzeug, in Respekt vor allen anderen Positionen.

4.2 Zu den 7 Aspekten der Mathematik

Mathematik zeigt sich im Gebrauch quer durch die Gesellschaften, Wissenschaften, Zeiten, Strömungen, Geistesghaltungen u.s.w. in einer *siebenfachen Bedeutung*. Über jede dieser Bedeutungen liesse sich sehr viel sagen, und man könnte in jedem Falle darüber dicke Bücher schreiben, vorausgesetzt, der Tätigkeit als Schreiber ist ein gründliches Studium vorausgegangen. Diese sieben Bedeutungen oder Aspekte sind:

1. Mathematik ist eine **Wissenschaft** an sich, die mathematische oder ideelle Objekte untersucht. Sie benützt vor allem die deduktive Mehtode, im Gegensatz zu den induktiv vorgehenden Naturwissenschaften. Sie ist daher eine „reine Geisteswissenschaft“.

2. Mathematik ist **Grundlage** der exakten Wissenschaften und daher mitverantwortlich für deren Erfolge. (Astronomie, Physik in allen Ausprägungen, Informatik, Teile von Chemie, Bio- und Ökowissenschaften, Informatik, Ingenieurwissenschaften und Technik, Ökonomie, Finanzwissenschaften, Statistik und damit Psychologie, Soziologie u.s.w..)

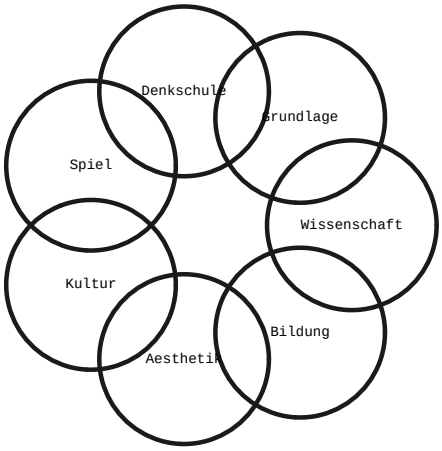
3. Mathematik ist **Denkschule**. Nirgends kann das streng logische Denken so eingehend geübt und damit die Vernetzungen im eigenen Gehirn in dieser Disziplin so ausgeprägt vorangebracht werden wie in der Mathematik.

4. Mathematik ist **Kultur**. Angefangen bei den Feldmessern im alten Ägypten oder bei den „Artes liberales“ fand sie den Weg ins Gymnasium und via Adam Riese und damit bürgerliches Rechnen auch den Weg in die Volksschule sowie die Berufsschulen. In der Vergangenheit offenbarte sie sich der Welt aber auch durch die Religionen und Weltbilder in den Künsten oder durch die Bauformen.

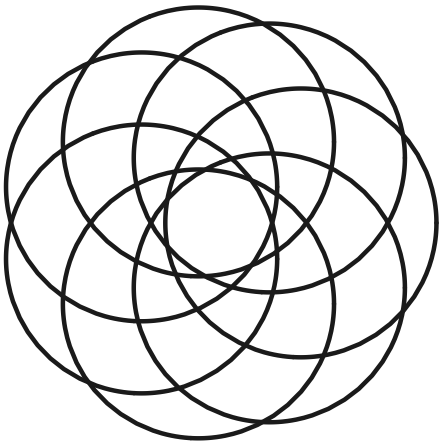
5. Mathematik kann auch **Spiel** sein. Es kommen einem jetzt sofort Spiele in den Sinn, in denen es um Wahrscheinlichkeiten, Kombinatorik, Gewinn–Strategien u.s.w. geht. Solche Spiele wiederum kann man mit gutem Gewissen als „mathematisch“ bezeichnen. Man denke z.B. an das Schachspiel.

6. Mathematik ist auch **Ästhetik**. Denn Mathematik besitzt eine innere Schönheit, die nur dem Vollkommenen zukommt. So werden mathematische Theorien oft nach äesthetischen Gesichtspunkten präsentiert: Relevanz, Leichtigkeit der Kürze durch Freiheit von Ballast und Prägnanz sind Ideale sowie Forderungen, denen seit Euklid (und vielleicht schon früher) nachgelebt wird. Abgesehen davon fand die Mathematik immer wieder in sehr ausgeprägter Weise Eingang in die Künste und wird dort sichtbar — jedoch nur für denjenigen, der es erreicht hat sie zu verstehen.

7. Mathematik gehört zur **Bildung**. D.h. Mathematik gehört zu dem, was die Allgemeinheit bilden sollte und dem auf dem Weg zu eben dieser Bildung nachzustreben wäre auf der Grundlage der tradierten Bildungsideale der Antike, des Mittelalters und der Neuzeit. Diese Ideale finden ihren Ausdruck im Ringen nach Verständnis von dem was ist – oder von dem was als wichtig erachtet worden ist und als wichtig erachtet wird, weil man sich sonst betroht sehen müsste — oder weil man sonst weniger „Mensch“ wäre. Das Problem ist hier seit jeher das gleiche geblieben: Bildung kann nicht allgemein für eine erfahrungsermangelnde Situation *beschrieben* werden. Bildung kann nur *errungen* werden, den auch sie wächst auf dem Boden einer zu erwerbenden Begrifflichkeit durch ein langes Studium mit dem Ziel des Verstehens.
   Bildung ist also das Resultat eines Entwicklungsprozesses, der bedingt ist durch das historische Werden und das momentane Vorfinden unserer Situation. Und diese unsere Situation und die Situation der Welt präsentiert sich eben so wie sie ist — und nicht anders. Sinnvoll und ohne böse Überraschungen veränderbar wäre diese Situation wohl nur aus einem Verständnis heraus, also von der Warte der Bildung aus und nicht aus der Sichtweise der blossen Ignoranz oder eigennütziger Ziele.



... So? ...



... Oder so? ...

4.3 Mathematik: Grundlage und Bedingung von Architektur und Technik

4.3.1 Kausale und finale Situation

Seit Descartes, Newton, Leibniz und anderen Denkern des Barockzeitalters arbeitet die Physik im weitesten Sinne mit mathematischen Modellen. Solche Modelle beschreiben Naturbeziehungen in der Sprache der Mathematik, welche durch das Experiment innerhalb der Genauigkeit der Messungen als gültig zu erweisen sind. Auf dieser modellhaften Beschreibung der Natur fusst die angewandte Technik mit dem Ziel, dem Menschen das Leben angenehmer zu machen, was oft nur vordergründig gelingt. Die Problematik dieser Situation hat J.W. v. Goethe in seinem Zauberlehrling geschildert und damit die Kehrseite des Medaillons gezeigt. Doch es führt kein Weg der Technik an der Physik und damit an der Mathematik vorbei. Das ist die kausale Situation. Mathematik ist **Grund und Bedingung zur Möglichkeit von Technik und Architektur**.

Auf der andern Seite erkennen wir eine nicht minder wichtige finale Sitation: Technik und Architektur existieren nicht unabhängig vom Leben von Menschen in einer sozialen Form, einer Gesellschaft. Eine Gesellschaft stellt aber fast immer existenzsichernde Bedingungen, denn darüber wachen heute anerkannte Menschenrechte, Staatsverfassungen und Gesetze. Im täglichen Leben der heutigen Hochkulturen sind so im Zusammenhag von technischen Produkten irgendwelcher Art, zu denen wir auch die Erzeugnissen von Architekten rechnen müssen, immer zwei Ziele zentral: Ein Produkt nuss sicher sein und es muss auch effizient sein. Der Zweck von technischer oder architektonischer Entwicklung ist daher immer auch die **Sicherheit und die Effizienz**. Das ist so, ob es sich hier um Brücken, Elektromotoren, Heizungen, Medikamente, Turngeräte oder Bahnhöfe handelt. Fällt die Sicherheit weg, so stehen Leib und Leben von Menschen in Gefahr. Fällt die Effizienz weg, so fühlt man sich betrogen. Nicht zuletzt weil ausser beim Spiel und beim Vergnügen niemand das so oft sauer erarbeitete Geld gerne für Dinge ausgeben will, die im Vergleich zu ähnlich teuren Produkten viel schlechter gemacht sind und der Gesellschaft wie z.B. im Bereich des Gesundheitswesens noch administrativen Aufwand und damit hohe Kosten bescheren.

Sicherheit wird aber in der Technik meist durch exakte Berechnungen garantiert, auch in Form von mathematisch ausgeklügelten Statistiken. Man denke z.B. an die Tragfähigkeit einer Brücke, was ja jeder versteht. Sicherheit beruht daher zu einem wesentlichen Teil auf Mathematik. Wenn daher z.B. ein Architekt nichts von Mathematik versteht bzw. verstehen will, so braucht er für viele Details zwingen Ingenieure, die ihm die Berechnungen machen. Das verteuert unnötig den Bau und ist daher eigentlich

eine Zumutung für den Kunden.
Ebenso verhält es sich bei der Effizienz. Denn diese wird sehr häufig durch Optimierungen erreicht, welche auf mathematischen Methoden beruhen. Sei das nun im Management, bei linearen Optimierungen u.s.w.. Die Praxis zeigt nun, dass es bei der Weitervergabe von Arbeiten an fachkompetente Ingenieure bei der Effizienz nicht so gut bestellt ist wie bei der Sicherheit. Wenn z.B. ein Architekt es unterlässt, mathematische Methoden zu studieren und anzuwenden oder diese Arbeit einzukaufen, so kann er das Optimum aus der Sache höchstens noch mit Hilfe des Zufalls herausholen. Er kümmert sich daher nicht um die Ansprüche der Kunden auf einen fairen Preis für ein gutes Produkt. Er veruntreut also das Geld des Kunden, er betrügt ihn um die mögliche Qualität. Das wird aus verständlichen Gründen oft als in hohem Masse liederlich angesehen. Es endet auch in manchen Fällen schliesslich vor dem Richter, was schon gewissen Banken veranlasst hat, bei der Baukreditvergabe auch gleich einen Vertrag mit einem Advokaten zu verlangen. Ein vorausgehendes Qualitätsbewusstsein, vor allem bei einer bewussten Wahl der Ausbildungsschwerpunkte nicht nur aus dem Bauche heraus, könnte mithelfen, das immer wieder angeschlagene Ansehen einer ganzen Berufsgruppe hier auf eine Vertrauensbasis umzustellen.

Speziell betreffend Effizienz ist in der Architektur die **Inspiration** zentral. Inspiration bezieht sich jedoch auf einen die Effizienz übersteigenden Bereich. Inspiration greift in die nicht messbare Gefühlssphäre. Und Inspiration ist zweifellos eine Anforderung an einen Architekten bei Gestaltungsfragen — oder auch an einen Ingenieur. Hier wird nun die Schulung des Umgangs der Architekten mit mathematischen abstrakten und geometrisch konkreten Strukturen wichtig. Denn Inspiration hängt oft an der Kombination von in verschiedenen Schichten des Bewusstseins gespeicherten Mustern. Die Speicherung geschieht bei der Beschäftigung mit Geometrie — oder allgemeiner mit Mathematik. Z.B. die polaren Formen der platonischen Körper oder deren Sternformen kann man nicht im Gestaltungs– oder Kunstunterricht verankern, denn dazu ist mathematische Fachkompetenz notwendig.

Bedenke:

Konstruktion auf der Grundlage physikalischer Gesetze, Sicherheit, Effizienz und Intuition beruhen auf Mathematik. Das gilt speziell auch für den Bereich der Ingenieure und Architekten. Wer die Mathematik vernachlässigt, der kümmert sich nicht im möglichen Masse um Konstruktion, Sicherheit, Effizienz und Intuition.

4.3.2 Raum zwischen Mathematik und Architektur

„Raum“ ist ein zentrales Thema der Architektur im ganz konkreten Sinne. Andererseits steht das Anliegen der Erfassung des Raumes an der Wiege der Geometrie, Geometrie als zentraler Teil der Mathematik. Seit weit über 2000 Jahren ist so der Raum bezeugt als wesentliches Thema der Mathematik, welche sich anschickt, dieses Thema sowohl im anschaulichen Verständnis wie auch theoretisch exakt zu erfassen, zu verstehen, zu studieren, dafür Aufwand zu betreiben. Wie soll nun Raumgestaltung und Raumnutzung seriös möglich werden können ohne das Raumverständnis und die Raumanschauung, die die Mathematik vermittelt? Da muss schon der Zufall zu Hilfe kommen, oder man begnügt sich eben mangels anderer Möglichkeiten mit der beschränkten geometrischen Formenwelt der Schuhschachtel, und man verkündet dann die Banalität wortschwanger als Sensation. Wer hingegen den Raum nachhaltiger nutzen möchte, der kommt nicht um die Geometrie herum. Bedenken wir, dass geistlose Raumnutzung an sich gar keine Kunst sein kann, denn Tiere ohne höhere Intelligenz nützen den Raum ebenfalls und werden in Kulturleistungen dem Menschen wohl nicht als Massstab dienen können. Von ihnen trennt uns u.a. die Distanz des Wissens — auch nota bene des Wissens über den Raum und seine Eigenschaften.

4.4 Einige Anwendungen der Mathematik in der Architektur

4.4.1 Einfache Anwendungen

Nachstehend finden wir einige einfachen Anwendungen der Mathematik aufgelistet, wie sie dem Bauzeichner begegnen können. Mit der nachfolgenden Liste wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben:

1. Trigonometrie, z.B. Dachhöhen (gesetzliche Vorschriften!), Neigungen oder Balkenlängen berechnen.
2. Vektoren: Statik, Träger, Balkonabstützungen u.s.w. (Sicherheit!).
3. Rampensteigungen (z.B. Garageeinfahrten in Untergeschosse, max. Gefälle von 12%, gesetzliche Vorschriften).
4. Flächeninhaltsberechnungen (Ausnützungsziffer, Bruttogeschossflächen, Reglemente).
5. Volumenberechnung (Kubaturen, Kosten pro m^3, Aushub,...)
6. Beleuchtungsprobleme: Berechnung von gewünschten Lichtmengen.
7. Energieprobleme: Wärembedarf, Wäremverlust.
8. Schallprobleme.
9. Wasserprobleme (Abflussmengen, Druckgarantie,...).
10. Künftig vermutlich vermehrt: Elektrosmogprobleme.
11. Einfache Finanzmathematik.

4.4.2 Hochschulanwendungen

Die hier aufgelisteten Anwendungsbeispiele der Mathematik in der Architektur und der Baukunst können schnell das für den Bauzeichner geforderte Niveau übersteigen. Es wäre wünschenswert, wenn ein heutzutage ausgebildeter Architekt in solchen Dingen Kenntnisse hätte. Sonst werden andere Berufsgruppen diese Lücke füllen müssen, was zu einer Atomisierung und Spezialisierung des Wissens führt. Solches schadet einer Fachrichtung in Form von realem Verlust, da wegen Methodenmangel die Analyse leidet und die Synthese mit dem durch diese Methoden Bedingen nicht mehr möglich wird. Das Verständnis der Vorteile des mathematischen Wissens in der Baukunst erfordert jedoch ein Minimum an eigenem Wissen des Lesers von diesen Dingen.
Mit der nachfolgenden Liste wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben:

1. Spiel mit, sowie anwendungsbezogenes Studium von mathematischen Körperformen (reguläre Polyeder sowie polyederartige Formen und analytisch beschreibbare Flächenformen).
2. Mathematische, computergestützte Modellierung von gewollten Formen mit Hilfe von gewollten Funktionen.
3. Proportionierungsarten, Anwendung der Geometrie oder der harmonischen Gesetze.
4. Optimierungsprobleme: Z.B. Gebäude mit maximalelm Volumen bei minimaler Oberfläche zwecks optimalem Wärmehaushalt. Allgemeiner: Optimierung von Formen in Anbetracht von gesetzlichen Vorschriften oder physikalischen Vorteilen sowie aus Rücksicht auf die beschränkten Umweltresourcen.
5. Minimalflächenanwendungen (Stichwort Olympiadächer in München oder Toronto), z.B. in Leichtbautragwerken : Minimalflächen fussen auf nichttrivialer höherer Mathematik.
6. Anwendungen von tensegere Stukturen.

7. Verbindungsprobleme, Auffinden optimaler Lösungen aus Kosten– und Umweltschutzgründen.
8. Bereich „Gesundheit und Bau oder Siedlung“: Mathematische Statistik, um zu affirmativen Aussagen zu gelangen.
9. Mathematik im Managementbereich: Optimale Entscheidungsfindung.
10. Mathematik im Managementbereich: Warteschlangeprobleme bei Warenhäusern, Schaltern, Vergnügungszentren, Verkehrsinfrastruktur.
11. Optimierung des Einsatzes beschränkter materieller, personaler und zeitlicher Mittel; Optimierungstheorie.
12. Fähigkeit, wissenschaftliche Texte zu lesen, z.B. mathematikbasierte Baunormen, Fachartikel in Zeitschriften und Literatur.
13. Mathematikintensive Informatikanwendungen: Diverse Planungstools (z.B. netzplanartige Anwendungen), Berechnungstools (z.B. für Statik oder Dimensionierung) oder Programme, welche mathematische Modellierung erfordern.
14. Gehobene Finanzmathematik in der Geschäftsführung (Rentenprobleme, Investitionsprobleme u.s.w.).
15. Die Mathematik der sakralen Baukunst: Ausdruck geistiger (sakraler) Inhalte durch geistige (mathematische) Prinzipien.
    Bemerkung: Sakrale Baukunst ist in früheren Zeiten als „Architektur schlechthin“ bezeichnet worden. Dies im Gegensatz zur Festungstechnik oder zum Hausbauhandwerk. Heute finden wir den Begriff „Architektur“ als derart breit besetzt, dass es ratsam erscheint, im Zusammenfang mit den kulturell althergebrachten einschlägigen Perlen von sakraler Baukunst zu reden.

4.4.3 Schulungsanwendungen

1. Unbestritten, seit es Hochschulen überhaupt gibt, ist die Wirkung der Mathematik für die Schulung des räumlichen Denkens. Das betrifft speziell ihr Teilgebit Geometrie. Gute Dienste leistet hier die projektive Geometrie.
2. Unbestritten ebenfalls ist der grosse Wert der Mathematik für die Schulung des exakten Denkens. Exaktheit gehört zu beruflicher Qualität wie die Mutter zum Kind.
3. Und nicht zuletzt unbestritten ist der Wert der Mathematik für die Schulung des abstrakten logischen Denkens, denn hier liegt ihr eigentlicher Wesenskern.
4. Nicht zu vergessen ist auch der Wert Mathematik für das historisch–kulturelle Denken. Denn die Mathematik macht einen wesentlichen Teil der Artes Liberales aus, der althergebrachten sieben kulturbestimmenden Künste des freien Mannes. Wir finden sie hier in der Arithmetik, in der Geometrie, der Harmonielehre, der Astronomie, aber auch über das Bindeglied der Logik in der Dialektik.

Die Darstellung sowie Diskussion der eben aufgelisteten Themenbereiche soll in den Bereich der mündlichen Kommunikation fallen, da diese Kommunikationsart hier zu wertvolleren Erkenntnissen führt als jede, welche durch das Erarbeiten einer weiteren schriftlich verfassten Abhandlung möglich sind. Denn eine solche Abhandlung muss sich zwangsweise der Einwegkommunikation bedienen. Daher sei hier diesen Themen nichts Weiteres schriftlich beigefügt.

Kapitel 5

Theorien der Mathematik und Physik mit prägendem Einfluss

Hier geht es um den Problemkreis der Entwicklung von Mathematik, Physik und Weltbild sowie um einige Entdeckungen, die das Weltbild verändert haben. Dies mag ein Anstoss sein zum Nachdenken über deren Einfluss auf das gestalterische Tun, Denken und Empfinden in den „bildenden Künsten“.

5.1 Gelehrte der Antike

Hier sind kurz diejenigen Gelehrten aufgeführt, die für die in unserem Rahmen besprochenen Weltbilder besonders wichtig sind.

5.1.1 Ägypten, altes Reich

Ca. 2600 v. Chr.: Nach der Legende empfängt der Baumeister der ersten Pyramide bei Sakkara Imohtep die Elle vom Gotte Ptah, dem Gott der Handwerker (altes Reich).
Ca. 1800 v. Chr.: Papyrus Rhind, vermutlicher Versuch zur Berechnung von π mit Hilfe des „goldenen Schnittes“...

5.1.2 Die grossen Sterne am Beginn dessen, was man Philosophie nennt

Eine kurze Übersicht:

- ⊘ Vorsokratiker, Naturphilosophen seit Thales. — Thales–Kreis? — Mathematik zum Beginn!
- ⊘ Pythagoras: „Alles ist Zahl.“ (Kosmos ist Ordnung.) Unordnung kommt nicht von den Göttern. Pythagoras lässt sich in Crotonei (unten am Stiefel in Italien) nieder.
- ⊘ Die Pythagoräer: Sie finden das Irrationale.
- ⊘ Parmenides aus Elea (südlich Pompei, unweit von Crotonei): Er wird der Vater der Ontologie (die Lehre vom Sein). Er ist Orphiker. Der Einfluss der Pythagoräer ist unübersehbar.
- ⊘ Parmenides Schüler Zenon: Er erfindet die Dialektik.
- ⊘ Sokrates, Schüler von Zenon anlässlich dessen Besuch der panathenäischen Spiele in Athen, bei dessen Vorlesungen beim Kyrameikos-Friedhof: Sokrates weist auf das Gewissen hin, sät die Ethik und hält erziehen für höher als regieren. Weltliteratur: Die Apologie des Sokrates von Platon.

- ⊘ Sokrates Zeitgenosse Protagoras: „Der Mensch ist das Mass aller Dinge.“ (Erste Bücherverbrennung der Geschichte.)
- ⊘ Sokrates Schüler Platon: Man spricht heute bezüglich der Philosophie von „Platon und eine Epigonen“. Alles ist Schein: Platon erschafft die „Erkenntnisproblem“. Bekannt: Sein Höhlengleichnis.
- ⊘ Akademieschüler (vermutlich Platons Schüler) Euklid: Lehrer und vermutlich Bibliothekar in Alexandria. Er sammelt die Geometrie und erschafft das erste exakt-wissenschaftliche Werk oder System: Seine 13 Bücher, die „Elemente“. Alexander der Grosse resp. sein Vertreter hat ihn bevorzugt. Ergehörte zum „Club“.
- ⊘ Platons Schüler Aristoteles: Er erschafft das System, die Fülle des geordneten Wissens, den Rückgriff auf die Bibliothek — und auch die Logik neben vielem Anderen.
- ⊘ Aristoteles Schüler Alexander der Grosse: Er erobert „die Welt“, verbreitet die Kultur von Griechenland bis nach Kaschmir — und er beendet den Zwist, mit dem der troyanische Krieg begann. Herrscht jetzt bald Harmonie in Frieden?
- ⊘ Dann kommt Rom, diejenigen welche sich für Nachfahren der Troyaner halten, der Diener des Apollo: Die Techniker, sie wenden das Wissen an. Sie haben Verstand. Sie schaffen den ersten flächigen organisierten Vielvölkerstaat auf der Grundlage eines Rechts. Sie schaffen die Urverfassung aller Republiken. Sterben sie mal daran? — Rom lebt immer noch, denn noch nicht sind alle römischen Ämter erloschen — bis heute nicht.

5.1.3 Schule des Pythagoras

Pythagoras lebte ca. 580–500 v. Chr. Er ist der Gründer des Ordens der Pythagoräer. Aus diesen Kreisen stammt die Entdeckung der pythagoräischen Zahlentrippel sowie die Tatsache der Existenz inkommensurabler Strecken. Damit waren die irrationalen Zahlen entdeckt. Der innere Kreis der Pythagoräer, die Mathematiker, verstanden Herleitungen und Resultate ihrer Mathematik. Der äussere Kreis, die Akusmatiker, hatten nur zu den Resultaten zugang. Im Gegensatz dazu hatten Bauleute vermutlich wenige abstrakte mathematische Kenntnisse, verstanden aber ihr Metier und damit auch die konkrete Geometrie. Ihre Konstruktionen waren oft nach dem Mass des Menschen, eingebettet im Kosmos.

5.1.4 Platon

Platon lebte ca. 429–348 v. Chr. Er gilt als einer der wesentlichsten Philosophen der Geschichte. Sein Lehrer war Sokrates, sein Schüler Aristoteles. Er ordnet das Reich der Erkenntnisse: Da gibt es die sinnlich–sichtbaren Dinge, daneben aber das Reich der Ideen, wo die mathematischen Begriffe einzuordnen sind. Die Mathematik ist ein bedeutendes Mittel zur Erforschung des Reiches der Ideen, welche durch den Staat gefördert werden müsste. Damit ist die wahrnehmbare Realität eingeteilt in die sinnlich wahrnehmbare, äussere Realität und die geistige Realität, das heisst das Reich der Ideen.

5.1.5 Aristoteles

Aristoteles (384–322 v. Chr.) war ebenfalls einer der wesentlichsten Philosophen. Auf ihn stützten sich lange Zeit die Naturwissenschaften. Er gilt auch als Vater der Logik. Er stellte fest, dass schwere Körper schneller fallen als leichte Körper. Es ist auch offensichtlich, dass eine leichte Vogelfeder nicht so rasch zu Boden fällt wie eine Bleikugel. Für Fragen nach dem Luftwiderstand und nach der Existenz des Vakuums war die Zeit damals noch nicht reif.
Für Aristoteles war die Erde das Zentrum des Kosmos; sie war klein und ruhend. Um sie bewegten sich die Planeten auf Kreisbahnen. Von Aristoteles kennen wir auch die Lehre der vier Elemente. Interessanterweise hat Geist (griech. „pneuma“) auch die Bedeutung des Elementes Luft (Nicht zu verwechseln mit „Anima“ oder „Psyche“). Das fünfte Element ist die „quinta Essenzia“. Den Elementen sind die platonischen Körper zugeordnet worden.

5.1.6 Euklides von Alexandria

Euklid lebte um 300 v. Chr. Er hat in seinen Elementen (13 Bücher) ein Sammelwerk mathematischen Wissens zusammengetragen, das erstmals in der Wissenschaftsgeschichte nach der Methode der strengen Axiomatik aufgebaut ist. Ziel des Werkes ist es, aus wenigen plausiblen Grundannahmen (Definitionen, Axiomen und Postulaten) heraus streng logisch–deduktiv zu zeigen, dass es an regelmässigen Körpern nur die bekannten fünf platonischen Körper gegen kann. (Definitionen sind Begriffserklärungen, Axiome sind allgemeine plausible, Aussagen, die am Beginn einer Theorie stehen, und Postulate sind z.B. Aussagen über Möglichkeiten von Konstruktionen.)
Bei Euklid wird offenbar, dass es kein Naturgesetz gibt, welches besagt, dass jede Sicht der Realität einfach zu sein hat. Denn ohne seine Elemente gab es keine Lösung des Problems der platonischen Körper. Und eine einfachere Lösung war nicht zu haben, auch für den König nicht...

Die **Antworten Euklids** *zur Frage der Vereinfachung der Weltsicht (Reduzierbarkeit eines Denksystems) und dem Sinn deduktiver Systeme:*
Euklid wagte es seinem König Ptolemaios zu sagen, dass es keinen Königsweg zur Geometrie gibt. Noch heute hört man oft die Frage des Königs aus dem Munde von Zeitgenossen: „Kann man das nicht einfacher machen?“
Ein Schüler fragte den Euklid, was er denn verdienen könne, wenn er diese Dinge lerne. Euklid soll darauf einen Sklaven gerufen haben mit der Aufforderung: „Gib ihm drei Obolen; der arme Mann muss Geld verdienen mit dem was er lernt.“
Frei übersetzt heisst das: „Sind sie jemand, oder arbeiten sie für Lohn?“ Noch heute hört man oft die Frage des Schülers aus dem Munde von Zeitgenossen: „Wo kann man das gebrauchen?“

An den beiden Fragen an Euklid hat sich seit ca. 2000 Jahren nichts geändert. Sie stehen am Tor zur Schule der Bildung des Denkens. Der König ging wohl von der Idee aus, dass sich die Schwierigkeiten der Realität nach seinem Massstab zu richten hätten: Eine Mischung von Hochmut und Paranoia. Auch den Schüler hat die Idee geleitet, dass sein momentanes Denkniveau die Beurteilungsgrundlage des Sinnes der Dinge sei. Daher hat er gewagt zu urteilen: Er hat sich darauf für befähigt gefühlt, die Brauchbarkeit und daher die Güte einer Sache einsehen zu können, ohne sich die dafür notwendigen methodischen Denkkompezenten und Erfahrungsgrundlagen angeeignet zu haben. Da liegt der Schluss nicht weit, dass alles, was nicht sofort als brauchbar erkennbar ist, daher schlecht sein muss. Speziell also wäre eine Denkschule schlecht...
Interessant in diesem Zusammenhang ist die Zielsetzung der hierzulande aus den Nöten der industriellen Revolution um ca. 1750 geborenen Volksschule: Lesen, schreiben, rechnen sind die vielgepriesenen grossen Kulturleistungen. Die Ausbildung des Denkens fehlt (z.B. Ausbildung von Kompetenzen wie Ziele setzen, urteilen und beurteilen, Massstäbe hinterfragen...). Sie war dem Gymnasium vorbehalten, gehörte nicht in die Schule des Volks... Und noch heute kann man beobachten: Viele, die mekern gelernt haben meinen, sie hätten auch denken gelernt...

5.1.7 Archimedes von Syrakus

Archimedes lebte ca. 287–212 v. Chr. Er gilt bei uns als Vater der technischen Hochschulen. Noch erhaltene Schriften sind: Methodenlehre, Quadratur der Parabel (einfache Integration!!), über Kugel und Zylinder, über Spiralen, über Konoide und Sphäroide, das Buch der Lemmata, die Konstruktion des regulären Siebenecks, die Sandzahl, vom Gleichgewicht ebener Flächen, von den schwimmenden Körpern (Gesetz des Archimedes!), teilw. über Kreismessung (Abschätzung von π).

5.1.8 Erathostenes von Kyrene

Erathostenes lebte von ca. 276 – 194 v. Chr. und war u.a. Leiter der Bibliothek in Alexandria. Bekannt ist das Sieb des Erathostenes zur Auffindung der Primzahlen, seine Lösung des delischen Problems (Kubusverdoppelung, mit Zirkel u. Lineal alleine nicht möglich) und seine Berechnung des Erdumfanges. (Die Erde ist keine Scheibe mehr, sondern sie ist eine Kugel.)

5.1.9 Vitruv

Vitruv lebte vermutlich von 80-70 v.Chr. bis ??. Sein uns bekanntes Werk umfasst 10 Bücher. Es ist vermutlich um 33 – 20 v. Chr. entstanden.

1. Buch 1: Ausbildung des Architekten und architektonische Grundbegriffe
2. Buch 2: Baumaterialien
3. Buch 3: Tempelbau
4. Buch 4: Tempelbau
5. Buch 5: öffentliche Gebäude
6. Buch 6: Privathäuser
7. Buch 7: Privathäuser
8. Buch 8: Wasserleitungen
9. Buch 9: Astronomie
10. Buch 10: Maschinen

5.1.10 Ptolemaios

Ptolemäus (ca. 90–160 n Chr.) war der Lehrer des geozentrischen „ptolemäischen“ Weltbildes, das bis zu Kopernikus (ca. 1500) weit verbreitet war. Ptolemäus wusste schon, dass die Planeten manchmal langsamer und manchmal schneller laufen. Sonne und Mond bewegten sich auf Kreisbahnen, die Sonne in der Ekliptik. Um die Planetenbewegungen zu erklären, genügten Kugelsphären nicht mehr. Da griff die Epizyklentheorie: Die Planeten bewegten sich auf Kreisbahnen um einen jeweils zentralen Punkt der grossen Planetensphären. Man war also gezwungen, Sphären auf den Sphären einzuführen.

5.1.11 Rom

Roms Leistung war der Staat, die rechtsbasierte Organisation und die grandiose Technik. Die Wissenschaften scheinen davon eher erdrückt worden zu sein — vielleicht ist auch vieles verloren gegangen. Jedenfalls ist das heutige Erbe eher beschränkt.

5.2 Nachantike, Mittelalter

Vor dem Zusammenbruch des Römerreiches im Westen war der Hauptschauplatz der Kultur der östliche Teil des Römerreiches mit den Zentren Alexandria und Athen. In diesem Teil der Welt wurde die Kultur auch weiterhin „bewahrt“, wenn auch nicht unbedingt sehr viel weiter entwickelt. Im Westen hingegen lief nicht mehr viel auf mathematisch–naturwissenschaftlichem Gebiet. Das Feld gehörte der Theologie und der Scholastik. Erst im Hoch– und Spätmittelalter begann der Kontakt mit der Antike wieder, zur Hauptsache über die spanischen Mauren. Wegen unseres Rahmens verzichten wir hier darauf, auf einzelne Gelehrte einzugehen. Wichtig ist der Einfluss des Falls von Byzanz 1453: Der Einfluss griechischer Gelehrter begann in Italien zu wirken...

5.2.1 Albertus Magnus

Albertus Magnus (1193 – 1280 zu Köln), Dominikaner, Provinzial, Bischof von Regensburg, Scholastiker, Lehrer an europäischen Hochschulen. Er war der grosse Lehrer und Verbreiter des Aristoteles und Kenner der Naturwissenschaften. Heimlich soll er bereits damit begonnen haben zu experimentieren: Die Natur wird hier befragt auf der Grundlage des Glaubens an die Erfahrung, im Gegensatz zur Befragung der Schrift auf der Grundlage des Glaubens an die Schrift. Er war Lehrer des Ulrich von Strassburg und des Thomas von Aquin.

5.2.2 Fibonacci

Leonardo Fibonacci lebte von 1170 (Pisa) bis nach 1240. Erwähnenswert: Arabische Zahlen, Dezimalsystem, zahlentheoretische Beiträge.

5.3 Renaissance, Barock, Mechanik, neue Himmelskörper

In der Renaissance beginnt wieder stärker die Beschäftigung mit Geometrie, auch der Malerei (Perspektive) wegen (aber auch auch wegen der neuen Kriegstechnik mit Artillerie). Erwähnenswert sind die Schriften von Pacioli (De Divina Proportione, 1509, illustriert von Leonardo). Pacioli ist einer der grossen Vertreter des Humanismus und der Mathematik am Hofe der Montefeltre in Urbino, wo Raffaels Vater Hofmaler war (. . . „Lehrer“ Raffaels). Weiter: Albrecht Dürer (1471–1528, Proportionenlehre, 1528). — Von Michelangelo berichtet sein Schüler Condivi nur von einem einzigen Buch, dass der Meister stets um sich hatte: Dürers Proportionenlehre. Doch Dürers Figuren seien „starr wie Pfähle“. (Über Michelangelo haben wir Kunde von Vasari, Zeitgenosse und erster Kunstkritiker, und in einer Gegendarstellung von Condivi als Schüler. Nach denselben Quellen soll Michelangelo über seine Zeitgenossen geurteilt haben, sie hätten den Zirkel in der Hand statt im Auge. Kein Wunder: Aufgewachsen beim Steinbruch musste in seiner „Lehre“ sehr, sehr lange das Zeichnen üben.)

Wichtige Ereignisse: 1453 Fall von Byzanz, Ende Ostroms. 1468 Gutenberg erfindet den Buchdruck mit beweglichen Lettern. 1492 Entdeckung Amerikas, Ende der Rekonquista. Um 1517 Beginn der Reformation.

5.3.1 Kopernikus

Nikolaus Kopernikus lebte von 1473–1543. Er propagierte das heliozentrische Weltbild, wagte aber sein Werk zu Lebzeiten nicht zu veröffentlichen. Im Zentrum des Kosmos steht die Sonne. Erde und Planeten kreisen auf Kreisbahnen um sie. Der Mond läuft auf einer Kreisbahn um die Erde. Kopernikus fand offenbar auch Sätze der Geometrie und der Trigonometrie.

5.3.2 Galilei

Galileo Galilei lebte von 1564–1642. Er stellte zum Fallgesetz des Aristoteles ein Gedankenexperiment an, das in einen Widerspruch mündet: Lassen wir einen leichten, langsam fallenden Körper fallen und anschliessend einen schweren, schneller fallenden Körper auf exakt derselben Bahn, so muss der schwerere, schnellere den leichteren, langsameren bald einmal einholen. Weil der leichtere langsamer ist, muss er den schwereren und schnelleren beim Zusammenstoss abbremsen. Das heisst, dass beide Körper dann zusammen (zusammenklebend) langsammer sind als der schnellere Körper. Andererseits ist das Ganze dann aber schwerer als der anfängliche, schwerere Körper. Somit muss das Ganze auch schneller fallen. Somit fällt das Ganze zugleich langsamer und schneller! Dieser Widerspruch lässt sich dadurch beseitigen, dass man das Fallgesetz des Aristoteles verwirft. Aristoteles anzuzweifeln war damals jedoch eine gefährliche Sache!
Galilei fand auch das heute bekannte Fallgesetz. Lässt man eine Kugel eine schiefe Ebene herunterrollen,

so nimmt ihre Geschwindigkeit linear zu. Die Geschwindigkeitszunahme pro Zeitdifferenz ergibt eine Konstante: Die Beschleunigung ist gefunden. Mit diesem Begriff beginnt für die Wissenschaftshistoriker die Neuzeit, denn erstmals ist hier etwas theoretisch gedacht worden, das die Antike noch nicht konnte: Mit Hilfe des abstrachten Begriffs der Geschwindigkeit (Verhältnis von Weg– zu Zeitdifferenz) ist ein neuer abstrakter Begriff definiert worden, die Beschleinugung nämlich als Verhältnis von Geschwindigkeitsdifferenz zu Zeitdifferenz. Das hier eingegangene Prinzip der doppelten Abstraktion scheint der Antike fremd gewesen zu sein.
Von Galilei stammt auch der Trägheitssatz. Ohne Einwirkung einer äusseren Kraft bleibt ein Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung. Systeme, in denen dieser Satz gilt, heissen Inertialsysteme.
Weiter hat Galilei sein Fernrohr erfunden und damit erstmals in der Weltgeschichte neue Himmelskörper entdeckt, nämlich die Jupitermonde. Der damalige, dem geozentrischen Weltbild verhaftete Klerus hat diese Interpretation jedoch abgelehnt: Das was er da sähe in seinem Fernrohr, das sei nur Dreck, bekam er zu hören. Bekannt ist auch der Galileiprozess vor der Inquisition. Im mittelalterlichen Weltbild mit den Planetensphären sah man Gott als Energielieferanten, der die Bewegungen der Sphären aufrecht erhielt. Damit war ein Existenzbeweis Gottes gegeben. Wer das Weltbild anzweifelte, entzog der darauf gebauten Sicherheit die Grundlage. Das musste Gotteslästerung sein...
Von Galilei ist auch die Einsicht überliefert, dass die geraden Zahlen und die natürlichen Zahlen sich bijektiv aufeinander abbilden lassen, sie also gleichmächtig sind. (Galileische Paradoxie.)

5.3.3 Tycho Brahe

Tycho Brahe (1546 - 1601) beobachtete einen Kometen (1577) und einen neuen Stern (1572, Super Nova). Seine astronomischen Messungen übertraffen erstmals den antiken Ptolemaios an Genauigkeit. Die Zeit ist bei Tycho auf die Minute und der Ort (Winkel) auf die Viertelminute genau festgehalten.

5.3.4 Jost Bürgi

Der „Ostschweizer“ Jost Bürgi (1552 – 1632) gilt als einer der Erfinder der Logarithmentafeln. Er konstruierte im Umfeld des Hofes von Kaiser Rudolf II von Habsburg in Prag eine Uhr mit bisher in unserer Geschichte nie gekannter Genauigkeit, die offensichtlich die genauen Messungen des Tycho Brahe ermöglicht hat. (Das Prinzip dieser Uhr ist erst an der Schwelle zum 21. Jahrhundert wieder rekonstruiert worden.)

5.3.5 Kepler

Johannes Kepler aus Württenberg lebte von 1571–1630. Neben seiner Theorie der Kegelschnitte und seiner Fasslehre stammen von ihm die drei „Keplerschen Gesetze“, die er aufgrund der Messungen von Tycho Brahe mit Hilfe der Rechnungen von Jost Bürgi begründen konnte::

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
2. Flächensatz: Der Leitstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiteinheiten gleiche Flächen.
3. Für die grosse Halbachse und die Umlaufzeit zweier Planeten gilt: $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = const.$

(Keplers Mutter wollte man noch als Hexe verbrennen.)

Bevor Kepler seine Gesetze fand und damit die alte Ordnung des Kosmos in Frage stellen musste, hatte er diese Ordnung mit Hilfe der Geometrie der platonischen Körper noch zu perfektionieren versucht.

5.3.6 Descartes

René Descartes (Kartesius) lebte von 1596–1650. Er ist als Mathematiker und als Philosoph zu würdigen (Cartesianismus). Von ihm stammt die analytische Geometrie. Geometrische Gebilde werden hier durch Gleichungen beschrieben.
Als Philosoph gab er den „empirischen positiven (d.h. mathematischen) Wissenschaften“ die methodischen Grundlagen. Er rät uns zu folgenden methodischen Kartinalprinzipien:

1. Hege keine vorgefasste Meinung. Halte physikalisch nur für wahr, was auch eingesehen ist.

2. Zerlege ein Problem in Teilprobleme, die als solche für sich lösbar sind. (Grundlage der Aufteilung der heutigen Wissenschaften!)

3. Gehe bei der Erklärung einer Naturgegebenheit immer vom einfachsten Modell aus, solange dich nicht die Messungen zwingen, ein komplizierteres Modell anzunehmen.

4. Spezielles einfachstes Modell: Die Naturgesetze sind im Universum vermutlich überall die gleichen.

5.3.7 Guericke

Otto von Quericke lebte von 1602–1686. Er ist der Entdecker des Luftdrucks (Magdeburger Halbkugeln!).

5.3.8 Pascal

Blaise Pascal lebte von 1623–1662. Er ist gross in der Philosophie, der Mathematik und der Physik. In der Mathematik ist er bekannt als Geometer, als Wegbereiter der Infinitesimalrechnung und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von ihm stammt das Prinzip der vollständigen Induktion. In der Physik stammt von ihm das Pascalsche Gesetz in der Hydormechanik: In einer idealen Flüssigkeit oder einem solchen Gas ist der Druck bei Vernachlässigung der Schwerkraft überall gleich.

5.3.9 Huygens

Christian Huygens lebte von 1629–1695. Er entdeckte den Impulssatz, baute die erste Pendeluhr nach dem heutigen Prinzip (Leonardo da Vinci hatte allerdings sich damit auch schon befasst) und behandelte Kurven.
Heute formuliert man den Impulssatz so:

$$\text{Sei } \vec{p} = \sum m_i \cdot \vec{v}_i$$

$\rightsquigarrow$ In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls $\vec{p}$ konstant.

5.3.10 Newton

Isaak Newton lebte von 1642–1727. In der Mathematik ist er neben Leibniz (und Jackob Bernoulli) der Erfinder der Infinitesimalrechnung (Fluxionsrechnung). Von Newton stammt die Bewegungsgleichung $F = m \cdot a$ (für die Erde $F = m \cdot g$), das Wechselwirkungsgesetz: *Actio* = *Reactio* (Kräfte treten immer paarweise und entgegengesetzt auf) sowie das Gravitationsgesetz: $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$. (Werk „Philosophia naturalis principia mathematica“.) Als Idealisierung verwendet man in der Newtonschen Mechanik statt Massen als vereinfachte Modelle Massepunkte, die in der Realität allerdings nicht existieren.
1665 hatte Newton die Idee, dass die Schwerkraft auch für Erde und Mond vorhanden sein könnte. Das Gravitationsgesetz lässt sich im Idealfall einer Kreisbahn eines Planeten (z.B. Erde) via Zentripetalkraft sehr einfach aus dem 3. Keplerschen Gesetz ableiten:

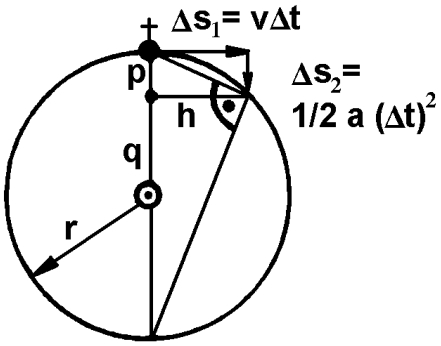


Abb. 33: Bewegung der Erde um die Sonne

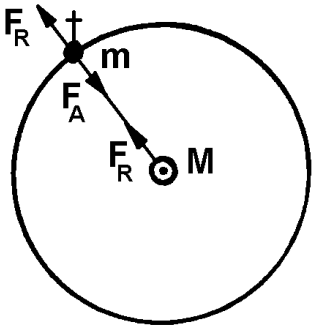


Abb. 34: Erde, Sonne und Kräfte

Z.B. die Erde bewegt sich um die Sonne mit einer gleichförmigen absoluten Geschwindigkeit v. Aus Symmetriegründen wirkt immer dieselbe Zentripetalbeschleunigung a und dieselbe Zentripetalkraft F. Wegen der gekrümmten Kreisbahn gehört zum tangentialen Weg $\Delta s_1 = v \cdot \Delta t$ der Weg zum Zentrum $p = \Delta s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2$. Wegen dem Höhensatz $h^2 = p \cdot q$, $h = \Delta s_1$, $p = \Delta s_2$, $q = 2\,r - p = 2\,r - \Delta s_2$ gilt somit:

$$\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \cdot (2\,r - \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2) = (v \cdot \Delta t)^2 \;\Rightarrow\; a\,r - \tfrac{1}{4} \cdot a^2 \cdot (\Delta t)^2 = v^2$$

$$\Delta t \to 0 \;\Rightarrow\; a\,r = v^2 \;\Rightarrow\; a = \frac{v^2}{r} \rightsquigarrow\; F = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r} \text{ (Zentripetalkraft) .}$$

Wegen dem 3. Keplergesetz ist nun für Planeten $\dfrac{T^2}{r^3} = const. = c(M) \;\Rightarrow\; T^2 = c(M) \cdot r^3$

Die Umlaufgeschwindigkeit ist $v = \dfrac{U}{T} = \dfrac{2\,\pi\,r}{T}$

$$\Rightarrow\; F = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{(2\,\pi\,r)^2}{T^2 \cdot r} = m\,4\,\pi^2 \cdot \frac{r}{T^2} = m\,4\,\pi^2 \cdot \frac{r}{r^3 \cdot c(M)} = \frac{4\,\pi^2}{c(M)} \cdot \frac{m}{r^2} = c_1(M) \cdot \frac{m}{r^2}$$

Denkt man sich für einen Moment die Erde fix und die Sonne beweglich um die Erde (Relativbewegung), so hat die Sonne dieselbe Winkelgeschwindigkeit bezüglich der Erde wie vorher die Erde bezüglich der Sonne hatte. Bei gleichem Radius führt das auf dieselbe Geschwindigkeit und auch auf dielselbe Kraft, allerdings bei anderer Masse M. Lässt man auch hier das 3. Keplergesetz mit einer andern Konstante gelten, so folgert man wie oben:

$$F = c_2(m) \cdot \frac{M}{r^2} \rightsquigarrow\; c_1(M) \cdot m = c_2(m) \cdot M = c_3 \cdot m \cdot M := G \cdot m \cdot M \;\Rightarrow\; F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \rightsquigarrow \text{ Gravitationsgesetz}$$

Aus dem Gravitationsgesetz wiederum gewinnen wir:

$$F = G \cdot \frac{\not{m} \cdot M}{r^2} = \not{m}\,4\,\pi^2 \cdot \frac{r}{T^2} \;\Rightarrow\; \frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\,\pi^2} \text{ (Kepler–Konstante).}$$

5.3.11 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz lebte von 1646–1716. Er gilt als der letzte Universalgelehrte, der das gesamte Wissen seiner Zeit beherrschte. U.a. war er der Gründer der Preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. In der Mathematik wie auch in der Philosophie (als Lehrer der „besten aller möglichen Welten“ — im nichtmaterialistischen Sinne) ist er einer der Grossen, die nicht nur Sätze, sondern Methoden entdeckt haben. Er hat gewisse unendliche Reihen berechnet und ist auf dieser Grundlage zur Infinitesimalrechnung gekommen (unabhängig von Newton, fast gleichzeitig, vielleicht etwas später). Neben Arbeiten in der formalen Logik ist der der Entdecker der Dualzahlen. Auch hat er an der ersten mechanischen Rechenmaschine gearbeitet, gedacht zur Ermittlung der Planetenbahnstörungen. Für ihn war Gottes Bau der Welt so gut, dass sie nun alleine funktioniert. Seine philosophische Monadenlehre hat sich in der Non–Standardanalysis als fruchtbar erwiesen.

5.3.12 Bernoullis

Jacob I. Bernoulli lebte von 1654–1705. Er stand im Briefwechsel mit Leibniz. Es wird erzählt, dass er Leibnizes Unterlagen verloren habe und daher die Infinitesimalrechnung nacherfinden musste, um bei der Beantwortung von Leibnizes Fragen das Gesicht zu wahren. Er hat die Infinitesimalrechnung weiterentwickelt, die Polarkoordinaten eingeführt und viele Kurven bearbeitet. Mit ihm beginnt die Bernoulli–Dynastie in der Mathematik.

Sein Bruder Johann I. (1667–1748) hat mit Erfolg auf dem gleichen Gebiet Grosses geleistet. Von ihm stammen Bezeichnungen wie „Integral“. Johann I. war der Lehrer von Euler.

Daniel Bernoulli (1700–1784) befasste sich mit Kettenbrüchen, trigonometrischen Funktionen und anderem mehr. Daneben gilt er aber als der Begründer der theoretischen Physik. Von ihm stammt z.B. das Strömungsgesetz (Bernoulligleichung), das eine zum Energiesatz analoge Form hat:

$$\rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + p = const.$$

Daniel Bernoulli befasste sich bereits mit der Herzleistung des Menschen (Mensch als „Strömungsmaschine“?).

5.3.13 Euler

Leonard Euler lebte 1707–1783. Man sagt, dass er mehr Mathematikseiten geschrieben habe, als je ein bekannter Schriftsteller Romanseiten. An der Herausgabe seines Gesamtwerkes (Opera omnia) wird immer noch gearbeitet (momentan ca. 80 Bände). Euler hat auf praktisch allen Gebieten der Mathematik Grosses geleistet. Von ihm stammen geometrische Sätze, die Variationsrechnung, die Eulersche Zahl, die Eulersche Konstante, das Eulersche Multiplikationsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen, das Eulersche Prinzip der kleinsten Wirkung, die Eulerschen Differentialgleichungen in der Mechanik (Kreiseltheorie!), die Eulersche Formel für die komplexe Exponentialfunktion u.s.w., u.s.f..

Eine Anektote: Euler arbeitete damals gerade am russischen Hof, als Diderot zu Besuch war. Man erzählte Diderot, dass Euler einen „algebraischen Beweis Gottes“ habe. Diderot, der angeblich nichts von Mathematik verstand, eilte hin. Da dozierte Euler:

„Monsieur, es gilt $\frac{a+b^n}{n} = x$. *Also existiert Gott. Antworten Sie!“*

Diderot soll das — so wird erzählt — einleuchtend gefunden haben.

5.3.14 Kant

Immanuel Kant lebte 1724–1804, war also Zeitgenosse Goethes, Beethovens und Napoleons. Er und Platon gelten oft als die grossen Sterne der Philosophie. Sein Erbe ging einerseits an die Materialisten, andererseits an die Idealisten, die dann verschiedene Prioritäten gesetzt haben. Doch hat er u.a. auch über Kosmologie geschrieben.
Wichtig ist Kants kritische Philosophie (Z.B. die Kritik der reinen Vernunft) und damit seine Erkenntnistheorie. Er stellte ein begründetes Gleichgewicht her zwischen der Position einerseits, dass alle Erkenntnis aus der Erfahrung (Sinneserfahrung) fliesse und der Position andererseits, dass die Erfahrung durch die angeborene Ratio entstehe. Erfahrung ist für die Erkenntnis zwar notwendig, jedoch nicht hinreichend, denn die z.B. angenommene Form der Erkenntnis, die Kathegorie, stammt nicht aus der Erfahrung. Es gibt für Kant analythische und synthetische Aussagen. Die Subjekt–Prädikat–Logik des Aristoteles ist gültig. „A priori“ ist Erkenntnis, wenn sie nicht aus der Erfahrung fliesst (z.B. Teile der Mathematik) und „a posteriori“, wenn sie durch Erfahrung bedingt ist. In der Mathematik gibt es

synthetische Urteile, die zugleich a priori sind, während üblicherweise sonst synthetisch gleichbedeutend mit a posteriori wäre. Kathegorien sind Begriffe, die nicht aus der Erfahrung stammen, dort jedoch sehrwohl wirken. Eindrücke durch die Sinnesorgane müssen von der Tätigkeit der Vernunft organisiert werden, bevor sie sich als Erfahrung äussern können. Erkennen oder Verstand geht so durch das „Verarbeitungsorgan Vernunft“. Kathegorien in Form von Sätzen und Urteilen sind Quantität (Einheit, Vielheit, Allheit), Qualität (Realität, Negation, Limitation), Relation (Inhärenz und Subsistenz, Kausalität und Dependenz, Gemeinschaft) sowie Modalität (möglich–unmöglich, dasein–nichtsein, notwendig–zufällig). Dazu gibt es die a priorischen Formen der Anschauung: Raum und Zeit. Erfahrung selbst ist a priori subjektiv, also immer nur Abbild von einem Objekt, immer Phänomen, nie Objekt selbst, immer nur Aspekt, nie Ding an sich oder Noumen. Letzteres entspricht nicht den Kategorien. Noumen sind also z.B. befreit von Kausalität, sind nicht deterministisch. So kommt dem Menschen als noumeales Wesen, als moralisch Handelnder, ein freier Wille zu.
Kants Fragen lauten reduziert: Was kann ich erkennen? Was kann ich wollen, wie kann ich urteilen? Was soll ich tun?... Wichtig ist folgender kategorischer Imperativ als sein höchstes Prinzip der formalen Ethik: Handle nach der Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie allgemeines Gesetz werde.

5.3.15 Coulomb

Charles Augustin Coulomb lebte 1736–1806. 1784 fand er das nach ihm genannte Gesetz der Elektrostatik. Elektrisch geladene Körper üben aufeinander Kräfte aus, die sich nach einer zum Gravitationsgesetz formal gleichen Formel berechnen lassen.

5.3.16 Lavoisier

Antoine Laurent de Lavoisier (1743–1793) gilt als der Begründer der modernen, messenden Chemie und als Entdecker des Sauerstoffes. Damit war die Luft – Pneuma – Geist – entgeistet, denn Luft hat mit Verbrennung zu tun. Lavoisier hat offenbar herausgefunden, dass Diamanten aus Kohlenstoff bestehen, denn er konnte zeigen, dass sie verbrannt werden konnten. Diese bei Hofe in Versailles demonstrierten Diamantenverbrennungen haben den Marktweiberzug ausgelöst, der als der Beginn der französischen Revolution gilt. — Bei Hofe verbrennen sie die Diamanten, während das Volk nichts zu essen hat! Lavoisier starb durch die Guilliotine.

5.3.17 Volta

Alessandro Volta lebte 1745–1847. Ihm verdanken wir die Erfindung der Batterie (1801). Napoleon hat ihn unterstützt. Damit war jetzt die schon vorher bekannte Elektrizität jederzeit für Experimente greifbar. Mit Ausnahme der Herzschen Wellen (Radiowellen) und Dingen wie der Transistor war die gesamte Elektrizitätslehre (insbesondere die Elektrodynamik) in weniger als 100 Jahren aufgebaut. Die Erfindungen waren gemacht und es ging nur noch um die technische Perfektion. Man sieht, dass wenn sich einmal ein neues Tor geöffnet hat, das neu erreichbare Gebiet dann sehr rasch erobert ist.

5.3.18 Laplace

Pierre Simon Laplace lebte von 1749–1827. Sein Hauptwerk ist die 5 bändige Traité de méchanique céleste. Darin hat er die Stabilität des Sonnensystems bewiesen. (Behandlung der Bahnstörungen.) Von Napoleon auf Gott angesprochen, soll er geantwortet haben, dass er diese Hypothese nicht brauche.... Von ist die Idee des „Laplaceschen Dämons“ bezeugt (Uhrenmacheruniversum): Ein Geist, der in einem gegebenen Moment alle Kräfte, Geschwindigkeiten und Positionen aller Teilchen im Universum kennen würde, könnte auf alle Zeiten jeden Zustand voraussagen (Determiniertheit).

5.3.19 Dalton

John Dalton lebte von 1766 – 1844. Er war angeblich auch Bierbrauer, entdeckte z.b. das Gesetz der multiplen Proportionen in der Chemie und führte damit die Atomtheorie abschliessend in die Chemie ein. Weiter das Gesetz von Daltons: In einem Gasgemisch ist der Druck gleich der Summe der der Drucke der Komponenten (jede für sich allein).

5.3.20 Gauss

Karl Friedrich Gauss lebte von 1777–1855. Er hat den Hauptsatz der Algebra bewiesen, die komplexen Zahlen zu einem Abschluss gebracht, die Theorie der quadratischen Formen entwickelt, das Theoremum Aureum bewiesen (Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste), Beiträge zur Konstruierbarkeit von n–Ecken geleistet, den Hauptsatz der Funktionentheorie (bekannt als Satz v. Cauchy) gefunden, die Methoden der kleinsten Quadrate gefunden, eine nichteuklidsche Geometrie entdeckt (Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms!). Von ihm stammen Entdeckungen in der Differentialgeometrie (Gausssche Krümmung!) u.s.w. Berühmt wurde Gauss aber eher in der Astronomie als in der Mathematik. Er hat als erster auf Grund von Bahnstörungen die Position eines neuen Himmelskörpers (der Planetoid Ceres) vorausberechnet, den man dann so entdecken konnte. Die Theorie hat nun über das Experiment gesiegt.

Eine wesentliche Entdeckung des 19. Jahrhunderts war, dass es ausserhalb der euklidschen Geometrie noch andere Geometrien gibt, die auch möglich sind. Gauss hatte daran seinen Anteil.

5.3.21 Cantor, Gödel und andere

Eine weitere verblüffende Entdeckung des 19. Jahrhunderts war, dass es unendlich viele verschiedene Arten von unendlich gibt — und in der Konsequenz gilt dasselbe auch von null. Zudem stiess man im 20. Jahrhundert an die Grenzen logischer Machbarkeit und somit des deduktiven Denkens. (Gödel, Turing)

5.3.22 Die Entdeckung neuer Himmelskörper

Galilei

Galileo Galilei (1564 – 1642vgl. oben): Erste Entdeckung neuer Himmelskörper (Jupitermonde).

Herschel

Friedrich Willhelm Herschel (beim Hanovranerkönig Gregor III. von England): 1781 Entdeckung des ersten neuen Planeten, des Uranus.

Gauss, Piazzi

Die Titus–Bodesche Regel (empirische Regel) gibt folgendes Bild der ungefähren Planetenentfernungen in 0.1 AE:

Merkur	$0+4$	$=$	4
Venus	$3+4$	$=$	7
Erde	$6+4$	$=$	10
Mars	$12+4$	$=$	16
(Astroidengürtel, Lücke, Phaeton??)	$24+4$	$=$	28
Jupiter	$48+4$	$=$	52
Saturn	$96+4$	$=$	100
Uranus	$192+4$	$=$	196

Die Titus–Bodesche Reihe weist eine Lücke auf. Es war also naheliegend, nach einem Objekt Ausschau zu halten, das diese Lücke schliesst. In der Neujahrsnacht 1801 hatte dann der Italiener Piazzi ein kleines Objekt entdekt, das sich bewegte und das er später wieder verlor. Zufällig erhielt Gauss davon Nachricht. Gauss hatte eine Methode entwickelt, mit deren Hilfe sich auf der Grundlage von wenigen Beobachtungen und viel Mathematik die gesamte Bewegung errechnen liess. Das führte zur ersten mathematischen Positionsvorhersage der Geschichte der Wissenschaften. Das Objekt ist dann so wiedergefunden worden. Es ist der Planetoid Ceres. Heute kennt man ca. 2000 (oder mehr) Planetoiden. Sie bilden ungefähr einen Gürtel in einer Ebene, haben alle etwa die gleiche Bewegungsrichtung und bewegen sich auf nahezu Kreisbahnen.

Bessel, Leverrier, Galle

Friedrich Bessel vermutete um 1840 aufgrund von Uranusbahnstörungen die Existenz eines weiteren Planeten. J.J. Leverrier versuchte auf dieser Grundlage eine mathematische Positionsbestimmung. 1846 fand in Berlin J.G. Galle nach diesen Daten den Neptun.

Tombaugh

1930 entdeckte der Amerikaner C. W. Tombaugh durch Zufall ausserhalb der Neptunbahn einen weiteren Planeten, den Pluto.

Neuste Entdeckungen

Seit einigen Jahren (gegen Ende des 20. Jahrhunderts, Beginn 21. Jahrhundert) weiss man, dass der Pluto ein Doppelplanet ist. Hinter Pluto erstreckt sich dann der Kuipergürtel (wieder ein Astroidengürtel). In dieser Gegend kriesen die Planetenanwärter Xena ($d \approx 3000\ km$), Orcus ($d \approx 1600\ km$), Quaoar ($d \approx 1300\ km$) und Santa ($d \approx 2000\ km$) und weiter aussen noch Sedana auf einer sehr stark elliptischen Bahn ($d \approx 1600\ km$). Unser Erdmond hat im Vergleichzu diesen Himmelskörpern einen Durchmesser von $d \approx 3500\ km$. Ganz aussen finden wir die Oort'sche Wolke, eine Ansammlung von vermutlich einer unglaublich grossen Zahl von Kometen.
Zudem fand man in den letzten Jahren Planeten, die zu anderen Sonnensystemen gehören. Wir sind nicht das einzige Planetensystem. Erwähnenswert sind dabei die Schlüsselarbeiten aus der Zeit um das Jahr 2000, die an der Universität Genf geleistet worden sind.

5.3.23 Faraday und Maxwell

Michael Farady lebte 1791-1867. Von ihm stammt der Feldbegriff, formuliert für elektrische und magnetische Felder (Griesskörnerversuch, Einsenfeilspäne). Seine experimentellen Befunde wurden von James Clerk Maxwell (1831–1879) ca. 1856 in den vier Maxwellgleichungen mathematisch gefasst (Differentialgleichugen mit mehreren Variablen).
Zum dabei verwendete Feldbegriff: Ein Feld ist z.B. im Raume eine Funktion auf den Raumpunkten als Definitionsbereich mit Wertebereich z.B. Vektoren. So wird z.B. jedem Raumpunkt als Funktionswert eine Kraft (Vektor) zugeordnet. Der Feldbegriff ist später auch auf die Gravitation ausgedehnt worden.

5.3.24 Mayer, Helmholz, Joule

Robert Mayer (1814–1878) erkannte bereits 1840 den Energiesatz. Hermann von Helmholz (1821–1894) hat ihn im Jahre 1847 ausformuliert. James Prescott Joule (1818–1889) entdeckte die wechselseitige Umwandlung der Energieformen. Sei U die „innere Energie“. Heute formulieren wir für ein abgeschlossenes System:

$$E = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\, m \cdot v^2 + U = const.$$

5.3.25 Das Problem des absoluten Raums

Noch Leibniz und Kant haben an den „absoluten Raum“ geglaubt, d.h. den „durchwegs erfüllte Ort oder der Ort aller Örter“ (nach Leibniz). Für sie stand ausser Zweifel, dass die euklidsche Geometrie die einzig mögliche Geometrie des Raumes ist. Diese Vorstellung wurde durch die Entdeckung nicht-euklidscher Geometrien (Gauss, Lobatschevsky 1829, Bolay 1832 u.s.w.) ausgeräumt. Unter dem Eindruck der Vorstellung des absoluten Raumes mit einem Ursprung eines Koordinatensystems ist der Streit nach dem Zentrum der Welt (Kopernikus, Kepler, Galilei, geozentrisches und heliozentrisches Weltbild) verständlich. Ansätze zur Vorstellung höherdimensionaler Räume finden sich schon beim bernischen Mathematiker Ludwig Schläfli (1814 – 1896).

5.3.26 Forschung heute

Es scheint, dass heute die grossen Fortschritte in der naturwissenschaftlichen Forschnung nicht mehr so sehr auf dem Gebiet von Physik und Chemie geleistet werden. Bahnbrechende sind Arbeiten aus der Mikrobioligie, speziell der Gen– und Zellforschung. Parallell dazu ist mit der Informatik ein Entwicklungszweig entstanden, der die Arbeitswelt verändert. Jedoch ist zu vermuten, dass man in der Zeit um 2020–2030 die theoretischen Verkleinerungsgrenzen erreicht haben wird. Dann müsste wohl das Tempo der Erneuerungen ändern...

Für die Architektur interessant:

5.3.27 Fechner

Gustav Theodor Fechner (1801 – 1887) war ein deutscher Physiker und Philosoph. Bekannt sind von ihm statistische Untersuchungen zur idealen Teilung, wo sich der goldene Schnitt hervorgetan hat.

5.3.28 Le Corbusier

Le Corbusier (geb. Charles Edouard Jeanneret(-Gris), 1887 in Chaux de Fonds bis 1965) entwickelte ab 1942 bis 1955 den Modulor.

5.4 Einstein und die Relativitätstheorie

5.4.1 Äthertheorie und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Um ca. 1900 glaubten viele, dass die Physik in den wesentlichsten Teilen vollendet sei. Man rätselte noch über den Aufbau der Atome. Auch ging man davon aus, dass im Universum ein ruhender „Weltäther“ (auch Quinta Essenzia, oft Verbindung zwischen Materie und Geist) als Trägermedium existiere, durch den sich die Himmelskörper bewegen und in dem sich z.B. auch die elektrischen und magnetischen Felder ausbreiten. Lichtwellen begriff man als Ätherwellen. Viele Begriffe der Physik zeugen noch von der Äthervorstellung, unter deren Herrschaft sie entstanden sind. Man denke z.B. an den magnetischen Fluss: Das Magnetfeld fliesst durch den Äther. Dieser ruhende „Weltäther“ konnte man als ausgezeichnetes Inertialsystem begreifen, auf das man die gesamte „Newtonsche Physik“ beziehen konnte. (In einem Inertialsystem gilt das Trägheitsgesetz.)

Man dachte damals wohl insgeheim, nicht mehr fern von der absoluten Wahrheit über das Universum zu sein. 1905 erschien dann Albert Einsteins Schrift „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. (Einstein: 1879–1955.) Danach wurde wieder alles anders. Es war wieder einmal klar, wie problematisch „absolute und endgültige Wahrheiten“ sind. Man muss immer damit rechnen, dass die Grenzen des Erkennbaren erweitert werden könnten. Die Sache hatte Jahre später auch extreme politische Folgen: Die Existenz der Atombombe führte zum Gleichgewicht des Schreckens. (Masse wurde in Energie umwandelbar)

Ausgangspunkt zur neuen Betrachtungsweise war eine genauere Analyse der Begriffe Raum und Zeit. Um im Wissen weiterzukommen, suchte man vor 1900 experimentell zu klären, mit welcher Geschwindigkeit sich die Erde durch den Äther bewegt. Die elektrostatischen beziehungsweise brechungsoptischen Versuche von Fizeau (1860), Amscart (1872) und Raileigh (1902) brachten kein Resultat. 1886 gelang es Michelson und Morley , die Lichtgeschwindigkeit c auf der Erde in verschiedene Richtungen zu messen. Bewegte sich die Erde mit der Geschwindigkeit durch den Äther und das Licht mit der Geschwindigkeit c, so müsste in Bewegungsrichtung der Erde durch den Äther die Geschwindigkeit $c_1 = c - v$ und in entgegengesetzter Richtung die Geschwindigkeit $c_2 = c + v$ herauskommen. Das Resultat des heute mit moderneren Mitteln wiederholbaren Versuches ist jedoch, dass $c_1 = c_2$ ist: Die Lichtgeschwindigkeit ist auf der Erdoberfläche in alle Richtungen immer gleich gross. (Anderswo hatte man nicht gemessen...) Für die Geschwindigleit der Erde um die Sonne findet man ca. 30'000 m/s oder $3 \cdot 10^4$ m/s gegenüber von $c \approx (2.997925 \pm 0.0000001) \cdot 10^8$ m/s. Der Effekt müsste bei diesen Zahlen messbar sein!

Wie sollte man sich das nun erklären? Durch eine Rückkehr zum geozentrischen Weltbild? — Etwa mit dem Postulat, dass es ja die Erde sein muss, die im Zentrum steht und daher als Konsequenz im Äther ruht? — Einstein schlug eine andere Idee vor. Den Äther hat noch niemand gemessen. Seine Existenz ist ein Postulat, ein Axiom. Wieso sollte man es nicht mit einem gegenteiligen Axiom versuchen, nämlich mit der Annahme, dass der Äther gar nicht existiert? Die Konsequenz daraus wäre, dass es gar kein ausgezeichnetes Inertialsystem gibt (wo der Trägheitssatz gilt). Jedes soche wäre demnach gleichberechtigt. Einerseits wäre das das einfachste Modell im Sinne von Descartes. Andererseits müsste man andernfalls ein Auszeichnungsprinzip haben, etwa ein Minimalprinzip. c ist aber offensichtlich in keinem System minimal, sondern in jedem System gleich. Die Konsequenz ist das von Einstein *postulierte* Prinzip (Axiom):

Relativitätsprinzip: *Die Naturgesetze nehmen in allen Inertialsystemen dieselbe Form an.*

Bei gleichförmig bewegten Inertialsystemen ist keines vor dem andern ausgezeichnet:

$\rightsquigarrow$ Spezielle Relativitätstheorie.

Bei beschleunigten Inertialsystemen ist keines vor dem andern ausgezeichnet:

$\rightsquigarrow$ Allgemeine Relativitätstheorie.

Das „geozentrische Weltbild" hat sich nun ins Innere des Menschen verlegt. Nur er ist „hier und jetzt und einzig". (Der Mensch ist kein „Herdentier" mehr.) Diese Welt existiert so wie sie ist, hier und jetzt, weil es eben jetzt den Menschen gibt, der das wahrnimmt — und nicht umgekehrt gibt es den Menschen, weil die Welt eben gerade „zufällig" jetzt so ist. Aussen im materiellen Bereich haben wir uns aber vom geozentrischen Weltbild verabschiedet.

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist jetzt als Konsequenz aus dem Relativitätsprinzip begreifbar. Sie hat im Vakuum in jedem Inertialsystem etwa den Wert $c \approx 300'000\ km/s$.

Es ist wichtig zu beachten, dass die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wohlverstanden nur auf der Erdoberfläche festgestellt worden ist. Einsteins Vermutung war es, dass die Gültigkeit dieses Prinzips überall angenommen werden kann. Bis heute hat man dazu keine Widersprüche gefunden.

5.4.2 Systemzeit und Zeitdiletation

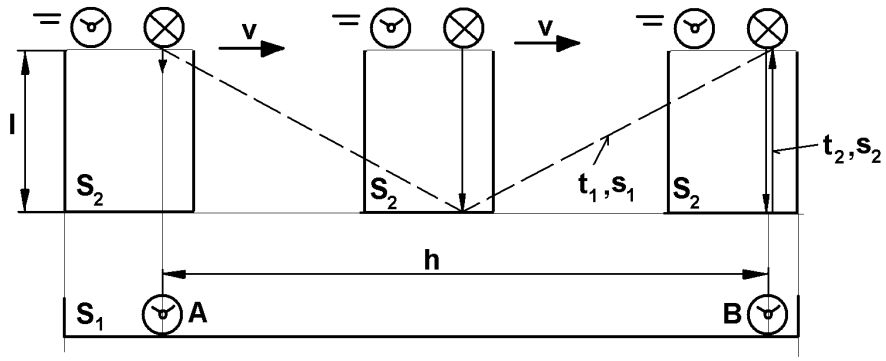


Abbildung 35: Gedankenexperiment zur Zeitdiletation

Wir machen jetzt ein Gedankenexperiment. Wir gehen davon aus, dass wir als Bezugssysteme zwei Inertialsysteme S_1 und S_2 haben, die sich gegeneinander horizontal mit gleichbleibender Geschwindigkeit v bewegen. Im System S_2 befindet sich ein senkrecht stehender, im System ruhender Zylinder der Höhe l, der unten verspiegelt ist und in dem oben eine Blitzlampe angebracht ist. Offensichtlich bewegt sich der beschriebene Zylinder im System S_1 mit der Geschwindigkeit v. Im Zylinder (bewegtes System S_2) sei eine Uhr angebracht, mit der sich die Laufzeit t_2 eines Lichtblitzes messen lässt, der den Zylinder nach unten durchläuft, dort gespiegelt wird und wieder oben ankommt. Der Blitz wird losgelassen, wenn sich das System S_2 am Ort eines Beobachters A im System S_1 vorbeibewegt. Für den *halben* Lichtweg finden wir im System S_2:

$$l = c \cdot t_2, \;\; t_2 = \frac{l}{c}$$

Im ruhenden System S_1 wird ebenfalls die Laufzeit des Lichtblitzes gemessen. Bei der Aussendung des Blitzes befinde sich der Zylinder beim Beobachter A im System S_1 und bei der Registrierung der Rückkehr des Blitzes beim Beobachter B im System S_1. Wir gehen davon aus (Annahme), dass A und B vorher mit synchron gehenden Uhren ausgerüstet worden sind. Die von A und B festgestellte Laufzeit des Blitzes sei t_1. Ein im System S_1 ruhender Beobachter C muss feststellen, dass sich der Zylinder während der Laufzeit des Blitzes aus seiner Sicht um die Distanz $h = v \cdot (2\,t_1)$ horizontal verschoben hat. Dabei ist t_1 die Zeit, die das Licht braucht um ebenfalls den *halben* Weg zurückzulegen. Aus der Sicht von C ergibt sich für den *halben* Lichtweg nach Pythagoras:

$$s_1 = c \cdot t_1 = \sqrt{(\frac{h}{2})^2 + l^2} = \sqrt{(\frac{2\,t_1\,v}{2})^2 + l^2} \;\Rightarrow\; c^2\,t_1^2 = t_1^2\,v^2 + (c \cdot t_2)^2$$

$$\Rightarrow\; t_2 = \frac{1}{c}\sqrt{t_1^2 \cdot (c^2 - v^2)} = t_1\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

Konsequenz: *Die Zeit ist* **systemabhängig***!*

$$t_2 = t_1\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}, \;\; \frac{t_2}{t_1} = \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}, \;\; v \neq 0 \;\Rightarrow\; t_1 \neq t_2$$

Da die Zeit systemabhängig ist, redet man auch von der **Eigenzeit**. Wichtig ist auch die Feststellung, dass für den Beobachter in S_2 sich das System S_1 bewegt, er aber in Ruhe ist (Relativität). t_2 ist im allgemeinen kleiner als t_1.

Konsequenz: *Im bewegten System S_2 vergeht weniger Zeit als im ruhenden System S_1. In System S_2 ist auch der Lichtweg kürzer als im System S_1. Die Lichtgeschwindigkeit ist aber in beiden Systemen dieselbe.*

Für das Experiment sind drei Uhren nötig: Eine im System S_2 und zwei im System S_1. Dass die Sache auch mit materiellen Uhren klappt, zeigen die Experimente. Das sensationelle Ergebnis ist erstmals 1938 gemessen worden. Eine denkwürdige Konsequenz ist das **Zwillingsparadoxon**. Der Effekt ist angeblich auch bei den Mondflügen im Grössenbereich von Mikrosekunden gemessen worden. Der Effekt ist heute mit Atomuhren in Flugzeugen messbar.

Noch ein Beispiel aus Elementarteilchenphysik (CERN, 1959): Myonen haben beim Zerfall eine Halbwertszeit von $\tau = \tau_2 = 1.52\ \mu s$. Die Halbwertszeit ist messbar (Intensität!). Die Myonen bewegen sich nun mit $v = 0.99942\,c$ im Speicherring. Für sie gilt in ihrem System die Halbwertszeit $\tau = \tau_2$. Für den Beobachter aussen ist dann $\tau_1 = \frac{\tau_2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \approx 44.6\ \mu s$, was mit der Beobachtung übereinstimmt. ($\rightsquigarrow$ Problem: Schnelle, beim Zerfall entstehende Teilchen können weit gelangen. Z.B. zur Erde, wenn sie in den oberen Luftschichten zerfallen...)

Interessant ist der Fall eines Photons, das mit Lichtgeschwindigkeit fliegt. Für ein solches Teilchen gilt $v = c$. Daraus folgt $t_2 = t_1\sqrt{1-(\frac{c}{c})^2} = 0$. Das heisst: Die Systemzeit eines solchen Photons ist immer 0. Es wird also auf dem Lichtweg zwischen Aussendung und Ankunft um die Zeit 0 „älter“!

Bemerkung: Für fixes t_1 und $v \to c$ geht $t_2 \to 0$. Für $v \to c$ und fixes t_2 muss aber $t_2 \to \infty$ gehen.

5.4.3 Die Lorenzkontraktion

Nach Definition ist $c = \frac{s}{t} = const.$, unabhängig vom System. Da t nun systemabhängig ist, muss dies auch für die Weglänge s gelten, sonst wäre ja eben c systemabhängig.

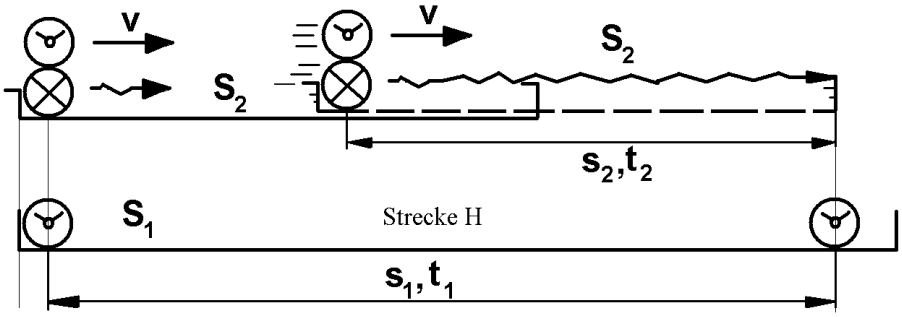


Abbildung 36: Gedankenexperiment zur Lorenzkontraktion

In einem Gedankenexperiment lassen wir nun wieder einen Beobachter in einem Inertialsystem S_2 an einem System S_1 vorbeifliegen, während nun in S_2 ein Lichtblitz in horizontaler Richtung losgelassen wird. Für den Beobachter in S_2 braucht das Licht für ein Wegstück H, das für ihn die Länge s_2 hat, die Zeit t_2. Der Beobachter in S_1 hat aber für H die Strecke s_1 gemessen und registriert jetzt die Zeit t_1. Beide Beobachter können die für sie geltenden Streckenlängen nach der Formel „Weglänge gleich Geschwindigkeit c mal Zeit“ berechnen. Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen

gilt daher:

$$c = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} \;\Rightarrow\; s_2 = s_1 \cdot \frac{t_2}{t_1} = s_1 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

Lorenzkontraktion: *Für einen Beobachter in einem mit der Geschwindigkeit v vorbeifliegenden Inertialsystem S_2, in dem der Beobachter ruht, ist eine Strecke s_1 gegenüber der von S_1 aus wahrgenommenen Realität verkürzt:*

$$s_2 = s_1 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

Dieser Effekt ist beobachtbar z.B. bei der Kontraktion des elektrischen Feldes schnell fliegender Teilchen (Spurenexperimente in Blasekammern...).

Weiter gilt in diesem Experiment: $v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_1 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{t_1 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{s_2}{t_2} = v_2$

Geschwindigkeiten können aber auch systemabhängig sein, wie ein weiterer Ausbau der Theorie zeigt.

Interessant ist auch hier wieder der Fall eines Photons, das mit Lichtgeschwindigkeit fliegt. Für ein solches Teilchen gilt $v = c$. Könnte man auf einem solchen Teilchen reiten, so würde man sich als ruhender Beobachter in S_2 vorkommen und die Strecke H zwischen Aussendungsort und Ankunftsort des Photons (System S_1) überwinden. Die Länge dieser Strecke würde man als der besagte Beobachter infolge der Lorenzkontraktion verkürzt wahrnehmen. Wie lange ist jetzt die Strecke für einem als Beobachter? Aus obiger Formel folgt mit der Länge $s_1(H)$ im System S_1: $s_2 = s_1(H)\sqrt{1 - (\frac{c}{c})^2} = 0$. Das heisst: Die Wegstrecke, die das Photon auf seinem „Flug“ zu überwinden hat, ist vom Photon aus gesehen immer 0! Für ein Photon im Vakuum (Lichtgeschwindigkeit c) existieren also gar keine Distanzen und somit gar keine Wege! Alles ist „unendlich nahe“.

5.4.4 Die Unüberschreitbarkeit der Lichtgeschwindigkeit

Die Quadratwurzel $\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \geq 0$ ist nur für $v \leq c$ eine reelle Zahl. Daher gilt:

Unüberschreitbarkeit der Lichtgeschwindigkeit: *v kann nie grösser sein als c.*

Diese Tatsache wird sichtbar anhand von Experimenten mit Beschleunigern.

5.4.5 Das Paradoxon der Gleichzeitigkeit

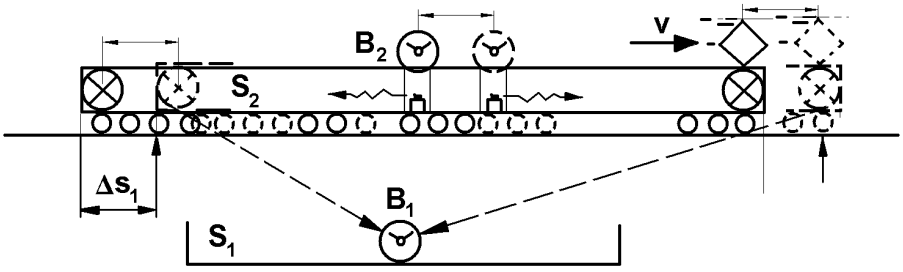


Abbildung 37: Gedankenexperiment zur Gleichzeitigkeit

Wir stellen uns einen langen Eisenbahnzug vor, der unser Inertialsystem S_2 bildet. Er hat die im System gemessene Länge $2\,s_2$. In seiner Mitte sitzt ein Beobachter B_2. Vorn und hinten ist der Zug mit je einer Blitzlampe ausgerüstet, die B_2 gleichzeitig zünden kann. Wenn B_2 den Knopf drückt, geht das Signal mit Lichtgeschwindigkeit zu den beiden Lampen. Es braucht dazu die Zeit $t_2 = \frac{s_2}{c}$. Beide Lampen senden dann einen Blitz aus, den B_2 wiederum nach der Zeit t_2 registriert, beide Blitze natürlich gleichzeitig.
Nun fährt der Zug mit grosser, aber gleichbleibender Geschwindigkeit nach Osten an einem Beobachter B_1 vorbei, der wiederum sich in einem Inertialsystem S_1 befindet. B_2 drückt genau dann den Knopf der Blitzlampen, wenn er sich exakt auf der Höhe von B_1 befindet. In dem Moment sei angenommen, dass B_1 von B_2 nur um eine minimale Distanz voneinander entfernt sind, sodass die Zeit um einander wahrzunehmen vernachlässigbar klein ist. Für B_1 beträgt die Länge des Zuges $2\,s_1 = 2\,\frac{s_2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$. Auch für B_1 sitzt B_2 in der Mitte des Zuges.

Für B_1 beträgt die Zeit des Signals vom Knopf bis zur Lampe $t_1 = \frac{t_2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$. Während dieser Zeit bewegt sich der Zug für ihn um die Strecke $\Delta s_1 = v \cdot \Delta t_1 > 0$ nach Osten. Im Moment wo jeweils die Lampe aufleuchtet, befindet sich daher die westliche Lampe für B_1 in der Distanz $d_1 = s_1 - \Delta s_1$ und die östliche Lampe in der Distanz $d_2 = s_1 + \Delta s_1$. Wegen $\Delta s_1 > 0$ ist daher $d_1 < d_2$. Die Zeiten, die die beiden Blitze bis zu B_1 brauchen, sind daher verschieden. Es gilt daher:

$$t_{1,1} = \frac{d_1}{c} < \frac{d_2}{c} = t_{1,2}$$

Konsequenz: *Was von B_2 gleichzeitig wahrgenommen wird, kann für B_1 als ungleichzeitig erscheinen. Der Begriff der Gleichzeitigkeit ist daher systemabhängig!*

Das hat Anwendngen z.B. beim Dopplereffekt. Beispiel: Rotverschiebung der Spektrallinien fliehender, sehr entfernter Sterne.

5.4.6 Ruhemasse und dynamische Masse

Was passiert mit einer Masse m, wenn man sie mit konstanter Beschleunigung a beschleinigt? — Es gilt $v = a \cdot t \leq c = a \cdot t_0$. Für $a = 10\ m/s^2$ beträgt dann t_0 etwa eine Zeit in der Grössenordnung eines Jahres. Eine grössere Geschwindigkeit als c kann nicht sein. Was muss somit passieren?
Weil t systemabhängig ist, muss bei gleichmässiger Beschleunigung wegen $a = \frac{v}{t}$ auch a systemabhängig sein. Es gilt hier:

$$a_2 = \frac{v}{t_2} = \frac{v}{t_1\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Rightarrow\ a_1 = a_2 \cdot \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

Wenn für einen Beobachter in S_2 die Beschleunigung konstant ist, muss sie daher für einen Beobachter in S_1 abnehmen. Das könnte man sich durch die Annahme erklären, dass eine Widerstandskraft gegen die Beschleunigung auftritt. Wegen $F = a \cdot m$ kann man daher vermuten, dass bei gleichbleibender Kraft F und abnehmender Beschleunigung a für den Beobachter B_1 die Masse zunehmen müsste:

$$F = a_1 \cdot m_1 = a_2 \cdot \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \cdot m_1 = a_2 \cdot m_2\ \Rightarrow\ m_1 = \frac{m_2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Kann das Stimmen?

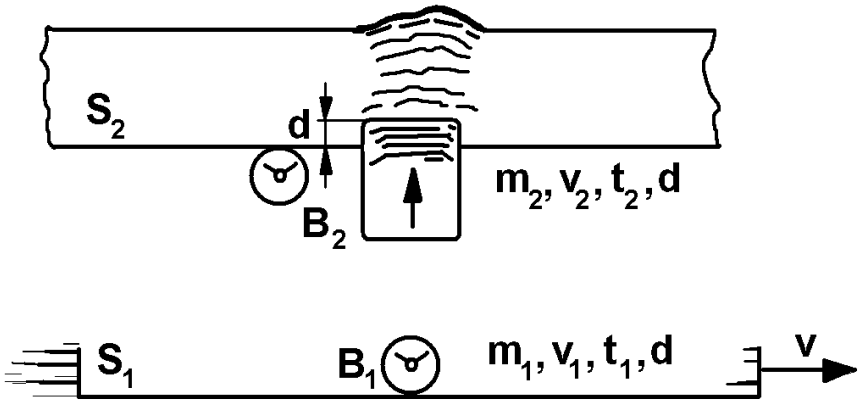


Abbildung 38: Gedankenexperiment zur dynamischen Masse

Wir machen wiederum ein Gedankenexperiment. In einem System S_2 fahre ein Auto der Masse m_2 mit der Geschwindigkeit v_2 senkrecht in Richtung Norden in eine Wand. Dabei wird der Impuls $p_2 = v_2 \cdot m_2$ auf die Wand übertragen und schlägt dabei ein Loch der Tiefe d, die als Mass für den Impuls gelten soll. Ein fast mit Lichtgeschwindigkeit v nach Osten vorbeifliegender Beobachter B_1 (System S_1) registriert eine etwas andere Situation: Einerseits fühlt er sich in Ruhe, das System S_2 mit dem Crash-Auto ist für ihn in Bewegung. Anererseits ist die Lochtiefe d für den vorbeifliegenden Beobachter B_1 dieselbe wie für einen Beobachter B_2 im System S_2, da für beide der Abstand zur Wand nicht ändert und beide sich in Nordrichtung nicht bewegen. Der Impuls muss daher in beiden Systemen derselbe sein: $p_1 = m_1 \cdot v_1 = p_2 = m_2 \cdot v_2$. Nun ist

$$v_1 = \frac{d}{t_1},\ \ v_2 = \frac{d}{t_2} = \frac{d}{t_1\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}\ \Rightarrow\ v_1 = \frac{v_2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Wegen $m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$ muss daher gelten:

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{v_1}{v_2} = m_1 \cdot \frac{v_2}{v_2 \cdot \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{m_1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Nach dem Gefühl des „vorbiefliegenden“ Beobachtes B_1 ist S_1 in Ruhe. Er erfährt das System mit dem Crash–Auto als in Bewegung befindlich. $m_1 := m_0$ nennen wir daher die **Ruhemasse**, die in einem anderen bewegten System nach der folgenden Gleichung zu $m_2 := m'$ wächst:

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

m' heisst die **dynamische Masse**. Auch diese Formel ist experimentell geprüft.

5.4.7 Masse und Energie

Wenn auf eine frei bewegliche Masse m ständig eine Kraft F wirkt, so wird die Masse nach der Formel $F = a \cdot m$ durch die Beschleunigung a beschleunigt. Wir bezeichnen hier die dynamische Masse mit m und die Ruhemasse mit m_0. Wir betrachten vorerst einmal nur kleine Geschwindigkeiten v. Ohne uns mal gross um die letzte Sauberkeit zu kümmern, versuchen einmal rein explorativ mit kleinen Grössen zu rechnen. Die kinetische Energie der Masse nimmt dann nach der folgenden Formel zu: $dE_{kin} = F \cdot ds$ (dE, ds „infinitesimal"klein, entstanden gedacht aus $\Delta E, \Delta s$). Die Kraft F ist in der Physik im allgemeinen Fall die Impulsänderung pro Zeit, d.h. die Ableitung des Impulses $p = m \cdot v$ nach der Zeit t:

$$F = \frac{d\,p}{d\,t} = \frac{d\,(m \cdot v)}{d\,t} = \frac{d\,m}{d\,t} \cdot v + m \cdot \frac{d\,v}{d\,t} = \frac{d\,m}{d\,t} \cdot v + m \cdot a$$

$$\Delta E_{kin} = \int_0^s F\,ds = \int_0^s (\frac{d\,m}{d\,t} \cdot v + m \cdot a)\,ds = \int_0^s \frac{d\,m}{d\,t} \cdot v\,ds + \int_0^s m \cdot a\,ds = \int_0^s \frac{d\,m}{d\,t} \cdot v\,ds\,\frac{d\,t}{d\,t} + \int_0^s m \cdot \frac{d\,v}{d\,t}\,ds$$

$$= \int_0^t \frac{d\,m}{d\,t} \cdot v\,\frac{d\,s}{d\,t}\,dt + \int_0^v m \cdot \frac{d\,s}{d\,t}\,dv = \int_0^t \frac{d\,m}{d\,t} \cdot v^2\,dt + \int_0^v m \cdot v\,dv = \int_{m_0}^m v^2\,dm + \int_0^v m \cdot v\,dv$$

Nun rechnet man:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \;\Rightarrow\; v = c \cdot \sqrt{1-(\frac{m_0}{m})^2} \;\Rightarrow\; \frac{d\,v}{d\,m} = \frac{c \cdot m_0}{m^3\sqrt{1-(\frac{m_0}{m})^2}} \text{ und } \qquad v \cdot \frac{d\,v}{d\,m} = \frac{c^2\,m_0^2}{m^3}$$

$$\Rightarrow\; dm = \frac{v\,m^3}{c^2\,m_0^2}\,dv$$

$$\rightsquigarrow\; \Delta E_{kin} = \int_{m_0}^m v^2\,dm + \int_0^v m \cdot v\,dv = \int_{m_0}^m v^2\,dm + \int_{m_0}^m \frac{c^2\,m_0^2}{m^2}\,dm = \int_{m_0}^m (c \cdot \sqrt{1-(\frac{m_0}{m})^2})^2 + \frac{c^2\,m_0^2}{m^2})\,dm =$$

$$\int_{m_0}^m (c^2 \cdot (1-(\frac{m_0}{m})^2) + \frac{c^2\,m_0^2}{m^2})\,dm = c^2 \cdot \int_{m_0}^m (1-(\frac{m_0^2}{m^2}) + \frac{m_0^2}{m^2})\,dm = c^2 \cdot \int_{m_0}^m dm = c^2 \cdot (m - m_0) = \Delta m \cdot c^2$$

Wir erhalten also hier eine aus der Literatur sehr, sehr bekannte Formel:

Es gilt: $\qquad \Delta E_{kin} = \Delta m \cdot c^2 = (m - m_0)\,c^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad m = m_0 + \frac{E_{kin}}{c^2}$

Masse ist also Energie! Das zeigt sich bei der Kernspaltung oder der Atomexplosion infolge Kettenreaktion! Der **Massedefekt** Δm ist proportional der oft äusserst grossen freigesetzten Energie: $\Delta E = (m - m_0)\,c^2$. Daher können wir allgemein Masse und Energie als äquivalente Begriffe ansehen und daher auch der **Ruhemasse** m_0 die **Ruheenergie** $E_0 = m_0 \cdot c^2$ zuordnen. Das Experiment zeigt,

dass Massen vollständig in Energie umsetzbar sind. Z.B. beim Zusammenstoss eines Teilchen mit seinem Antiteilchen (1932 schon beobachtet!). Die **gesamte Energie** bewegter Materie ist:

$$E_g = E_{kin} + m_0 \cdot c^2 = m \cdot c^2$$

Umgekehrt ist Energie immer auch Masse, auch wenn sie in einem Feld steckt (Feldenergie). So haben auch Photonen eine Energie und somit eine Masse. Auf Licht wirkt daher auch das Gravitationsgesetz. Ist die Gravitationskraft so gross, dass Licht aus einem Stern nicht mehr entfliehen kann, so spricht man von einem **schwarzen Loch**.

5.4.8 Zeitdehnung in der Nähe grosser Massen

Wir denken uns zwei Beobachter in grosser Entfernung voneinander (mit dem geraden Weg s_1 zwischen ihnen). Sei t_1 die Zeitspanne welche ein Lichtstrahl benötigt, um die Distanz s_1 zurückzulegen. Nun denken wir uns in der Mitte der beiden Beobachter ein schwarzes Loch mit sehr grosser Masse, welches eben auf seiner Bahn dort angekommen ist. Nun ist es nicht mehr möglich, zwischen den beiden Beobachtern einen Lichtstrahl auf direktem Weg hin und her zu senden, da dieser vom schwarzen Loch absorbiert würde. Da das Licht eine Energieform ist und Energie wegen $E = m \cdot c^2$ zur Masse m äquivalent ist, besitzt ein Lichtteilchen auch die Masse m und wird demzufolge nach dem Gravitationsgesetz vom schwarzen Loch angezogen. Das ergibt nun eine neue Möglichkeit, per Lichtstrahl zwischen den Beobachtern Information auszutauschen. Man kann sich den Lichtstrahl in einem gewissen Winkel zur Achse zwischen den Beobachtern gesendet denken, so dass das schwarze Loch dann den Strahl so ablenken kann, dass dieser auf einem gebogenen Weg vom einen Beobachter zum andern gelangt. Man denke sich die Bahn etwa wie bei einer Wurfparabel. Auf dieser neuen Bahn ist aber der neue Weg s_2 grösser als der alte direkte Weg s_1. Zum neuen Weg gehört die Zeit t_2. Wegen der Konstant der Lichtgeschwindigkeit gilt: $c = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2}$. Daher ist auch t_2 grösser als s_2. Grosse Massen dehnen daher die Reisezeit von vorbeifliegendne Objekten. Man könnte sich nun ein System von schwarzen Löchern vorstellen, das einen Lichtquant so ablenkt, dass er zuerst eine recht grosse Zahl von Spiraldrehungen um die und zwischen den Löchern vollführen muss, bevor er davon wieder los kommt. In diesem Falle würde der Lichtstrahl eine Zeit lang in einer „Falle stecken“. Für einen Beobachter aussen wäre er eine gewisse Zeit „eingefrohren“...

Für weitere solche Phänomente und Aspekte von Raum (Weg) und Zeit sei auf die Fachliteratur verwiesen.

5.5 Materiewellen, Quantentheorie, Kosmologie und Weltbild

5.5.1 Dualismus Wellen–Korpuskel

Was ist die Natur des Lichtes? Betrachten wir die Lichtbrechung (z.B. beim Übergang von Luft in Glas). Diese lässt sich durch Wellen erklären. Man spricht von der **Wellennatur** des Lichtes.

1988 beobachtete Heinrich Hertz, dass mit UV-Licht bestrahlte Metalloberflächen Elektronen aussenden (Photoeffekt). Heinrich Lenard konnte später zeigen, dass die kinetische Energie der Elektronen unabhängig ist von der Lichtintensität. Das lässt sich nicht mit Lichtwellen als elektromagnetische Wellen erklären. Es gilt $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = h\nu - W$. W ist eine Materialkonstante, ν die Lichtfrequenz und h das Plancksche Wirkunsquantum. (Max Planck war 1900 erstmals auf h gestossen.) 1905 gelang es Albert Einstein in seinem Artikel „Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt“ die Ergebnisse zu deuten: Er ging von der Annahme aus, das Licht bestehe (parallel zu seiner Wellennatur) aus **Photonen** (**Korpuskeln**) der Energie $E = h\nu$ (Plancksches Gesetz). Damit war die Dualität Welle–Korpuskel geboren. Dafür erhielt Einstein 1921 den Nobelpreis. Der scheinbare Widerspruch lässt sich nur lösen, wenn man tiefer in die Physik eindringt (Wahrscheinlichkeitsinterpretation, Wellenpakete etc.).

Da Energie und Masse äquivalent sind, kann man jetzt die Photonenmasse berechnen:

$$E = h\,\nu = m\,c^2 = (m_0 + \frac{E}{c^2})\,c^2$$

Daraus folgt, dass die Ruhemasse des Photons $m_0 = 0$ sein muss. Daher muss auch die Ruheenergie des Photons $E_0 = m_0 \cdot c^2 = 0 \cdot c^2 = 0$ sein! Wir fassen das bisher über das Photon Gesagte zusammen:

Konsequenz: *Ein Beobachter, den wir in Gedanken auf einem Photon zwischen Aussendungsort und Ankunftsort reiten lassen, muss feststellen, dass die Übermittlungszeit, die Länge des Übermittlungsweges , die Ruhemasse und die Ruheenergie für ihn alle 0 sind. Das heisst, dass das Photon aus dieser Sicht gar nicht in Erscheinung tritt oder gar nicht existiert. Es ist nur für einen Betrachter ausserhalb des Teilchens durch seine Ankunft wahrnehmbar. Seine Realität kann immer nur durch seine Ankunft wahrgenommen werden, nie aber unterwegs! Damit wird das heimliche Postulat der bedingungslosen Existenz alles physikalisch Wahrnehmbaren in Frage gestellt resp. relativiert.*

Da Photonen eine Masse haben, müsse sie auch einen Impuls $p = m\,v = m\,c$ haben. Für diesen gilt mit der Wellenlänge λ und $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$:

$$p = m\,c = \frac{E}{c^2} \cdot c = \frac{\nu \cdot h}{c^2} \cdot c = \frac{\nu \cdot h}{c} = \frac{c \cdot h}{c \cdot \lambda} = \frac{h}{\lambda} \;\Rightarrow\; p = \frac{h}{\lambda}$$

1923 stellte Prinz Louis de Broglie die Hypothese auf, dass diese Wellen–Korpuskel–Dualität auch für Elektronen gelten. Tatsächlich gelang es dann, die Wellennatur der bisher als Korpuskel bekannten Elektronen (Träger der Elementarladung) auch experimentell durch Beugungserscheinungen nachzuweisen (Clinton Davisson, George Thompson). Interessant ist, dass Vater Joseph Thompson den Nobelpreis für den Beweis der Teilcheneigenschaft der Elektronen und Sohn George Thompson 30 Jahre später den Nobelpreis für den Beweis der Welleneigenschaften der Elektronen bekommen hatte!

Man kann das Prinzip von de Broglie auch auf andere Materiearten anwenden und z.B. nach der Formel $E = m\,c^2 = h\,\nu = h\,\frac{c}{\lambda}$ aus der Masse m eines Stückes Materie die Wellenlänge λ oder die Frequenz ν bestimmen ($\rightsquigarrow\ \nu = \frac{m \cdot c^2}{h},\ \lambda = \frac{h}{m \cdot c}$).

5.5.2 Die Unschärferelation

Z.B. bei Elektronen und anderen Teilchen zeigt es sich, dass die Teilchenbahnen wegen den Beugungseffekten nur mit der Genauigeit der de–Broglei–Wellenlänge festlegbar ist. Speziell bei Elektronen ist es nicht möglich, einen Strahl zu erzeugen, in dem die Teilchen einen genau bestimmten Ort (z.B. Durchgangsort durch eine Lochblende mit festgelegter Öffnung) und eine genau bestimmte Geschwindigkeit haben. Werner Heisenberg formulierte die Gegebenheiten mathematisch in den **Unschärferelationen** (hier in der nicht-statistischen Formulierung):

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h,\ \ \Delta E \cdot \Delta t \geq h$$

Solche Gesetze schränken die Genauigkeit der Berechenbarkeit des Ablaufs von Naturvorgängen ein. Vor allem aber werden die oben gemachten Überlegungen für $t_2 = 0$ und $s_2 = 0$ bei einem Lichtquant wieder relativiert.

Heisenberg (1901-1076) fiel an der Abschlussprüfung in Physik fast durch. Zusammen mit Max Born und Pascual Jordan entwickelte er 1926 die Quantentheorie (heute Quantenmechanik). 1927 stellte er die Unschärferelation auf. 1932 erhielt er den Nobelpreis. Ein Beitrag stammt auch von Schrödinger (Wellenmechanik), der 1933 den Nobelpreis erhielt.

Schon Immanuel Kant hat von der philosophischen Seite her gefolgert, dass ein Subjekt nie ganz Objekt der Erkenntnis sein kann. Objektive Erkenntnis ist immer nur in einem eingeschränkten Rahmen von Voraussetzungen und Begriffen möglich. Entfernt man den Rahmen, so fällt man ins Bodenlose. Kant unterscheidet zwischen „meiner Welt“ , der subjektiv wahrgenommenen Welt also, und „der Welt an sich“, der so gedachten objektiven Welt, die in letzter Konsequenz sich der Wahrnehmung immer entzieht. Kant zeigt so die **Grenzen der Erkenntnis**. Heisenberg hat nun Grenzen der Erkenntnis in der Mikrowelt der physikalisch messbaren Grössen mit einem mathematisch formulierten Gesetz sichtbat gemacht. Damit werden diese Grössen als gut gemeinte Begriffsbildungen entlarvt, deren Sinnhaftigkeit bei genauerem Studium an Grenzen stösst.

5.5.3 Ausblick auf die Teilchenstruktur der Materie

Demokrit postulierte schon in der Antike, dass sich die Materie aus Atomen (unteilbaren Teilchen) zusammensetzt.
Dalton (bekannt als der erste Chemiker, Bierbrauer) fand das Gesetz der konstanten und multiplen Proportionen, was auf kleinste Einheiten schliessen lässt.
1885 entdeckte der Gymnasiallehrer **Balmer** aus Basel die Balmer–Serie (Spektrallinienserie im Wasserstoff). Damit beginnt die **Atomphysik**.
1909 entdeckte Ernest **Rutherford** den Atomkern aufgrund von Streuexperimenten. Sein Atommodell hat die Struktur eines Planetensystems (Kern, kreisende Elektronen).
Nach Niels **Bohr** (ca. 1913) ist die nächste Verfeinerung des Atommodells benannt. In ihm können sich die Elektronen nur auf bestimmten Bahnen bewegen, die eine sogenannte „Quantenbedingung“ erfüllen (**Quanten** sind kleinste Einheiten). Bei stehenden Elektronenwellen ist der Bahnumfang ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge. Man spricht schon von der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens, die zeitlich nicht ändert. Wegen der Unschärferelation verliert das Modell für kleine Bahnen aber den Sinn.
In der nächsten Verfeinerung operiert man mit dem Begriff des Orbitals. Ein Bereich mit hoher Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons heisst Orbital $\rightsquigarrow$ **Orbitalmodell**.

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts ist klar geworten, dass die Atome eine innere Struktur besitzen. Man hat dann nach und nach entdeckt, dass die Teilchen, welche diese innere Struktur ausmachen (z.B. Kern: Protonen und Neutronen) wieder eine innere Struktur haben. Auf diese Weise gelangt man zu den Elementarteilchen, welche man sich heute wiederum aus den Quarks aufgebaut denkt. Das Atom, das Unteilbare, ist also teilbar geworden — zum Nutzen und zum Schaden der Menschen, wie man auch aus den nie endenden Energiediskussionen weiss.

5.5.4 Ausblick auf die Kosmologie

Stand um die Jahrhundertwende

Heute wissen wir aus den Beobachtungen und ihren plausibelsten Erklärungshypothesen auf der Grundlage der Physik und der Mathematik sehr viel über das für uns vorläufig unerreichbar ferne Weltall. Die wichtigsten Punkte seien hier zusammengefasst:

1. Es gibt noch andere Sonnensysteme, die Planeten besitzen. Wir sind nicht die einzigen.

2. Sterne oder Sonnen haben eine beschränkte Lebensdauer. Sie haben eine Geburt aus einer Gaswolke und später einmal einen Tod als weisser Zwerg, Neutronenstern oder als schwarzes Loch.

3. Unsere Sonne ist in der Klassifikation im Herzsprung–Russel–Diagramm (Spektraltyp–Temparatur–Beziehung) ein G5 –Stern im mittleren Lebensalter. Später wird sie sich einmal zu einem roten Riesen ausdehnen und dann auch die Erdbahn mitsamt der Erde schlucken, bevor die später dann kollabiert.

4. Viele Sterne als Gruppe können Sternhaufen diverser Art bilden. Sternhaufen bilden wiederum lokale Haufen und dann Galaxien diverser Art. Wir gehören zur Galaxie der Milchstrasse, die noch niemand von aussen gesehen hat. Dass die Milchstrasse eine Galaxie ist, wurde von Becker in Basel durch Abstandsvermessungen an sehr vielen Sternen festgestellt. Im Diagramm werden so Spiralarme sichtbar. Wir sind also in einer Spiralgalaxie zuhause.

5. Viele Galaxien bilden Galaxienhaufen. (Wir gehören zum Virgo–Haufen.) Man kann auch Superhaufen finden. Schliesslich bildet das Ganze den Kosmos.

6. Je entfernter eine Galaxie ist, desto stärker sind die Spektrallinien ins Rote verschoben. Mit Hilfe des Doppler–Effektes erklärt man die Rotverschiebung durch eine Fluchtbewegung. Die Fluchtgeschwindigkeit kann man berechnen. Das Hubbelsche Entfernungsgesetz sagt, dass die Fluchtgeschwindigkeit mit dem Abstand etwa proportional zunimmt. Grenzgeschwindigkeit ist aber die Lichtgeschwindigkeit. Auf diese Weise kommt man zum Begriff des Radius des Universums.

7. Rechnet man aus dem Radius des Universums und der Fluchtgeschwindigkeit c die Fluchtzeit zurück, so kommt man zum Begriff des Alters des Universums. An den Beginn stellt man den Urknall.

8. Die Frage, ob sich das Universum in alle Ewigkeit ausdehnen wird — oder ob es einmal wieder in sich zusammenfallen wird, letztlich also auch eine Frage nach der kinetischen und der potentiellen u.s.w. Energie — ist in den letzten Jahren beantwortet worden: Das Universumm wird sich immer ausdehnen und somit ausdünnen. (Doch inzwischen gibt es schon wieder eine Verfeinerung der Theorie die besagt, dass sich das Universum nach dem Ausdünnen wieder zusammenziehen wird und vermutlich dann wieder kollabiert.)

9. Ein Blick an das Firmament ist für uns immer ein Blick in die Vergangenheit. Denn das Licht, dass im Moment in unser Auge fällt, war während der Zeit $t = \frac{s}{c}$ unterwegs, kommt also aus der Vergangenheit. Diese Vergangenheit ist umso ferner, je weiter das Licht herkommt. Wäre es seit dem Urknall unterwgs, so müsste man also den Urknall sehen, und dies in allen Richtungen! Das aber geht leider nicht, weil damals die physikalischen Realitäten anders waren. Es gab insbesondere noch keine Sterne und Galaxien, die Licht ausgesendet haben, denn diese haben sich erst später gebildet. Will man diese Dinge verstehen, so muss man sich tiefer in die Theorie einarbeiten.

10. Die Frage, ob nicht neuere Messungen und feinere Beobachtungen uns irgendwann einmal zu einem verfeinerten Modell des Universums zwingen, ist von der Natur der Frage her eine immer ungelöste Frage. Denn wir kennen immer nur die Resultate der Messungen der Vergangenheit mit Bestimmtheit, nie aber die Resultate der Messungen der Zukunft.

11. Alle diese Einsichten sind nicht möglich aufgrund direkter Wahrnehmung. Es handelt sich immer um Deduktionen mit Hilfe der Mathematik aus Modellen resp. Axiomensystemen (Axiome sind hier physikalische Annahmen). Sie stimmen nur solange, wie auch die Mathematik stimmt und die verwendete Mathematik auch die richtige ist für den betrachteten Fall — und auch nur solange, als die Axiome gültig sind. Vor allem ist die Annahme, dass überall die gleichen Naturgesetze gelten, ein Axiom, das bisher nur auf der Erde resp. in der näheren Sonnenumgebung überprüfbar war.

12. Wer mehr über diese Dinge erfahren und auch mitreden will, der hat ein Studium vor sich.
Jedoch ist kaum bestreitbar, dass mit dem Alter, der Grösse, der Masse und der künftigen Ausdünnungsdauer des Universums auch die Grenzen der makroskopischen physikalischen Welt sichtbar gemacht sind. Auch hier stellt sich schliesslich die Frage der Sinnhaftigkeit der Begriffsbildungen des Mikrokosmos bei der Anwendung auf den Makrokosmos.

Paradoxien

Nimmt man an, das Weltall sei in jede Richtung unendlich und die Sterne ewig, so sieht man sich sehr rasch mit fürchterlichen Paradoxien konfrontiert. Dies bleibt auch so, wenn man die gemachten Grundannahmen nur zum Teil einschränkt.

1. **Das Paradoxon von Johannes Kepler und Willhelm Olbers:** Nimmt man an, das Weltall sei in jede Richtung unendlich und die Sterne ewig, so müsste man in jeder beliebigen Richtung am Himmel einmal auf einen Stern treffen. Summiert man die so entstehende Helligkeit auf, so müsste der Nachthimmel in jedem Punkt mindestens so hell erscheinen wie die Sonne am Tag. Das stellen wir aber nicht fest.

2. **Das Paradoxon von Isaac Newton:** Gäbe es im Weltall seit ewig unendlich viele Sterne und daher unendlich viele Massen, so würden wegen diesen Massen bei uns unendlich grosse Anziehungskräfte resultieren. Alles würde zerrissen! Das stellen wir eben nicht fest.

3. **Das Paradoxon von Ernst Mach:** Erklärt man das Trägheitsgesetz durch die Massen ferner Sterne und Galaxien, so würden bei unendlich vielen Sternen die Trägheitskräfte unendlich. Es gäbe keine Bewegung. Alles stünde still! Das stellen wir auch nicht fest.

4. **Das Paradoxon von Lichtgeschwindigkeit, Wellenlänge und Zeit:** Bisher konnten durch Messung keine Wellenlängen über einer gewissen grössten Länge gefunden werden. Man müsste daher annehmen, dass die Wellenlängen beschränkt sind. Wenn es so eine grösste Wellenlänge gibt, gibt es wegen $c = const. = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$ auch eine grösste Zeit T und daher eine kleinste Frequenz ν, in Widerspruch zur Ewigkeit der Zeit in beide Richtungen.

5. **Der Lösungsvorschlag von Edgar Allan Poe:** (Poe war auch Kosmologe, nicht nur Schriftsteller.) Obige Paradoxien sind entschäfbar, wenn man annimmt, dass das Alter des Weltalls nicht unendlich ist. Wir gelangen so zur Idee des Urknalls.

6. **Der Lösungsvorschlag von Bernhard Riemann:** Eine wesentliche Entdeckung des 19. Jahrhunderts war, dass es verschiedene Geometrien gibt. Dass unsere Welt nach der euklidschen Geometrie funktioniert, ist keine Tatsache, sondern bloss eine Annahme. Es könnte auch anders sein. Der vierdimensionale Raum (inkl. Zeit) könnte gekrümmt sein (z.B. analog einer Kugeloberfläche). Der Raum könnte daher endlich sein, gleichwohl aber unbegrenzt.

7. **Der Lösungsvorschlag von David Hilbert und Albert Einstein:** Diese hatten es geschafft, eine Formel zu berechnen, die den gekrümmten Raum beschreibt. Die Krümmung ist dabei eine Folge der Massenverteilung, welche jedoch nur durch Messung gefunden werden kann. Heute ist man aufgrund der Kenntnisse der Ansicht, dass der Raum sehr wenig gekrümmt ist.

8. **Der Lösungsvorschlag von Schwarzschild:** Der Raum könnte „verschlungen“, d.h. die Krümmung nicht überall gleich sein.

9. **Der Lösungsvorschlag von Luminet und Jeff Weeks:** Der vierdimensionale Raum könnte „sechsfach verschlungen“ sein. So wie man einen Torus (Ring) aus Papier durch vorausgehendes Verkleben zu einer Röhre und nachgängiges Verkleben zu einem Ring gewinnen kann, d.h. durch zweimaliges Verkleben, müsste man hier sechsmal verkleben. Statt einmal zu verkleben kann man auch am Papierende je einen Spiegel, also zwei Spiegel anbringen. Man erhält so als Bewohner auf dem Papier ein analoges Bild. Bei sechsmaligem Verkleben führt das zu sechs Achsen mit je zwei Spiegeln, also zu zwölf Flächen. Das Modell dazu in der Dimension drei ist der Dodekaeder(!).

Dem Architekten sollte nun die folgende Frage sehr wichtig sein: Wie tangieren diese Weltsichten bewusst oder unbewusst die Architektur? — Eines kann der Architekt sicher nie, nämlich aus der Realität austreten. Er ist immer irgendwie ein Kind seiner Zeit, tangiert von den Weltbildern, die zu seiner Zeit gehören.

Zentral im aktuellen Weltbild ist die Erkenntnis und die Bezifferbarkeit der Grenzen des physikalischen Makro– und auch des Mikrokosmos vor dem Hintergrund der bereits abgesteckten Grenzen der Erkenntnis und der Begrifflichkeit (im Vergleich zu den „Chiffern“ Jaspers). Dabei mutet es seltsam an, des gerade jetzt, in dieser unseren Zeit, auch die Grenzen des Menschen auf dem Planeten Erde ins Scheinwerferlicht der Aktualität treten: Bewusst geworden sind ebenso die ökologischen Grenzen, die Grenzen der Verdreckung, der Ernährbarkeit, der Reserven, des Wohlstandes, des Wachstums, die Grenzen der Abgrenzbarkeit diverser Kulturen, und die Grenzen der Beschränkbarkeit von Konflikten vor dem Abgrund zur totalen Vernichtung und so fort.

Neuere Erkenntnisse (Februar 2003) finden sich auf:

http://www.rowicus.ch/Wir/News/Kosmologie.pdf

oder

http://map.gsfc.nasa.gov/

5.6 Rückblick auf die Ursprünge mathematischer Begriffsbildungen

Man kann sich nun rückblickend fragen, wie der Mensch denn dazu gekommen sein mag, überhaupt mathematische Begriffe wie Zahlen, oder geometrische Objekte, zu bilden. Sicher ist die Entwicklungsstufe solcher Begriffsbildungen kulturabhängig. Jedoch kennen wir vermutlich keine Kultur, die keinen Ansatz etwa zum Zahlbegriff entwickelt hat, obwohl je nach Nutzen der beobachtbare Fortschritt gross oder klein ist. Am Polarkreis z.B., wo die Menschen im ständigen Kampf gegen Kälte und Eis nur wenige Dinge ansammeln konnten und immer nur wenige Tiere zum Essen gejagt hatten, denn viele konnten sie nicht schleppen, kennt man teils in den Sprachen nur Ausdrücke für die ersten Zahlen. Weitere, grössere Zahlen waren ja nutzlos. In unseren Breiten dagegen war es nützlich, wenn auch vorerst nur theoretischer Art, sogar unendliche Mächtigkeiten zu denken und damit zu arbeiten. Der Mensch hat also die mathematischen Begriffe bedarfsabhängig entwickelt.
Es ist gut vorstellbar — und aus Plausibilitätsgründen auch zu vermuten, dass der Mensch die mathematischen Grundbegriffe vorerst aus der Wahrnehmung abgeleitet hat. Geometrische Grundgebilde wie Punkt, Gerade, Kreis, Ebene, Raum beruhen aus dieser Sicht auf dem Gesichtssinn und der Fähigkeit der Bewegung, des Durchschreiten des Raumes und der daraus folgenden Urerfahrungen. Symmetrie hätte daher seine begrifflichen Wurzeln im Gleichgewichtssinn sowie in der durch den Gesichtssinn gegebenen Fähigkeit zum Vergleich. Zahlen wiederum haben in dieser Sichtweise ihren Geburtsort im Rhythmus, z.B. gegeben durch die Atmung oder den Herzschlag. Andererseits vielleich auch im Gesichtssinn: Infolge der Fähigkeit zur Unterscheidung von Objekten, also infolge der Urteilsfähigkeit, oder infolge der Fähigkeit zur Zusammenfassung, zum „Zusammensehen“ von Objekten oder auch in der Fähigkeit zur abfolgeartigen Identifikation von Dingen. Historisch gesehen mag der Prozess der Teilung einer Einheit, oder einer Sache, zu den natürlichen Zahlen geführt haben bevor der Prozess des ständigen Anreihens oder Weiterschreitens zentral wurde, wie etwa bei Perlen auf einer Schnur ohne Ende. Das kann die späte Entdeckung der Null als Zahl erklären. Teilen ist zudem moralischer als anhäufen.

Jedoch der Schritt vom prozesshaft durch zählen gewonnenen Unendlichen, der Schritt also vom Unendlichen von der Art der natürlichen Zahlen zum Unendlichen hin von der Art der Mächtigkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, kann nicht aus der endlichen materiellen physikalischen Welt begründet werden, denn diese bleibt immer endlich. Unendliche Mächtigkeiten verschiedener, unvergleichbarer Stufen zu erkennen wie etwa die erwähnten natürlichen Zahlen oder reellen Intervalle, bedarf neu des Willens zur Abstraktion, zur Bildung neuer Begriffe, aufgrund eines reifen Urteils. Ebenso reicht die Hoffnung ins Unendliche, wenigstens zeitlich. Ähnlich verhält es sich mit unendlich ausgedehnten Gebilden in der Geometrie (Geraden, Ebenen u.s.w.) und unendlich fernen Gebilden in der projektiven Geometrie. Wille, Urteil und Modell mögen in der endlichen Welt gereift sein, doch reicht die Erkenntnis der verschiedenen Unendlichkeiten dann durch den Prozess der Abstraktion über diese endliche Welt hinaus in eine andere, nicht mehr durch das Endliche abschliessend begründbare Begriffswelt, die daher keine materielle mehr sein kann. Man mag sie, sofern man will, eine Welt der geistigen Objekte oder Realitäten nennen. Durch den Tatbeweis steht jedoch fest, dass der Mensch durch Abstraktion den Sprung in eine höhere Organisationsform schafft, die in der materiellen Wirklichkeit nach heutigem Wissensstand keine physikalische Entsprechnung mehr findet. Oder doch? Und wenn ja, dann wo?
Neugierig machen einem diese Fragen allemal, und staunen können wir über die Resultate. Wir erfahren hier etwas über die Grenzen unserer Erkenntnismöglichkeiten, wir schreiten, doch noch halbwegs begreifend, ins „Umgreifende“. Weiter kommen wir dort nur, wenn wir uns keine Bilder mehr machen, die ja immer aus der materiellen, physikalischen Erfahrungswert entlehnte Bilder sind; wenn wir also abstrakt, abstrahiert vom Bildhaften, nach unseren Möglichkeiten nur noch formal, weiterschreiten im Vertrauen auf das schon errichtete Fundament...

Kapitel 6

Einige begriffliche Grundlagen

6.1 Astronomische Begriffe und Befriffliches zu Zeit und Kalender

Auszug von Begriffen aus dem Kurs des Autors über Sonnenuhren, unverändert übernommen

6.1.1 Koordinatensysteme

Begriffe:

Kartesisches Koordinatensystem: Bekannt aus der Vektorgeometrie.

Sphärisches Koordinatensystem: Bekannt aus der Vektorgeometrie und Analysis.

Himmelssphäre: Gedachte Kugel mit der Erde im Zentrum (vgl. antikes Weltbild).

Geographisches Koordinatensystem: Grundebene durch Äquatorgrosskreis (Grundkreis). Dazu gehören im Raum Nord– und Südpol.
$\Rightarrow$ **geographische Breite** = Winkelabstand vom Grundkreis oder vom Pol $\Rightarrow$ **Breitenkreise**.
Längskreise (Meridiane) = Grosskreise von Pol zu Pol. Ausgangspunkt: **Nullmeridian** durch Greenwich $\Rightarrow$ **geographische Länge**.

Zenit: Punkt auf der Himmelssphäre auf der Vertikalen *über* dem Beobachter (oberer Pol).

Nadir: Punkt auf der Himmelssphäre auf der Vertikalen *unter* dem Beobachter (unterer Pol).

Meridianebene (Meridian): Ebene die bestimmt ist durch den Nord– und Südpunkt des Horizonts sowie den Zenit.

Nordpunkt des Horizonts: Punkt auf der Himmelsphäre in Richtung Norden, wenn sich der Beobachter an einem beliebigen Punkt der Erde (ausser an einem Pol) befindet.

Südpunkt des Horizonts: Punkt auf der Himmelsphäre in Richtung Süden, wenn sich der Beobachter an einem beliebigen Punkt der Erde (ausser an einem Pol) befindet.

Horizontsystem: Natürliches System des Beobachters. Grundkreis = Horizont. Oberer Pol = Zenit. Unterer Pol = Nadir. Längskreise: Grosskreise durch Zenit = Vertikalkreise oder Höhenkreise. **Nulllängskreis = Vertikale durch den Südpunkt = Meridian. Koordinaten: Höhe und Azimut.**

Höhe: Winkel vom Horizont nach oben zum Objekt.

Azimut: Winkel zwischen Vertikalen durch das Objekt und Meridian. (Links– und Rechtssysteme)

Windrose der Astronomen: Azimut a von der Südrichtung aus zum Objekt im Uhrzeigersinn gemessen.

Windrose der Geometer und Navigatoren: Azimut a_n von der Nordrichtung aus zum Objekt im Uhrzeigersinn gemessen, $a_n = a + 180^o$.

Knoten: Schnittlinie zweier Ebenen.

Äquatorsystem: Projektion des Erdnetzes vom Erdmittelpunkt aus an den Himmel (festes System, bewegliches System).

Festes Äquatorsystem: Grundkreis = Himmelsäquator fix zu Erde, Nord– und Südpol = Verlängerung der Erdachse. Null–Längenkreis = Grosskreis Pol–Zenit–Südpunkt = Meridian. Nordpol sehr nahe beim Polarstern. Koordinaten: **Deklination** und **Stundenwinkel**. (Verwendung: Astronomie, Fernrohre.)

Deklination δ: Abstand vom Äquator. δ bleibt für einen Stern im Laufe des Tages unverändert. (δ ist für einen Stern fix am Himmel.)

Stundenwinkel t: Abstand des Längskreises durch ein Objekt vom Meridian. Links– und Rechtssysteme. t durchläuft im Laufe des Tages alle Werte. t wird meisst nicht im Gradmass, sondern im Zeitmass gemessen (z.B. seit dem Meridiandurchgang eines Sterns vergangene Zeit).

Bewegliches Äquatorsystem: Grundkreis = Himmelsäquator, Nord– und Südpol = Verlängerung der Erdachse. Null–Längenkreis = Stundenkreis durch Frühlingspunkt. Koordinaten: **Deklination** und **Rektaszension**. (Verwendung: Astronomie, Kataloge.)

Frühlingspunkt: Ort der Sonne an der Sphäre zu Frühlingsbeginn = Schnittpunkt der Sonnenbahn mitÄquatorebene.

Rektaszension α: Winkelabstand der Stundenkreise durch das Objekt (z.B. Stern) und Frühlingspunkt. (α ist für einen fix am Himmel.)

Stundenwinkel Frühlingspunkt: $\Theta = t + \alpha$

Ekliptik: Bahn der Sonne im Laufe des Jahres resp. Erdbahn = Finsternislinie (griech. ekliptis).

Schiefe der Ekliptik ε: Neigung der Ekliptik gegen den Äquator = Abstand Nordpol–Ekliptikpol $\equiv 23.5^o$.

Ekliptikebene: Erdbahnebene oder Sonnenbahnebene.

Erdbahn um Sonne: Ca. Ellipse. Für die Mechanik muss der Schwerpunkt Erde–Mond betrachtet werden! Dieser liegt etwa $3/4$ Erdradien vom Erdmittelpunkt entfernt, d.h. noch innerhalb der Erde. (Erde–Mond–Sonne: Dreikörperproblem.)

Perihel: Sonnennächster Punkt.

Aphel: Sonnenfernster Punkt.

Perigäum: Kleinste Entfernung Erde–Mond.

Apogäum: Grösste Entfernung Erde–Mond.

Wahre Anomalie: Winkel von der Sonne aus gesehen zwischen Perihel und Erde.

Ekliptikalsystem: Grundkreis = Ekliptik. Null–Längenkreis = Grosskreis durch Frühlingspunkt $\Rightarrow$ Schnittpunkt Äquator–Ekliptik. Koordinaten: **Ekliptikale Breite** β und **Ekliptikale Länge** λ. (Rechtssystem, Verwendung: Mechanik des Planetensystems.)

Galaktisches System: Grundkreis = galaktischer Äquator 0 Milchstrassenebene. Null–Längenkreis alt $\Rightarrow$ Schnittpunkt mit Äquatorebene. Null–Längenkreis neu $\Rightarrow$ Zentrum der Milchstrasse. Koordinaten: **Galaktische Breite** b^I, b^{II} und **Galaktische Länge** l^I, l^{II}. (Rechtssystem, Verwendung: Milchstrassenforschung.)

Sphärische Trigonometrie: Trigonometrie an Dreiecken auf Kugelsphären, vgl. Abschnitt oder Literatur.

Nautisches Dreieck: Dreiecke auf einer Kugelsphäre.

Astronomisches Dreieck: Nautisches Dreieck.

Knoten: Schnittlinie zweier Ebenen.

Meridiankonvergenz: Abweichung der senkrechten Koordinatenlinien der Landkarte von der Nordrichtung. Betrifft die Landkarten der Schweizerischen Landestopographie. Koordinatenursprung ist die alte Sternwarte Bern.

Arbeit

Mache Dir die erwähnten Begriffe klar mit Hilfe von Skizzen und Modellen! Konsultiere auch die Literatur!

Material: Stricknadeln, Schaumstoff, Styroporkugeln, Karton, ...

6.1.2 Bewegung von Erde und Sonne

Begriffe:

Rotation: Drehung der Erde um die eigene Achse. $\Rightarrow$ Tag und Nacht.

Revolution: Drehung der Erde um die Sonne. Erdachse schief zur Erdbahnebene (Ekliptik) $\Rightarrow$ Jahreszeiten.

Präzession: Kegelartige Rotation der Erdachse (25'700 Jahre $\Rightarrow$ Platonisches Jahr).

Platonisches Jahr: Zeit für einen Rotationsumlauf der Erdachse bei der Präzession.

Nutation: Der Präzession aufgelagerte Nickbewegung der Erdachse.

Kardinalpunkte des lichten Tages: Sonnenaufgang, Sonnenuntergang, wahrer Mittag (Kulmination).

Kulmination: Zeitpunkt des Sonnenhöchststandes.

Äquinoktiums: Tag– und Nachtgleiche. (Frühjahr, Herbst, Widder– und Waagepunkt, Frühlingspunkt und Herbstpunkt.)

Solstitien: Sommersolstitium ⇒ längster Tag, Wintersolstitium ⇒ kürzester Tag. (Wendepunkte des Krebs und des Steinbocks.)

Tierkreis: Hauptsächlich durch Ptolemäus (Nordhalbkugel) und durch Seefahrer sind 88 Sternbilder genannt worden. 12 davon bilden den Tierkreis ⇒ Sternbilder entlang eines Bandes um die Ekliptik:
Widder (Aries), Stier (Taurus), Zwillinge (Gemini), Krebs (Cancer), Löwe (Leo), Jungfrau (Virgo), Waage (Libra), Scorpion (Scorpius), Schütze (Sagittarius), Steinbock (Capricornus), Wassermann (Aquarius), Fische (Pisces).

Zodiac: Tierkreis.

Arbeit

Mache Dir die erwähnten Begriffe klar mit Hilfe von Skizzen und Modellen! Konsultiere auch die Literatur!
Hinweis: **Geographische Koordianten von Biel (BE, CH): 47.09 N / 7.16 E.**
Achtung: Es existiert noch ein Biel im Wallis (CH) und eines in Spanien!

6.1.3 Zeit

Begriffe:

Antike Stunden: Einteilung des lichten Tages in 12 Stunden (in der Antike). Mittag = Ende der 6. Stunde (nach fortlaufender Zählung).
⇒ Antike Sommerstunden sind länger als antike Winterstunden (Jan. $\sim 40'$, Juni/Juli $\sim 1h\ 20'$).
Der antike Tag beginnt am Mittag.

Temporäre Std.: = antike Stunden.

Äquinoktiale Std.: Tag zu 24 Stunden der antiken Astronomen mit konstanter Tageslänge. (Die Länge wird gemessen zur Zeit des Äquinoktiums.)

Babylonische Std.: Stundenzählung seit Sonnenaufgang. (24–Stunden–Tage.)

Griechische Std.: = babylonische Stunden.

Italienische Std.: Stundenzählung seit dem vorangegangenen Sonnenuntergang.
(24–Stunden–Tage.)

Spanische Std.: = italienische Stunden.

Neuezeitliche Stundenzählung: Seit 1. Jan 1925, Zählung der Stunden ab Mitternacht, Datumwechsel um Mitternacht.

Sonnentag: Lichter Tag, durch die Bewegung der Sonne definierter Tag von Aufgang bis zu Untergang.

Kalender: Abendländische Kalender (Gregorianischer und Julianischer Kalender), jüdischer Kalender, mohamedanischer Kalender, Mayakalender, Babylonischer Kalender, altrömische und griechische Kalender, Mondkalender der Nomadenvölker des Ostens etc. etc..

Gregorianischer Kalender: Kalender seit Papst Gregor XIII, 1582 mit Schaltjahrregel. (Alt 4.10.1582= neu 15.10.1582.)

Julianischer Kalender: Kalender seit Julius Cäsar bis Gregor XIII.

Zeitgleichung: Differenz $ZG = wahre\ Zeit - mittlere\ Zeit$ (ändert täglich).

Wahre Zeit: Zeit (Stundenzeit), die am betrachteten „wahren“ Tage durch den Sonnenlauf bestimmt ist = Stundenwinkel der wahren Sonne $+12^h$. (Ungleichmässig: Geschwindigkeit der Sonne variabel $\Rightarrow$ ganzjährige Periode, die Sonne läuft in der Ekliptik, d.h. schief zur Rotationsachse der Erde, geometrischer Effekt, Projektionseffekt auf den Äquator $\Rightarrow$ halbjährige Periode).

Wahre Ortszeit (WOZ): WOZ = wahre Zeit.

Stundenwinkel: Vgl. Behandlung der Koordinatensysteme.

Mittlere Zeit: Mittlere Sonnenzeit, 1790 erstmals in Genf eingeführt: Alle Stunden gleich lang (mittlere Sonnenzeit). Man definiert eine „mittlere Sonne“ , die bei gleicher Umlaufzeit mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Äquator unläuft. Sommer $\Rightarrow$ 186 Tage, Winter $\Rightarrow$ 179 Tage.

Sternzeit: Stundenwinkel des Frühlingspunktes, definiert durch das Äquatorsystem.

Mittlere Sternzeit: Linear mit der mittleren Sonnenzeit, bezogen aber auf das iderische Jahr.

Siderische Zeit: Sternzeit.

Synodische Zeit: Sonnenzeit.

Sterntag: Zeit zwischen zwei Meridiandurchgängen des Frühlingspunktes, = 24 Sternstunden. Wegen der Präzession ist der Sterntag um $0^s.0084$ kürzer als die tatsächliche ideale siderische Rotationszeit der Erde.
Während eines Jahres wandert der Mittagspunkt der Sonne einmal durch den Tierkreis. Die Sonne bewegt sich unter den Sternen von W nach O. Die Erde bewegt sich um die Sonne und rotiert gleichzeitig um die eigene Achse. Wegen der Vorwärtsbewegung um die Sonne muss sie sich von Sonnenkulmination zu Sonnenkulmination um mehr als einen vollen Winkel drehen, da sie die eigene Position ja ändert. Es gilt somit: 365 Sonnentage $= 366$ Sterntage. Der Sonnentag ist um 4 Minuten länger als der Sterntag.

Zeitdefinition: 1790 erstmals in Genf eingeführt: Alle Stunden gleich lang.

Weltzeit: = Greenwichzeit = Universal Time (UZ).

Zonenzeit: Zeitzonen von meist 15^o Länge mit gleicher bürgerlichen Zeit. Bei uns MEZ (mitteleuropäische Zeit).

Mitteleuropäische Zeit, MEZ: Vgl. Zeitzonen.

Ephemeridenzeit: Zeit, gemessen in Ephemeridensekunden, vgl. unten.

Tropisches Jahr: Von Frühlingspunkt bis Frühlingspunkt (ideales Kalenderjahr, tropos: griech. wenden). Jahresbeginn: Nach Bessel (1784–1846), Zeitpunkt, wenn die „mittlere Sonne“ (vgl. Theorie im Text) die Rektaszension 280^o erreicht.

Siderisches Jahr: Von Fixstern zu Fixstern. Der Frühlingspunkt wandert. Jahr ca. $20'$ länger.

Anomalistisches Jahr: Von Perihel zu Perihel.

Gregorianisches Jahr: Seit 1582 nach Papst Gregor XIII in katholischen Ländern (Basel 1700/01 ausser Fasnacht, St.Gallen, Appenzell, evangelisch Glarus 1724, England 1752, Schweden 1753 (1844), evangelisch Graubünden 1780, bündner Gemeinden Schiers und Grüsch 1812![9]), heutige Schaltjahrregel, nicht immer nur alle 4 Jahre: Alle Jahre, deren Jahreszahl durch 100, aber nicht durch 400 teilbar ist, ist kein Schaltjahr. Fehler zum tropischen Jahr: In 3300 Jahren ein Tag.

Julianisches Jahr: Seit Julius Cäsar, beraten vom griechischen Gelehrten Sosigenes, 46 v. Chr., 365 Tage, Schaltjahr alle 4 Jahre. Jahresbeginn 1. Januar.

[9]Schiers und Grüsch werden manchmal als die letzten Gemeinden Westeuropas genannt, die den neuen Kalender eingeführt haben. Das gibt zu denken, wenn man dazu in Betracht zieht, dass in unseren Breiten 1782 die letzte Hexe verbrannt worden ist (Anna Göldin, Glarus) oder dass in der Schweiz das Frauenstimmrecht erst 1971 auf Bundesebene eingeführt werden konnte (dazu in Appenzell erst später infolge eines Bundesgerichtsentscheides).

Lunisolarjahr: Griechisch–römisches Jahr, gegeben durch den Jahreszeitenwechsel. Etwa zwölf Monate, manchmal aber muss ein dreizehnter Monat eingeschoben werden. Jahresbeginn am 1. März.

Altägyptisches Jahr: 365 Tage, gegeben durch den Jahreszeitenwechsel.

Synodischer Monat: 29.53059 Tage, von Phasenwechsel zu Phasenwechsel. Traditionelle Grundlage der Kalender der Juden und Mohamedaner. (Mohamedanischer Kalender: Mondjahr zu 12 synodischen Monaten.)

Platonisches Jahr: Zeit für einen Rotationsumlauf der Erdachse bei der Präzession.

Ostern: Nach dem Konzil von Nicäa (325): Erster Sonntag nachdem ersten Frühlingsvollmond. Berechnung problematisch, Abweichungen zwischen Ost– und Westkirche. Bei uns: Berechnung nach der Osterregel von Gauss (1777–1855). **Interessant: In dieser christlich–römischen Definition des Osterdatums verschmelzen die „mesopotamische“ und die „ägyptische Kalenderkultur“. Der Frühlingspunkt (Jahrzeitenkalender) ist hier genau so wichtig wie der Vollmond (Mondkalender).** Damit beginnt etwas Neues in der Geschichte. Ostern ist auch der Höhepunkt des Christentums.

Christliche Jahreszählung: Seit Abt Dionysius Exiguus, 525 n. Chr.. Problem: Es existiert kein Jahr 0. (In der Antike war 0 als Zahl nicht allgemein gebräuchlich. Eine römische Zahl 0 existiert nicht. Erst durch arabische Vermittlung (also mit der arabischen Expansion, nach Mohameds (Mohammed, Mohammad ...) Flucht nach Medina 622 n. Chr.) ist 0 als Schriftzeichen aus dem Indischen in den Westen gelangt. Nummerierungen hat man vor– und rückwärts mit 1 begonnen. Daher kann in diesem alten System kein Jahr null möglich sein. Es ist also kein Fehler.)

Ptolemäus: Im Almagest: Jahreszählung seit dem babylonischen König Nobonassar, 747 v. Chr.

Römische Jahreszählung: Jahreszählung nach Regierungsantritt der Kaiser oder Konsule. Daneben kontinuierlich seit der Erbauung Roms, 753 v. Chr..

Momamedanische Jahreszählung: Mondjahre seit der Flucht nach Medina, 622 n. Chr..

Jüdische Jahreszählung: Seit der „Erschaffung der Welt“ , 3761 v. Chr..

Kurzlebige Kalender: Während der französischen Revolution in Frankreich (Dezimalsystem!) und während der faschistischen Ära in Italien.

SI–Sekunde: 1956 als Teil des tropischen Jahres 1900 festgelegt. Genauigkeit war nicht ausreichend $\Rightarrow$ 1967 festgelegt als 9192631770–fache Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nukleids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Ephemeriden-sekunde: Länge der astronomischen, durch die Bewegung der Erde definierte Sekunde zu Beginn des letzten Jahrhunderts, 1900.0.

Bemerkungen zum Kalender

Weitere Auskunft erhält man unter dem folgenden Link:

http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Kalendersysteme

Der urprüngliche altrömische Kalender war eine unausgereifte Mischform eines astronomisch an der Sonne orientierten Lunarkalenders. Die Jahre zählte man seit dem 4. vorchristlichen Jahrhundert von der Einweihung des Jupitertempels im Jahre 507 v. Chr. an. Später wechselte man zu einer Zählung beginnend mit der angenommenen Gründung der Stadt Rom im Jahre 753 v. Chr.. Aus dieser alten Periode stammen auch die Monatsnamen. Das Jahr begann mit dem 1. März. Im Jahre 153 v. Chr. verlegte der Senat angeblich den Jahresbeginn auf den Beginn der Amtszeit der Konsuln, den 1. Januar. Im Julianischen Kalender (eine Korrektur auf Geheiss von Julius Cäsar, Einführung von Schaltjahren), war der Jahresbeginn am 1. Januar verbindlich. Mit der Einführung des Christentums änderte das vielerorts wieder: So wurde Neujahr plötzlich am 25. März, am Datum der vermuteten Zeugung Christi gefeiert (nach Julius Africanus, 221 n. Chr.). Andernorts aber auch an Ostern, dem Tag der Auferstehung Christi, womit das Problem des nicht konstanten Osterdatums auf dem Tisch war. In Byzanz wählte man als Jahresbeginn auch den 1. September (dem heute so bezeichneten meterologischen Herbstbeginn), und andernorts begann das Jahr sogar am 25. Dezember, dem seit dem 3. Jahrhundert n. Chr. so geglaubten Tag der Geburt Christi. 1582 wurde der Gregorianische Kalender eingeführt, der sich heute mit wenigen Ausnahmen praktisch überall durchgesetzt hat (sogar in China seit 1949). Damit wurde die Verschiebung des Frühlingsbeginns im Julianischen Kalender beseitigt. Im Jahre 1582 folgte damit auf Donnerstag, 4. Oktober, der Freitag, 15. Oktober. Der Frühlingsanfang ist seither der 21. März, der Tag des Primäräquinoktiums. Von da aus konnte der 1. Januar und damit der Jahresbeginn exakt bestimmt werden. Unter Papst Innozenz XII. verlegte dann schliesslich auch die römische Kirche 1691 offiziell den Jahresbeginn vom 25. Dezember auf den 1. Januar. Damit ist das Problem des Jahresbeginns vor allem in römisch–christlichen Kulturbereich beleuchtet. Wie es damit in andern Kulturbereichen steht, mag der Leser selbst nach Massgabe seiner Interessen abklären.

Arbeit

Mache Dir die erwähnten Begriffe klar mit Hilfe von Skizzen und Modellen! Konsultiere auch die Literatur!

6.1.4 Mond und Monat

Siderischer Monat: Zeit Fixsterndurchgang–Fixsterndurchgang, ca. 27.32166^d.

Synodischer Monat: Zeit Mondphase–Mondphase, ca. 29.53059^d.

Drakonitischer Monat: Zeit Knoten–Knoten, ca. 27.21222^d.

Tropischer Monat: Zeit Frühlingspunkt–Frühlingspunkt, ca. 27.32158^d.

Anomalistischer Monat: Zeit Perigäum–Perigäum, variation 27^d–29^d.

6.2 Sonnenuhren

Prinzip: Die Sonne bescheint einen Gegenstand, der einen Schatten auf eine Fläche im Raum wirft. Dadurch wird die Zeit ablesbar. Der Puls des kosmischen Geschehens wird so fühlbar. Die künstlerische Phantasie in der Ausschmückung trägt das ihre dazu bei.

Einteilung: Nach der Art des Schattenwurfs: Punkt– und Stabsonnenuhren.

Punktsonnenuhr: Schatten eines punktförmigen Gegenstands massgebend (Stabspitze, Lochscheibe, sich nicht schneidende Kurven, windschiefe Drähte ...).(Punktsonnenuhren sind älter als Stabsonnenuhren).

Gnomon: Stab oder Träger der Lochscheibe bei der Punktsonnenuhr (griech Anzeiger).

Gnomonik: Lehre von den Sonnenuhren.

Stabsonnenuhr: Schatten eines Stabs massgebend. Stabsonnenuhren sind einfacher als Punktsonnenuhren und geben in der Regel weniger Information.

Polstab: Stab einer Stabsonnenuhr, parallel zur Erdachse.

Polos: Polstab.

Historisch: Räderuhren als Turmuhren erscheinen erstmals an gotischen Kirchen und Kathedralen (Hochgotik). Die Pendeluhr gilt als eine Erfindung von Huygens (Barockzeitalter.) Taschenuhren sind dann im Zuge der industriellen Revolution populär geworden. Atom– und Quarzuhren Erschienen erst in der 2. Hälfte des 20. Jahrhunderts auf der Bildfläche der globalen Wirklichkeit. Noch gegen Ende des 19. Jahrhunderts hat man Sonnenuhren als Referenz für Turmuhren verwendet. Oft dienten Sonnenuhren auch zur Kontrolle der Bahnuhren (Kollisionen!!)

Ebene Sonnenuhr: Normalfall. Die Projektionsfläche ist eine Ebene. *Wenn nichts anderes vorausgesetzt wird, ist bei uns eine Sonnenuhr immer eine ebene Sonnenuhr.*

Kapitel 7

Notizen zu „Zwischen Freiheit und Strenge“

Textmaterial für eine Präsentation mit vielen Bildern.

7.1 Freiheit und Strenge

Zwischen Freiheit und Strenge — in Kunst, Architektur, Landschaft, Bau:
Ästhetik zwischen den Polen der Formen des Ungebundenen und des geometrisch Geordneten
— doch Form ist immer schon Ordnung.

7.1.1 Kosmos – Chaos

1. Kosmos aus Chaos?
2. Ordnung und Unordnung = Folge der Wahrnehmung?
3. Was ist Chaos?
4. Chaos oder frei dabei integriert inhaftiert balsamiert fix platziert?
5. Gerade da by hahaha.
6. Fisch gesehn?
7. Hier nix verstehn!
8. Brich mal aus!
9. Brich mal auf!
10. Brich mal ein!
11. Brich mal kein Bein!
12. Esel vor dem Abschuss!

13. Abschuss vor dem Esel!
14. Chaos oder doch — Freiheit breit?
15. Chaos? Kosmos? Freiheit? Strenge?
16. Freiheit im Chaos oder im Kosmos?
17. Strenge im Kosmos oder im Chaos?
18. Wer nichts weiss — der penne weiter.
19. Später denken — macht gescheiter?

7.1.2 Freiheit, Ordnung und Strenge

1. Wer die Freiheit über alles setzt ist ein Wilder!
2. Wer Ordnung und Strenge über alles setzt ist ein Barbar!
3. Nach Schiller, Briefe über die ästhetische Erziehung des Menschen.

1. Jede Menge (also auch alles Wahrnehmbare) lässt sich ordnen.
2. Wir leben im Kosmos, einer endlichen Welt.
3. Der Freiheit komme hier keine Existenz zu?

1. Wo liegt die Strenge?
2. Wie weit ist sie einfach, banal?

1. Seit Menschen bauten gibt es die Strenge im Bau.
2. Einfache Strenge, billige Strenge, teure Strenge, jene der Armen, jene der Reichen — und dazwischen die geistige Mauer der Abgrenzung — manchmal deshalb Leichen.

7.1.3 Geometrie und Bau

1. Für die Götter die Geometrie– und dann auch für den Chef!
2. Für die einfachen Leute, das gemeine Volk, das beliebige Durcheinander: das Beinahe–Chaos.
3. Der Beginn der Strenge: Das soziale Sein! Doch nur die Kultur?

1. Geometrie pur — Steinhaufen nur?
2. Konstruktion einer Zeichnung im alten Ägypten:
3. Schon das geometrische Gerüst.
4. Geometrisches Gerüst: Das unsichtbare Dahinter.
5. Das Kleid der Geometrie zeigt sein Wesen.
6. Die Sprache der geometrischen Symbole ist geblieben. Das Gerüst überdauert den Bau.

1. Erst die Vermessung kann das Geheimnis enthüllen.
2. Tempel die klingen.
3. Orpheus der Sänger.
4. Tonleitern — Intervalle — Harmonie oder Kickerickie?

7.2 Philosophiegeschichte — Zahlensymbolik

7.2.1 Winziges aus der Philosophiegeschichte

1. Vorsokratiker: Meist Naturphilosophen.
2. Pythagoras: Alles ist Zahl. (Kosmos ist Ordnung.)
3. Unordnung kommt nicht von den Göttern.
4. Pythagoreer: Finden das Irrationale.

5. Parmenides aus Elea: Ontologie, Orphiker.
6. Schüler Zenon: Dialektik.
7. Schüler Sokrates: Ethik.
8. Zeitgenosse Protagoras: Der Mensch ist das Mass aller Dinge.
9. Schüler Platon: „Platon und eine Epigonen“. Alles ist Schein. Erkenntnisproblem.
10. Akademieschüler Euklid: Sammlung Geometrie. Erstes exakt–wissenschaftliches System.
11. Platon–Schüler Aristoteles: System, Bibliothek.
12. Schüler Alexander: Erobert die Welt, verbreitet die Kultur, beendet den Zwist. Bald Harmonie in Frieden?
13. Rom: Die Techniker, sie wenden es an. Sterben sie mal daran?

7.2.2 Was soll das mit den Zahlen?

1. Alles ist Zahl: Rationale Verhältnisse, Musik, Tonleitern, Tonarten, Zahlenbedeutungen — aus dem Kosmos.
2. Der Mensch ist das Mass aller Dinge: Sein Wesen ist irrational. Goldener Schnitt & Co.
3. Seit Obergeometer Pharao war die Geometrie königliche Kunst, den Göttern. Also für die Tempel.
4. Das niedrige Volk hatte auch hier sehr mittellos zu sein.

7.2.3 Bedeutung von Zahlen, Sphärenmusik

Weiteres zum Thema siehe Seiten 23 ff und 124.

1. Das Individuum: Die Einheit, der Eine. G
2. eschlechter: Dualität.
3. Fortpflanzung: Die Drei, das Leben, das Göttliche.
4. Himmelsrichtungen, Elemente, Würfel: Die Vier. Dualität in der Dualität.
5. Quinta essentia — die Finger, goldener Schnitt, Mensch: Die Fünf.
6. Die Dualität mit der Drei: Die Sechs. Gut und Böse.
7. Die Planeten: Die Sieben.

8. Der Kubus: Drei mal die wirkende Dualität.
9. Der Mond im Sonnenjahr: Der Kosmos, die Zwölf. Manchmal dreizehn.
10. Eines der vier Übel, der Unberechenbarkeiten neben Kometen, Mond– und Sonnenfinsternis.
11. Der Kosmos der Musik, 7 Schritte in 12.

7.2.4 Kurz zur Geschichte

1. Roms Pantheon!
2. Im Zentrum: Der Tempel aller Götter des Reiches!
3. Ein Gleiches: die Hagia Sophia.
4. Heut bewacht — doch nicht neu gedacht — der Geometrie geweiht — sie bleibt.
5. Wie weiter?
6. Dann war Westrom am Ende. Alles Römische wurde christlich. Der Rest verboten.
7. Gegen 500 wanderten die Völker. Die Hunnen sind los!
8. Mittelalter: Römisch — karolingisch — romanisch — gotisch.
9. Im Osten wurde Rom griechisch betrieben. Bis 1453.
10. Dann war Ostrom vom wieder erstarkten Westen bald geplündert, ans Messer geliefert und im Stich gelassen.
11. Denn erst war Byzanz noch eine Weile lateinisch.
12. Das war mit ein Grund des Erfolges der Renaissance und des Neuplatonismus.
13. Diebesgut zu besichtigen vor San Marco.
14. Und so weiter, heiter Krieg. Heiliger Krieg. Wie heilig?
15. Roms Baukunst endet mit dem Spätbarock. Nach Napoleon war Schluss.
16. Nur noch Imitation.
17. Ohne das geometrische Gerüst.
18. Das spült die Neo-Stile zum Schlechten.
19. Zum Beispiel vier Pferde: Diebesgut zu besichtigen vor San Marco — vom Hippodrom in Byzanz.
20. Tief aus der Geschichte mit grossem Gewichte — Berichte.

7.2.5 Und immer wieder Kunst und hier Zahl

1. Kunst, Baukunst richtet sich...
2. Kunst, Baukunst ist nie aus sich alleine, der Zufälligkeit entlang.
3. Kunst, Baukunst richtet sich nach dem gegenwärtigen Weltverständnis. Ach, nach dem Weltbild.
4. Nach den philosophischen, erkenntnistheoretischen und naturwissenschaftlichen Grundlagen.
5. Bau als äussere Hülle, also auch Abbild des Menschen.
6. Mensch als Abbild und Abbild des Menschen — in alten Zeiten:
7. Der Mensch im Kosmos über ihm: Dort „ist alles Zahl“, nur durch Zahlen fassbar, nicht mit Händen.
8. Kosmos und Zeit sind über dem Menschen, beherrschen so den Menschen während er die Erde, die Elemente mit beherrscht.
9. Zahl, ganze Zahl, kosmische Zahl wird zum Symbol, auch des Göttlichen,
10. Rationalen: die Proportion von ganzen Zahlen.
11. Das Irrationale (goldener Schnitt) dagegen ist das Mass des Menschen, das Mass der Natur.
12. Der Mensch verdoppelt den Kubus.
13. Der Mensch quadriert den Kreis — nicht Leonardos Kreis.
14. Fibonacci und goldener Schnitt. Tetraktys

7.2.6 So nochmals: Bedeutung von Zahlen

Weiteres zum Thema siehe Seiten 23 ff und 122.

1. Die Null war keine Zahl. Sie war ungemein potent. An die Eins angehängt verzehnfacht sie den Wert. Doch selbst sit sie nichts. Was war das: So potent und trotzdem nichts? — Das konnte nur einer sein: Der Teufel! So war die 0 lange nicht als Zahl akzeptiert. Und so kommt sie nicht vor unter den Symbolen. Denn die Symbole sind älter als die Anderkennung der Null als Zahl.
2. Die 1: Das Individuum, Einheit, das Eine, das schon im Denken nie alleine sein kann.
3. Erkenntnis ist immer nur zwischen Objekt und Subjekt möglich. Das setzt die Existenz des Erkennenden voraus. Speziell kommt so dem NICHTS keine Existenz zu. Denn das Nichts als Gedachtes ist ein ETWAS, ein Denkinhalt und damit kein NICHTS. Und ein ETWAS kann nie alleine, ohne den Denkenden gedacht werden. Damit ist man immer schon bei der 2 (der Denkende und das Gedachte) und nie bei der 1. Ausser der Denkende denkt nicht. Dann fehlt aber das Bewusstsein und damit die Wahrnehmung...
4. Die 2: Subjekt und Objekt. Die Dualität. Die beiden Geschlechter. Die Spannung...

5. Die 3: Subjekt, Objekt mit der Wahrnehmung. Die Geschlechter mit der Fortpflanzung:

6. Das Leben, die Liebe, das Göttliche. Die Dialektik (These, Antithese, Synthese).

7. Der evident vorhandene Raum (3D). Erfahrung eben. Dreiecke als Kachelung...

8. Die 4: Die Himmelsrichtungen, in der Ebene-2D, wo der Mensch seine Bewegungsfreiheit hat:

9. Dualität in der Dualität. Er kann nicht in die Höhe und Tiefe wie Fisch und Vogel. Die vier Elemente:

10. Die Materie. Die Raum-Zeit (4D). Quadrate als Kachelung. Die Anzahl Extremitäten des Menschen: Sein Handeln. Das Tetraeder...

11. Die 5: Finger einer Hand, Zehen am Fuss zum Zählen. Der goldener Schnitt aus dem 5-Eck: Das Mass des Menschen. Pentatonik... Bei der Tetraktys schworen die Pythagoreer. Das Pentagramm war ihr Erkennungszeichen.

12. Die 6: Sechsecke als 3. Kachelung. Die sechs Kugeln um eine in der Mitte: Vollständige Figur. Die Dualität mit der Drei: Gut und Böse. Davidstern. Das Hexaeder: Würfel...

13. Die 7: Alte Planeten (Wandelsterne). Taktgeber am Himmel. Der Mensch kann sie nicht beeinflussen: Ausgeliefert! Götter! Tonleiter... Die sechs Kugeln mit der siebten im Zentrum: Geometrie!

14. Die 8: Vier und die Dualität. Das verdoppelte Würfelvolumen. Oktaeder. Die Anzahl der Sphären! Ja, die Zahl der grossen Sphären...

15. Die 9: Die Drei in der Drei: Der Baum der Drei. Die Zahl der Sphären mit der Erde: Vollkommenheit! Der Kosmos vollkommen.

16. Die 10: Die Fünf mit der Dualität. Die Anzahl Finger, der Zehen. Der ganze Mensch beim Zählen, rechnen, planen. Die Grundlage des Staates und so des Überlebens am Nil: Grundzahl des ägyptischen Zahlensystems. Die Zahl der Sphären mit Erde und beseeltem Menschen!
Bei der Tetraktys schworen die Pythagoreer: Das Pentagramm war ihr Erkennungszeichen. Endliche Sphären, Erde, unendlicher Geist der Geometrie im Menschen...

17. Die 11: Die Anzahl der vollen Monate mit vollen Tagen (30) im Sonnenjahr. Der letzte Monat (römisch der Februar) wird nicht mehr voll. — Die ursprüngliche halbe Zahl der Buchstaben im Alphabet: Das Alphabet des lichten Tages. „Solothurnerzahl“...
Und die Zahl der Sphären mit Erde, beseeltem Menschen, dazu noch die Engel!

18. Die 12: Die wesentlichste Zahl der Vollmonde, die Hauptzahl aller Mondmonate in einem Jahr (12 mal 29.5 Tage = 354 Tage). Sonnenjahr voll: 366 Tage. Mittel: 360: Gradteilung des Tierkreises. Mondmonate sind für Tiere–züchtende Wüstenvölker wichtig: Wegen der Trächtigkeit. Die halbe Zahl der Buchstaben im neuen Alphabet: Das neue Alphabet des lichten Tages. Zwölf Knoten hat das seilgeknüpfte an Knoten kleinste pythagoreische Dreieck (mit rechtem Winkel). Um einen Tennisball lassen sich zwölf Tennisbälle gruppieren. Es bleibt aber eine kleine Lücke wie bei den Vollmonden. Der Musikkosmos der (Pythagoreer)... Und die Zahl der Sphären mit Erde, beseeltem Menschen, Engel und Gott! ... Wie es gut so war...

19. Die 13: Manchmal hat das Jahr dreizehn Vollmonde, denn es geht nicht auf: Eines der vier kosmischen Übel (neben den manchmal überraschenden Unberechenbarkeiten Unglückkünder „Kometen“, „Mond-“ und „Sonnenfinsternisse“). Zum Knüpfen des kleinsten seilgeknüpften pythagoreischen Dreiecks (mit rechtem Winkel) braucht es dreizehn Knoten im selben Abstand. Um einen Tennisball lassen sich zwölf Tennisbälle mit Lücken gruppieren (Dodekaeder). Der dreizehnte ist kein voller mehr...
Und dazu die Zahl der Sphären mit Erde, beseeltem Menschen, Engel, Gott und jetzt noch die Schlange: der Teufel! „Das kann kein Glück mehr bedeuten...“

20. Weitere wichtige Symbolträger: 15, 21, 16, 20 (Ikosaeder), 21, 22, 24, 30, 33 usw. Man informiere sich dazu in einschlägigen Lexika.
21. Zu den Zahlen als Symbolträger und Erscheinungen in Kunstwerken gesellen sich auch ebene Figuren oder Raumkörper.

1. Rational — irrational: Heute auch im Tonsystem.
2. Für Kachelungen und Ornamente existieren mathematische Theorien Chartres und die Musik.
3. Geometrische Gerüste — oder Gelüste?
4. Mittelalterliche Porte-Feuilles. Der „mystische Leib Christi“ im Kleide der Geometrie (Mystik: Erfahrung einer höchsten Wirklichkeit).
5. Stein gewordene Musik (Goethe zur Kathedrale in Strassburg).

7.2.7 Zeitgeist

1. Naturwissenschaftliches Weltbild und sprachlich–philosophisches Bewusstsein prägen die Welt der Begriffsmuster und daher des Denkens, Fühlens und Wollens. Auch der Kunst.
2. Der Zeitgeist kommt aus der Zukunft herangeschlichen. Oft entschwindet er unerkannt in die Vergangenheit.
3. Wenn am Himmel die Ellipse erscheint (Kepler) — erscheint sie auch in den Bauplänen.
4. Die Geschehnisse in der Umwelt prägen das Denken der Zeitgenossen — und auch der Eidgenossen?
5. Michelangelo trug laut Condivi immer die Geometrie von Dürer in seiner Tasche mit sich herum.
6. Genosse — Zeitgenosse oder Eidgenosse, Schachfigur im System eines Philosophen, dem alleine nur das Denken erlaubt ist?

1. Freiheit?
2. Meine Freiheit?
3. Deine?
4. Freiheit von — Freiheit zu?
5. Freiheit erst ich dann du?
6. Freiheit die ich meine?

1. Ist eine Spur — Zufall nur?
2. Frei? Geboren im Kopfe!
3. Deterministisches Chaos, frei dabei.
4. So was Komisches von Formationen —
5. Äh, Kosmisches — frei?
6. Ein Ende das man gerne locker draussen wieder fände...
7. Doch dann hat die Freiheit zugeschlagen!
8. Kaum zu ertragen!
9. Warnung vor der Freiheit!
10. Lasse die Freiheit nie allein! Freiheit kann gefährlich sein!
11. Zwischen Freiheit und Strenge — fein!

Bemerkung zum folgenden Kapitel

Das folgende Kapitel ist 1990 vom Autor als unabhängiger Artikel konzipiert worden. Der Text (2. Fassung) ist hier praktisch unverändert eigefügt, obwohl einige Punkte des letzten Kapitels darin wiederholt werden. Eine Änderung würde die Einheit stören.

Kapitel 8

Vom Bildungswert der Mathematik

Ein Artikel aus den Jahren 1990/91 (elektronische Rekonstuktion der noch vorhandenen Papier–Fassungen 1 und 2)

Von Rolf W. Wirz–Depierre *©1990, 91, 2000*

Dieser Beitrag gliedert sich in zwei Teile:

- ⊘ *Erster Teil: Über Wertung, Umfeld und Wurzeln*
  (Was soll die Mathematik? Woher kommt sie? Wie und wozu ist sie?)
- ⊘ *Zweiter Teil: Das Sakrale in der Mathematik und die Schönheit*
  (Ausdruck im Kleide der Mathematik)

8.1 Erster Teil: Über Wertung, Umfeld und Wurzeln

8.1.1 Umfeld

Was leitet denn eine Wissenschaft wie die Mathematik, was wirkt auf sie, was prägt sie? Was gab ihr ihre heutige Form? Was ist ihr Zweck, ihr Sinn, was soll's damit? Was bringt sie mir, was der Menschheit? — Fragen über Fragen. Ihre Antworten können uns helfen, ein zeitgemässes Verständnis zu entwickeln, ohne das einem bildungspolitischen Urteil die Reife mangelt. Ohne die Weisheit, wenn Bildung fehlt, funktioniert ein Staatswesen nicht human.

Wollen wir nicht Probleme bekommen, so können wir uns eine Wissenschaft nicht vom Menschen losgelöst denken. Der Mensch als Träger scheint notwendig. Als Wesen gebunden an Zeit, Kultur, soziales Umfeld, zeiteigene Technik, an den jeweils gültigen geistigen Überbau, drücken wir auch der Mathematik den in der uns eigenen Zeit gültigen Stempel auf.

Früher als eine Kunst, nur wenigen Auserwählten vorbehalten, hat diese Mathematik heute Einzug gehalten in den elementaren Schulunterricht und plagt durch ihre wesenhafte Strenge die Studenten vor allem technischer und exakt wissenschaftlicher Richtung bis zur Erteilung von karriereverdächtigen Rängen und Würden.

Als heute dem Berufshungrigen wegweisend festgeschriebene Ziele lesen wir: Die Mathematik soll zur Ausbildung beitragen, aber sie soll auch bilden. Bilden, um dem jungen Menschen Urteilsgrundlagen mit auf

den Berufs– und Lebensweg zu geben, damit er auf bewussterer und umfassenderer Basis zu entscheiden befähigt sei. Das öffnet ihm einen erweiterten Horizont. So steigen also seine Wahlmöglichkeiten: Er wird freier, unabhängiger, reifer. Er kann umfassenderer Verantwortung tragen. Er wird fähiger, den er wird weiser und nicht nur punktuell schlauer.

> *Der schlaue Fuchs benutzt seine Werkzeuge Schlauheit, Sinne, Mund und Pfoten. Zur Weisheit gelangt er dadurch aber nie.*

Und ausbilden? Genügt hier die Mathematik dem Anspruch der Zeit noch? Da streitet ihr wohl niemand im Ernst den Wert ab. Doch erfüllt sie denn die gewünschten Ziele? Wo liegen allenfalls die Probleme, abgesehen von den denkerischen Hürden? — Ausbildung muss ausgerichtet sein auf den praktischen Bedarf der jeweiligen Generation. Ein grosses Problem ist uns nun darin erwachsen, dass in vielen Gebieten der Moderne die Anwendungsgenerationen sehr kurzlebig geworden sind. Vor allem in und wegen computerverbundener Technik. Der Fortschritt "frisst" seine Väter, Anwendungswissen ist häufig Wegwerfwissen, Anwendergenerationen sind "Wegwerfgenerationen". Ein enormer Prozentsatz der vor zehn Jahren ins Berufsleben getretenen jungen Menschen hat heute den angestammten Beruf wieder gewechselt, und man rätselt, was das wen kostet. Da ertönt die Frage nach dem langfristigen Nutzen der momentan so notwendigen Ausbildung, abgesehen von ihrer Funktion als Pflasterstein auf dem Karrierenweg.

In unserer von der Entwicklung überrollten, desorientierten, wertkritischen Zeit müssen wir daher ernsthaft darüber nachdenken, ob kurzfristige praktische Brauchbarkeit noch der einzige bestimmende Wegweiser für Ausbildung sein darf. Immer wieder tritt es doch angstvoll, in heiliger Verklärung formuliert an uns heran: "Wo kann ich das gebrauchen". — Naiv? Unreflektiert? Gebrauchen auf welcher Stufe? Für den nächsten Job? Fürs Leben? Für eine umfassendere Persönlichkeitsentwicklung? Oder um die nächste Klausur erfolgreich zu bestehen? Gewiss kann, so sehen wir, "gebrauchen" heute nicht mehr nur kurzfristig verstanden sein, denn Berufsblider stehen nicht mehr statisch fix. Sie wandeln sich stets. Daher die These: Ausbildung darf heute nicht mehr von Bildung getrennt dastehen. Ausbildung muss heute immer auch Bildung sein, muss Verantwortung pflanzen, muss auch langfristig dem sich immer schneller wechselnden Umfeld genügen. Mathematik in Fachschulen und Hochschulen darf daher durchaus auch ideelle Züge aufweisen, wie sie früher in den "geistigen Parks" der humanistischen Bildungsstätten hochgehalten worden sind und von da die "geistigen Strassen" geebnet haben, auf denen die technische Entwicklung ja "fahren" konnte.

8.1.2 Wo ankert die Mathematik in unserem Wertgefüge?

Sicher bietet die Mathematik der Wissenschaft und Technik direkt anwendbare Methoden und Verfahren: Sie ist hier dienstleistungsorientiert. Daneben kommt ihr aber auch ein allgemeinbildender Charakter zu: Sie ist Kulturgut, Substanz, die es langfristig zu bewahren und zu entwickeln gilt. Substanz, die einen wesentlichen Teil unserer geistig–kulturellen Wurzeln ausmacht, die das Denken, ja allgemein den Überbau derjenigen Kultur prägt, die wir die "abendländische" nennen, aus der wir unbewusst schöpfen, aus der wir leben.
Vor allem schätzen wir den erzieherischen Wert der Mathematik. Lehrt sie uns doch wie nichts sonst so intensiv Denkmethodik, Denkkonzepte, Denkdisziplin, Spürsinn statt Rezepte. Sie mag vielleicht im Beruf anderen Tätigkeiten weichen müssen. Doch wo dort Exaktheit nicht nur auf der Stufe der Hände und der Maschinen den Erfolg bestimmt, da führt kein Weg an solcher Disziplin und Methodik vorbei.
Mathematik ist uns eine Schule des methodischen Denkens in reinster Ausprägung, denn Beweise sind es, die ihr Wesen prägen: Mathematik ist die Wissenschaft vom Beweisen! Falls wir die Prämissen oder Axiome akzeptieren und auch an den logischen Schlussregeln nicht zweifeln, so wissen wir gewiss, dass auch den mit diesen logischen Regeln aus den Prämissen hergeleiteten Theorien Wahrheitscharakter zuerkannt werden muss. Da sich die verwendete Logik im allgemeinen nur auf die Form und nicht auf den speziellen Inhalt der behandelten sprachlichen Gebilde stützt (sie ist nur extentional, nicht intentional), können wir gültige mathematische Folgerungen aus mathematisch formulierten Naturgesetzen ziehen. Denn wir sehen,

erleben und beschreiben die Natur mit unserem Bewusstsein, nach den Gesetzen unseres Denkens also, aus denen die Gesetze der Logik als Extrakt fliessen. So ist eben der Mensch und seine Realität gemacht: Logik beinhaltet ursprünglich das, was unsere Wahrnehmungs– und Denkprinzipien sind. Logik und äussere Erfahrung, Naturgesetze also, stehen so in Analogie, die tiefer liegt als Kausalität. (Unser vorerst naives Weltverständnis kann uns in solchen Dingen sehr täuschen. Das stellen wir auch fest, wenn wir uns vor Augen halten, dass sogar die in der Mathematik verwendete zweiwertige Logik keinenfalls die einzig mögliche Logik ist.) So vermögen wir zeitlich über die Natur zu herrschen: Wir können von einer Brücke sagen, dass sie hält, bevor wir sie gebaut und ausprobiert haben, rein auf der Basis einer Rechnung. Wir können von einem Kometen sagen, dass er erscheinen wird, lange bevor ein menschlisches Auge ihn erblickt. Die äusseren Planeten hat man gefunden, weil man an dem Orte gesucht hat, den man zuvor anhand von Bahnstörungen anderer Planeten vorausberechnen konnte. . .

Wenn von zwei grossen Gelehrten jeder die Wahrheit sagt, beide sich dabei aber widersprechen, so muss dann wohl — um nichts zu riskieren — eben die Wahrheit falsch sein. — Logisch, nicht wahr?

Mathematik ist also die Disziplin der Denksicherheit. Und zwar ist sie nicht nur mechanisch–reproduktiver Natur, was die gemachten Entdeckungen betrifft. Vielfach haben gerade Intuition, Fähigkeit zur kühnen Konstruktion und Interpretation, also künstlerisches Talent, ja der unmittelbare Schöpfungsakt zu neuen Entdeckungen geführt. Man denke etwa an die Theorie der transfiniten Kardinalzahlen, an die Nicht–Standard Analysis, an die Prädikatenlogik höherer Stufe oder an die Klassenkörpertheorie. Nur wer auf mathematisch niederer Stufe stehengeblieben ist, glaubt an die generelle "berechenbare Natur" von Beweisen und somit an eine generelle nutzbringende Ersetzung des Menschen in der gesamten mathematischen Forschung etwa durch künstliche Intelligenz. Oder er ist ein steckengebliebener Konstruktivist. Stellen wir uns doch vor: Wie wollte man dem Computer das Staunen oder die Unlust beibringen? Wie kann man es erreichen, dass ein Computer an die Machbarkeit einer neuen, bisher verbotenen (doch später als segens– und konsequenzenreich erkannten) Idee glaubt und nicht einfach ein Programm abhaspelt? Wie soll ein Computer Begriffe bilden oder sich Fragen stellen, die durch das kulturelle Umfeld des Menschen bedingt sind, "gesunden Menschenverstand" erfordern und zum Teil religiöse oder philosophische Wurzeln haben, ohne dass ihm vorher ein Mensch durch ein Programm die Angelegenheit beigebracht hat? Die Geschichte der Mathematik lehrt uns, dass jene Wurzeln wesentliche mathematische Entdeckungen angeregt haben.

Wenn die Intelligenz künstlich sein kann, muss dann nicht auch die Dummheit künstlich sei können? Und überhaupt, wäre Sokrates intelligent gewesen, hätte er als Weiser von sich behaupten können zu wissen, nach welchem Massstab Intelligenz zu messen sei? Oder wäre er dann vielleicht, da Intelligenz ja künstlich und identisch der natürlichen Intelligenz sein kann, eben künstlich intelligent und dazu massstäblich weise gewesen, so wie eine künstliche Eule?

8.1.3 Die historische Dimension der Mathematik

In unserer Realität ist alles in der Zeit. Auch das Denken. Und auch platonische, ideale "geistige Realitäten": abstrakte Denkinhalte wie wunderschöne vollkommene Kreise, Geraden, Zahlen etc., von denen wir glauben, dass sie sich in der Zeit nie ändern. Doch sie sind durch uns in der Zeit. Daher hat jedes Ding seine Geschichte. Ein Ding verstehen zu wollen, es einkreisen zu wollen, kann somit kaum gelingen, ohne seine Herkunft einzubeziehen. Also scheint es uns ratsam, auch zur Beurteilung der Mathematik erst etwas ihre Geschichte zu befragen.

Schon Aristoteles nennt Mathematik als eine der theoretischen Wissenschaften. Im Mittelalter dann, in der Scholastik war sie ein wesentlicher Bestandteil der sieben "artes liberales" (nach Boethius) welche sind: Geometrie, Arithmetik, Astronomie, Harmonielehre sowie auf sprachlicher Seite Rhetorik, Grammatik und Dialektik. Im Gegensatz dazu stehen die "artes mechanicae[10]". Vgl. Seite 69.

Gehen wir in der Geschichte weiter zurück, noch vor Aristoteles, so stossen wir auf die Pythagoräer, eine aus heutiger Sicht wohl "religiöse" Gemeinschaft mit orphischen Zügen, die mit ihrer Ausstrahlung die vorchristliche antike Welt sicher im philosophischen und wissenschaftlichen Bereich wesentlich geprägt und auf ethischer Seite dem Christentum vieles vorgezeichnet hat. Verschiedene antike Autoren teilen die Pythagoräer auf zwei unterschiedliche Arten in zwei Gruppen ein: Einerseits sind da die Esoteriker (innerer Kreis) und die Exoteriker (äusserer Kreis). Andererseits hat man unterschieden die Mathematiker (diejenigen, die die Mathemata, d.h. die Lerngegenstände Arithmetik, Geometrie, Harmonik und Astronomie pflegten) sowie die Akusmatiker (vgl. (Bib.: A1)). Hier also sind die "Mathematiker" in die Geschichte getreten!

Doch wer waren die Akusmatiker? Über sie schreibt Iamblichos: "Die Philosophie der Akusmatiker besteht aus Sprüchen (Akusmata) ohne Beweis und ohne Begründung. ¡ So und so muss man handeln.¿ ... halten sie doch auch in ihren Kreisen diejenigen für die Einsichtigsten, welche die meisten Sprüche erfasst haben." (Vgl. (Bib.: A1).) Dem geneigten Leser kommt die Frage, ob man der Wahrheit zuliebe nicht hier oder dort die Fachbezeichnung "Mathematik" streichen und dafür "Akusmatik" setzen müsste...

Doch was war vor den Pythagoräern, was war vor Pythagoras? Was hat den Menschen überhaupt dazu gebracht, Mathematik zu treiben? Und wie kommt er zu so hochgeistigen Fragestellungen (als Beispiel möge die höhere Zahlentheorie dienen), die ohne praktischen, ohne ökonomischen Nutzen sind, die aber die grössten Genies der Menschheit fasziniert und beschäftigt haben? Wie soll ein Profaner das verstehen? Oder berühren sich hier etwa die Extrema, Genialität und Verrücktheit?

8.1.4 Die vier Wurzeln mathematischen Handelns

Die praktische Nützlichkeit

Das Argument der Utilitaristen war in der Mathematik wohl nie umstritten. Auf Mathematik basierende Navigation muss bei den Seefahrern und Wüstenreitern der Vorzeit eine lebenserhaltende Technik gewesen sein. Oder man denke an die Wichtigkeit von Kalenderarithmetik oder Buchführungsarithmetik für den Handel. Eines der ältesten bekannten schriftlichen mathematischen Dokumente ist der im British Museum verwahrte Papyrus Rhind, der zurückgeht auf einen Text aus dem mittleren Reich (2000 bis 1800 v.Chr.). Es handelt von der Berechnung von Lohnsummen, Getreidemengen, aber auch Flächeninhalten (vgl. (Bib.: A2)). Von noch vorher sind "statistische Erhebungen" aus der frühsten ägyptischen Geschichte allgemein bekannt. Neben der Arithmetik begegnet uns hier in Ägypten vor allem in den Pyramiden aber exakte Geometrie. Sie scheint das Kind der ägyptischen Harpedonapten (Seilspanner) zu sein, denn im Niltal stand man alljährlich nach der regelmässig wiederkehrenden Überschwemmung vor der Aufgabe, das Land der Felachen neu zu vermessen. Dem Frieden zuliebe... Und heute? Gerade wegen ihrer praktischen Nützlichkeit durchdringt die Mathematik Technik, exakte Wissenschaften, Ökonomie, Sozialwissenschaften und so fort. (Vgl. Abbildung 39 – 41 und Abbildung 42 – 44.)

8.1.5 Nach dem Nutzen der Überfluss: Das Spiel

Auch Müssigang unter musischer Obhut war oft die Triebfeder zu neuen Erkenntnissen: Das Spiel als Freund — das Spiel als Laster. Diesem Trieb gehorchend konnten die Menschen damals die Zeit, die sie mit Hilfe der

[10] Heutige Künstler galten vor Beethovens Zeit noch als gewöhnliche Handwerker, die Artes mechanicae ausübten. Sie waren oft nicht einmal selbständig in Zünften organisiert. So waren zu Michelangelos Zeiten in Florenz die Bildhauer bei den Goldschmieden zünftig, die Maler bei den Ärzten und Apothekern. Später wandelten sich die Höfe und auch die Künstler. Die Hofnarren verschwanden — die Rolle musste neu besetzt werden...

Mathematik im Lebenskampf gewannen, der Mathematik wieder opfern, zum persönlichen Ergötzen natürlich. Denksportliche Spiele sind mathematische Spiele. (Vgl. Abbildung 45 und Abbildung 46.) Da gibt es schon aus uralter Zeit das königliche Spiel von Ur, ein Vorläufer des Backgammon (vgl. (Bib.: A3)); oder hier bei uns in Helvetien ein Spieltisch, gefunden in "Colonia ... (Paterna?) Pia Apollinaris Augusta Emerita Raurica"[11] Aus praktisch allen historischen Zeiten sind uns denksportliche Spiele bekannt, vom Schach bis hin zum chinesischen Tangram, Rubik–Würfel, "gesellschaftsfähigen» Computer–Spielen, Logeleien u.s.w. (vgl. (Bib.: A5), (Bib.: A6)). Sogar die mathematische Statistik wäre nicht ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung, an deren Beginn Namen wie Fermat, Pascal, Laplace stehen. Denn so wird berichtet: Damals soll ein begeisterter Glückspieler, der Chevalier de Méré, Hilfe gesucht haben bei Pascal ... (vgl. (Bib.: A7)). Das spätere Resultat ist der Begriff der Wahrscheinlichkeit! Und auch: Obwohl durch einige einschlägige Fachhistoriker bestritten, stimmt folgendes nachdenklich: Einige Autoren führen selbst die grosse Arcana des Tarots der Zigeuner (Gipsy, fälschlicherweise für Ägypter gehalten) zurück auf einen Freskenzyklus in einem ägyptischen Tempel in Memphis, welcher angeblich im Buche Tot — so eine Interpretation — beschrieben sein Soll[12] (vgl. (Bib.: A8), (Bib.: A9)). Wenn sich auch mir bekannte Historiker hier nicht einig sind, kann da trotzdem aus alter, damals nicht ausergewöhnlicher Zahlenmystik profanes Spiel geworden sein.

Andere Wurzeln der Mathematik werden so offenbar: Religiöse, später philosophische, die dann hineinführen in die Kunst des Mittelalters und der Renaissance, Kunst, die bis ins nachreformatorische Barokzeitalter im Abendland fast ausschliesslich religiöse Kunst ist. (Vgl. Abbildung 47 – 47) Alte Kunst, dem Bewusstsein des modernen Menschen mit seinen zerfallenen Werten und abgeschnittenen Wurzeln weitgehend fremd, rätselhaft, unverständlich, doch aus dem Urgrund des Fühlens lieb und schön. Diese alte religiöse Kunst war bestimmt durch Harmonieideal, Sakralgeometrie und Zahlenmystik, also durch Mathematik! Verständnislos stehen wir davor, solange uns solche Wurzeln fremd bleiben. Ihre Werte bleiben uns vorenthalten, ungenutzt, ungeachtet, verkannt. (Vgl. Abbildung 50 – 64)

8.1.6 Von den philosophischen zu den religiösen Wurzeln

So wie das Leben mit dem Tode und der Tod mit dem Leben verbunden ist, lassen sich Philosophie und Religion kaum voneinander trennen. Ja, sind sie denn im Ursprung verschieden? Vielleicht kommt sogar den ersten der Urgeschichte bekannten prähistorischen mathematischen Zeugen religiöse Natur zu. Prähistorische Bauwerke lassen sich zum Teil als astronomische Stätten nachvollziehen, ob gekoppelt mit Grabanlagen oder isoliert davon. Man denke dabei z. B. an die drei Belchen um Basel, an Stonehenge, an die Menhire und Tumuli von Carnac (Bretagne) und andere — oder an die allen bekannten Pyramiden Ägyptens. Und da sind es gerade Grabanlagen die uns als erste Kulturzeugen durch die gefundenen Beilagen Kunde von der Vorstellung von einem Jenseits vermitteln. (Vgl. Abbildung 65 – 71) Die Verbindung von Grab und Astronomie, der hochkomplexen harmonischen Uhr „Firmament"! Astronomie erwies sich wohl rasch als Brücke zum Göttlichen: In der unabwendbaren Regelmässigkeit, der Harmonie des Firmaments walten unregelmässig laufende, erst auf Grund mathematischer Zusammenhänge als regelmässig, jedoch eigensinnig erkennbare Planeten, die uns früh schon als Götter überliefert sind. Aus den Bauwerken der Alten spricht durch raffinierte Körper– und Kalendergeometrie eine uralte, hoch entwickelte Arithmetik zu uns. Und der Rätsel bleiben viele: So hat man etwa in den Fundamenten keltischer Tempel Britanniens, die offenbar aus einer Zeit mehr als ein Jahrtausend vor der Lateinisierung des Landes stammen, nicht nur eine gemeinsame, überall in dieser Periode vorhandene megalithische Elle gefunden, nein, die elliptischen Grundrisse weisen in ihren Halbachsen Proportionen auf, die komplizierte pythagoräische Zahlentrippel in sich tragen, welche sich höchst unwahrscheinlich „zufällig" entdecken lassen[13] . Das also lange vor der Zeit, aus der uns in jener Gegend eine Schrift bekannt ist. Wie haben die Damaligen, falls ohne Schrift, so komplizierte Rechnungen beherrschen können?

[11] So der vollständige Name der "zweiten Gründung" des heutigen Augst in der Nordwestschweiz, von Ptolemäus kurz als "Augusta Rauricorum" bezeichnet.

[12] Möglicherweise eines der 42 in der Antike bekannten und wahrscheinlich von verschiedenen Autoren stammenden, dem chaldäischen (?) Mystiker Hermes Tris Megistos zugeschriebenen Werke. Dieser Mann wurde von den alten Griechen identifiziert mit dem Gott Hermes und ebenso mit dem ägyptischen Gott Thot: Tri Mercure Athotis. Bekannt war er in mittelalterlichen Alchemistenkreisen durch die im Original verlorenen Tabula Smaragdina.

[13] Nach einer mündlichen Ausführung von Prof. B. L. Van der Waerden (Kolloquium in Basel 1978)

Die Pyramiden Ägyptens sind das Schulbeispiel. Mit Grössenwahnsinn und Herrschaftssucht der Pharaonen lässt sich die überaus aussagekräftige Geometrie der Bauwerke wohl kaum begründen. In unser materialistisch orientierten Zeit vergessen wir schnell, dass die, die uns auf diesem Planet vorausgegangen sind, eigene, ihrer Zeit entsprechende Wertmassstäbe hatten. Und ebenso, dass auch unsere Wertmassstäbe wohl einmal dem Verfall geweiht sind. Und was geschah danach bis heute?

Im Griechentum dann zeigt sich uns die damalige Welt schon durchschaubarer. Der Wille, auf die Kräfte des Denkens, auf den lichten Verstand zu bauen, tritt zu Tage. Und auch die Resultate dieser Haltung: Hochschulen, Akademien entstehen, Wissenschaften blühen auf. Mystisches Weltverständnis muss in vielen Bereichen dem strengen, mathematischen Geist weichen. In der Physik beherrscht man Statik und Mechanik weitgehend: Der grossflächige, durch Recht, Stadtwesen, Strassen, Versorgung und Beamtentum organisierte Staat entsteht und gibt sich "imperialistisch". Rationalität herrscht, das Recht bedient sich der Logik: Alexanderreich, Rom und seine Widersacher, aber auch das Grossreich China. Später im Westen als Folge die Reiche der Byzantiner und der militärisch gelehrigen Germanen, die arabische Expansion, als Reaktion die Reconquista und als Fortsetzung das spanische Weltreich, das im portugisischen, englischen, französischen etc. Schule gemacht hat. Erst seit der 68–er Zeit tauchen bei breiteren Schichten vermehrt wieder Zweifel daran auf, dass das Glück dieses Planeten in einer eher eindimensionalen, nach aussen gerichteten Expansion liegen muss. Man bedenke: Altägypten hat sich so praktisch nie über das Niltal hinausgewagt. 3000 Jahre Geschichte hat es so durchlebt!

Zurück zu den Griechen. Da ist Euklid, ein Sammler mathematischer Erkenntnisse. Doch was war sein Anliegen, seine ideelle Kraftquelle, aus der er schöpfte um sein Werk zu vollbringen? Es war ein philosophisch–religiöses Anliegen! Seine dreizehn Bücher (dreizehn damals eine Zahl voller Bedeutung) stehen beispielhaft für die Methodologie der exakten Wissenschaften, sie sind eine grossangelegte Demonstration der axiomatischen Methode. (Vgl. (Bib.: A10).) im ersten Buch auf Axiomen aufbauend konstruiert Euklid nach den Regeln der Logik die Geometrie, um dann im dreizehnten Buche die fünf platonischen Körper behandeln zu können und zu beweisen, dass es keinen sechsten solchen Körper geben kann! Für den, der Logik, Axiome und Definitionen akzeptiert, ist das Resultat dann Gewissheit. Dass das Werk dann bis fast heute das Lehrbuch der Geometrie geblieben ist, kann wohl schwer als einzige Absicht Euklids gedeutet werden. Für Platon und die Strömung des Denkens, in der er stand, waren diese "kosmischen" Körper grundlegend für den Aufbau der Welt... (vgl. (Bib.: A11a), (Bib.: A11b)).

Zentral erscheint der Wille nach Erkenntnis der regulären Körper mit rationalen Methoden. Doch wozu? — Wir sehen da das griechische Bestreben, die Realität rational erklären zu wollen und die einfachen, idealen Gesetze einer globalen Harmonie gedanklich zu durchdringen, also das sich im Vielfältigen überall manifestierende Wenige, Grundlegende, Ordnende und somit Schöne zu finden, das den Geist ausmacht: den Kosmos im Chaos.

Hier leuchten geistige Realitäten im Zentrum. Ein andermal sind es solche der physikalischen Natur. Es geht um den Kosmos, der nicht vom Religiösen zu trennen war. Und gerade in der Mathematik hat dieser Wille, die Grenzen des hier mathematischen Kosmos abzutasten, die Neuzeit stark befruchtet. Denken wir an Cantor, der es wohl aus theologischen Gründen unternommen hat, die damalige "Chiffer" "unendlich" begrifflich zu verdichten. Das Resultat: Die Theorie der transfiniten Kardinalzahlen. Die eigentliche Mengenlehre also (vgl. (Bib.: A12)). Jetzt wissen wir, dass es Sinn macht, unendlich viele verschiedene Stufen von unendlich zu definieren, in denen man rechnen kann wie mit Zahlen. Entsprechendes gilt auch für die Null (vgl. (Bib.: A13)).

Ein anderes Beispiel aus unserer Zeit für das Interesse an Grenzen wäre Gödel. Eines seiner Resultate war, dass die Menge der wahren Sätze, zu deren Formulierung es einer Logik höherer Stufe als die Prädikatenlogik erster Stufe bedarf, grösser ist als die Menge derjenigen Sätze, die sich in endlich vielen Schritten in dieser Logik auch beweisen lassen (1931) (vgl. (Bib.: A14), (Bib.: A15), ...). Es gibt demnach mathematisch wahre Sätze, zu denen es keinen in derselben logischen Sprache formulierbaren Beweis gibt. Man ist hier an den Grenzen der konstruktiven Vernunft angelangt, an den Grenzen des sprachlichen Kosmos. Erweiterungen,

Überwindungen dieser Grenzen sind uns hier nur durch schöpferische Abstraktionen möglich. Was bedeutet eine solche Abstraktion?

Mit welchem Recht kann Herr Professor Pomposus Weihrauch denn behaupten, dass die Realität da beginne, wo gerade sein Denkvermögen noch hinreicht? Richtet sich denn die Ausdehnung der Realität nach dem Denkvermögen von Herr Professor Pomposus Weihrauch?

Als Beispiel wollen wir uns eine Punktmenge der Analysis denken. Wenn wir (so wie auf einem Bildschirm) eine sehr grosse Zahl Punkte hintereinander zeichnen, wird eine Linie sichtbar. Die Gerade lässt sich also analytisch verstehen als nie abbrechender Prozess, in dem ein Punkt nach dem andern entsteht in der Zeit. Dabei wird es uns aber nicht einmal gelingen, einen einzigen Grenzpunkt einer streng monoton wachsenden Folge zu zeichnen, denn keine endliche Zeit reicht dazu. Sie ist so nur "potentiell" vorstellbar. Andererseits können wir uns aber eine Gerade auch "aktual" vorstellen als Ganzes, als Ding an sich, nicht als Prozess, nein, auf einen Blick. Beide Vorstellungen sind von der Qualität der Ansätze her unvereinbar. Doch die Resultate, die Geraden nämlich, können wir für dieselben halten, so rät uns der "gesunde Menschenverstand" . Vom einen Ansatz zum andern gelangen wir nur durch das geistige Wagnis der Abstraktion, schlichtweg gesagt also durch eine Behauptung mit axiomatischem Charakter und niemals durch eine prozesshafte Konstruktion. Ein Computer würde wohl von sich aus niemals zu so etwas fähig sein, denn seine Natur ist prozesshaft, syntaktisch, nicht intentional, auch wenn seine "Intelligenz" noch so künstlich ist. Dem Menschen aber gelingt das "sinnvolle verbotene Denken", das sich dann axiomatisch legitimieren lässt, weil er den Willen zu einer Absicht aufbringen kann, zwei verschiedene Dinge zu identifizieren, zu abstrahieren. Dies, indem ein Aspekt der Gleichheit fällig wird! Und dies infolge "gesunden Menschenverstands", welcher sich bis heute (zum Glück) nicht in Regeln fassen lässt. Der Mensch kann das "Verbotene" eben gerade deswegen denken, weil seine Intelligenz nicht künstlich ist. Sie wird sich also wohl kaum auf die einfachste der Boolschen Algebren, nämlich auf die mit zwei Elementen, reduzieren lassen.

Wäre das Denken eines Computers, etwa einer von Neumann–Maschine, nicht verschiden vom Denken des Menschen, so musste doch der menschliche Geist auch eine Taktfrequenz aufweisen. Hätten wir dann bei einer höheren Taktfrequenz ein Gefühl von "langsamerer" oder vielleicht "schnellerer Gegenwart"?

Auf eine wiederum andere interessante Grenze stossen wir bei "unmöglich berechenbaren Problemen". Was ist damit gemeint? Denken wir uns eine hinreichend komplizierte diophantische Gleichung, die eine sehr grosse Lösung hat. Nun wissen wir, dass es Gleichungen gibt, deren Lösungen grösser sind als alle Koeffizienten der Gleichung. Denken wir uns diese Koeffizienten maximal so gross wie nur irgendwie irgendwo darstellbar, von mir aus mit einem Computer dargestellt, der so gross ist wie das Universum und so lange läuft wie das heute dafür gehaltene "Alter des Universums" mit der physikalisch theoretisch maximal möglichen Geschwindigkeit[14] . Nun also gut: Wir sehen, dass es Gleichungen gibt, die darstellbar sind, deren Lösungen aber nie berechnet werden können. Da solche Gleichungen Lösungen haben, ist es unmöglich zu beweisen, dass sie keine Lösungen haben. Ein Existenzbeweis für die Lösung müsste wohl aber irgendwie konstruktiven Charakter haben. Nun scheint es einleuchtend, dass es solche Gleichungen mit höheren Potenzen geben wird, wo die Konstruktion aus obigen Gründen die Grenzen des Machbaren sprengt. Solche Probleme sind dann im praktischen Sinne nicht entscheidbar. Diese Betrachtung gewinnt jetzt daher an Relevanz, da wir bei einigen einfachen diophantischen Problemen gar nicht entscheiden können, ob es sich um ein Problem dieser "praktisch unentscheidbaren Klasse" handelt. Wir sind an den Grenzen des "geistigen Kosmos".

[14] Physikalisch kann keine als Masse oder Energie sich manifestierende Materie je die Lichtgeschwindigkeit überschreiten.

Bis ca. 1992 war die folgende Frage interessant: „Handelt sich beim "Fermat–Problem" (grosser Fermatscher Satz) um ein praktisch nicht entscheidbares Problem?“ Pierre Fermat hat bekanntlich in seiner Diophant–Ausgabe die Randbemerkung hinterlassen, dass die Gleichung

$$a^n + b^n = c^n, \;\; a, <, c, n \in \mathbb{N}$$

in den natürlichen Zahlen für $n > 2$ keine Lösung habe. Leider sei der Rand zu schmal um seinen "wahrhaft wunderbaren" Beweis zu fassen, berichtet sein Sohn. Seither hat niemand einen anerkannten Beweis oder Gegenbeweis gefunden, obwohl 1908 durch Wolfskehls Testament $100'000$ *Reichsmark als Preis für denjenigen geboten wurden, der diesen "heiligen Gral der Mathematik" findet. Es scheint, dass sich die Mathematiker und ihre Koryphäen mit diesem Problem mehr beschäftigt haben als mit irgend einem anderen — und bei keinem Problem sind so viele Irrtümer, publiziert worden. (Vgl. (Bib.: A16), (Bib.: A17), (Bib.: A18), ...) Für eine sehr grosse Zahl von Spezialfällen hatte man allerdings die Beweise nach und nach gefunden, ohne aber zu wissen, ob die Zahlen, für die man beweisen konnte, dass der grosse Fermatsche Satz richtig war, alle $n \in \mathbb{N}, \;\; n \geq 3$ abdeckte. Ein sehr weitreichendes Resultat hat z.B. Prof. M. Eichler aus Basel erziehlt. Ca. 1992 dann endlich hat der Engländer Andrew Wilnes den Beweis präsentiert, der von der mathematischer Tiefe und Entwicklungshöhe bestaunenswert ist. Er ist aber den mit den Fachspezialitäten unvertrauten Mitglieder der Zunft vom Verständnis her nicht zugänglich. Nun ist das Problem entschieden — für diejenigen, die den Beweis verstehen.*

8.1.7 Eigentlich sakrale Wurzeln der Mathematik

Kehren wir zurück zu den Pythagoräern. Aristoteles schreibt ihnen folgende Aussprüche zu: "Der Himmel ist Harmonie und Zahl". Oder: "Die Dinge sind durch Nachahmung der Zahl." Kurz: "Alles ist Zahl." Zahl bedeutet hier in diesem Umfeld "rationale Zahl". Wir erfahren da die Vorstellung: Der erfassbare Kosmos ist Harmonie, ausgedrückt durch die rational erfassbare Zahl. Das nicht rational Erfassbare, dem Verstand Verschlossene, das "göttlich" zu Nennende, Nicht–Kalkulierbare, Schicksalhafte also, liegt "über" dem Kosmos.

Das schafft Verständnis dafür, dass eine der Legenden den "Verrat" des pythagoräischen Mathematikers Hippasos so beschreibt: "Die Gottheit zürnte denjenigen, welche Lehren des Pythagoras an die Öffentlichkeit trugen. So sei der Mann als Gottloser im Meer ertrunken, der den Aufbau des Körpers mit zwanzig Ecken verriet, die Tatsache, dass das Dodekaeder. . . sich einer Kugel einschreiben lässt." . . . "Einige sagen auch, dies sei ihm wiederfahren, weil er das Geheimnis des Irrationalen und Inkommensurablen verraten habe." (Iamblichos, vgl. (Bib.: A1).)

Dass das Irrationale im Kosmos existiert, die Harmonie also gestört ist und sich also das Göttliche, das Nicht–Rationale als "Fehler" im Kosmos manifestiert, muss als Schock gewirkt haben.

Es bleibt zu bemerken, dass die antike Überlieferung berichtet, Pythagoras aus Samos habe längere Zeit im Orient verbracht (Iamblichos): "Zweiundzwanzig Jahre weilte er so in Ägypten in den allerheiligsten Gemächern bei Sternkunde und Geometrie und empfing . . . die Einweihung in alle Göttermysterien, bis ihn die Krieger des Kambyses gefangennahmen und nach Babylon führten. Dort verkehrte er mit den Magiern. . . " Zwar diskutiert man heute noch über die Legendenhaftigkeit solcher Berichte, doch andererseits fällt auf: Pythagoras als PHTA–GO–RA bedeutet offenbar in der altägyptischen Sprache sehr viel: PHTA, auch PTAH, soll Gott sein — GO meint Erkenntnis — RA die Sonne, Licht (übertragen: Erleuchtung, Verstand), auch Re (Amon–Ra: Der Sonnengott). Man könnte "Pythagoras" also etwa so verstehen: "Derjenige, der Gott und das Licht (Erleuchtung . . .) kennt". Andererseits ist der Name kaum griechisch. Und in Agypten scheinen die

Priester über die Geometrie gewacht zu haben, was aber von andern Autoren aus heutiger Zeit relativiert wird, obwohl Totentempel — oder die Pyramiden, weithin sichtbar, mit ihrer nicht zuletzt sakralen Bedeutung eine deutliche Sprache reden. (Meine Frage dazu: Darf man über dreitausend Jahre Geschichte auf Grund einiger wohl zugänglichen, jedoch isolierten und statistisch vielleicht allzu zufälligen Quellen so pauschal urteilen?) Vergessen wir nicht: Im alten Ägypten war Religion und Sakrales aus dem Leben nicht wegzudenken. Da war Einheit. Mir scheint plausibel: Pythagoras stand in der Tradition solcher Einheit von Mathematik, Religion und philosophischem Weltverständnis. Aus dieser Quelle schöpften die Griechen, auch in den Wissenschaften, insbesondere der Mathematik.

In Griechenland bannte aber nicht mehr das Jenseits, das Totenreich des Osiris, das Denken. Der Mensch und sein Schicksal im Diesseits rückten ins Zentrum. Das Theater entstand, da gehörte dem Menschen auch leiblich das Zentrum, das Gesicht wohl noch unter der Theatermaske verborgen. Protagoras lehrte: "Der Mensch ist das Mass aller Dinge." Erstmals finden wir in der Klassik nach Form und Aussage realistisch idealisierte, ganz im leeren Raum stehende Plastiken, Götterbilder in reinster Menschengestalt. Den Göttern geweihte Tempelbauten und Götter darstellende Kultbilder gehorchen einer strengen sakralen Geometrie, durch die eine Zahlenmystik schimmert, die uns noch in der Kabbalistik begegnet und die offenbar in altägyptischen Mysterien wurzelt, schwer entschlüsselbares Geheimwissen erloschener Kulturen. Uns bleibt der Weg über die symbolhafte Deutung der gebliebenen Zeugen.

Diese sakrale Geometrie lebt dann später einerseits im römischen und byzantinischen Einflussbereich fort, andererseits wird sie vom islamischen und europäischen Mittelalter übernommen und spezifisch ausgeprägt. Der analytische Betrachter versinkt in Staunen vor der geometrischen Fülle der Wunderwerke der Romanik und Gothik, deren sakraler Anspruch jedoch heute kaum noch jemand nachzuempfinden vermag. (Vgl. Abbildung 73 – 76) Wer schon in unserer Zeit weiss den Einfluss des Physiologus abzuschätzen? Dann in der Renaissance beginnt die Profanisierung. Speziell bezüglich des Islams hat eine Arbeit bei Prof. Speiser in Basel gezeigt, dass in der Ornamentik der Alhambra von Granada die Möglichkeiten der endlichen Gruppen voll ausgeschöpft sind. Da der Islam direkte Gottesdarstellungen verbietet, blieb nur der Ausweg über die Geometrie: Sie zeigt so symbolhaft Makrokosmos, Mikrokosmos, Schöpfung... Und das gesteigert bis zur geometrischen Vollkommenheit. (Vgl. Abbildung 77 – 86)

Betrachten wir eine mittelalterliche Kathedrale, so überrascht die Spannung zwischen Strenge und Verspieltheit der Geometrie. In der Fassade lassen sich gleichseitige Dreiecke, Fünfecke, Zehnecke, also harmonische Teilung, Zwölfecke ausmachen. Im Grundriss der Bauwerke oder auch in religiösen Bildern oder besonderen Werken grosser Maler auch späterer Zeit entdecken wir (durch nachempfinden der Konstruktionslinien) den sogenannten "mystischen Leib Christi" eine symbolische Figur aus Dreiecken, Quadraten, Fünfecken, Kreisen. Wieso diese Figuren? Von welcher Bedeutung "reden sie schweigend"? (Vgl. Abbildung 47 – 64)

"Ein Apfel und ein Apfel gibt zwei Äpfel" hat Hänschen gelernt. Ebenso weiss Hänschen nun, nach wiederholten Versuchen die Grenzen der Toleranz auszuloten, dass eine Strafe und eine Strafe zwei Strafen sind, denn das hat er jetzt auch gelernt. Wie merkt nun Hänschen, dass die Zwei bei den Äpfeln dieselbe Zwei ist wie bei den Strafen? Ist Zwei denn etwa das, was wir als Takt oder Rhythmus beim Zählen wahrnehmen, also eigentlich etwas das wir erst tun — und nicht etwas was da schon ist. Denn Hänschen sieht die Äpfel und erfährt die Strafen. Die Zwei dagegen sieht er nicht. Auch spürt er sie nicht, denn das was er spürt, ist der Schmerz beim Schlag auf seinen Hinden.

8.2 Zweiter Teil: Das Sakrale in der Mathematik und die Schönheit

8.2.1 Zum Sakralen in der Mathematik

Eine spezielle sakrale Richtung: Mystische und gnostische Wurzeln der Mathematik

Sokrates wollte Tugend und Wissen verknüpfen. Mit der Aufdeckung ihres Nichtwissens will er die Menschen zur Selbstprüfung und Selbsteinkehr aufrufen. Eine altgriechische Tempelaufschrift lautet in diesem Sinne: "$\gamma\nu\tilde{\omega}\tau\iota\ \sigma\varepsilon\alpha\upsilon\tau\grave{o}\nu$" — gnoti seauton — ": Gnostik, so sagen wir. Erkennen und Mathematik war aber zur Zeit der Griechen nicht zu trennen. Mit erkennen meinen wir rational erfassen, logisch kombinieren, als stattgefundene Sache, als Tatsache, ins Bewusstsein bringen. Aber auch intuitiv — unmittelbar — meditativ schauen, ja, sprechen in Symbolen. Mathematik lebt von beidem. So mag es nicht erstaunen, dass die Griechen einfache, ideale mathematische Verhältnisse und Figuren fanden (resp. aus andern Kulturen übernahmen) und in gut passender Weise Mensch, Götter und Kosmos in diesem Kleide darstellte. Darin, dass der Mensch nach dieser Geometrie, nach diesen Bildern, wirklich geschaffen ist, liegt das Mysterium. Solche Prinzipien, ausgeprägt als göttliche, ideelle Bilder, verbanden den Menschen mit Gott. (Vgl. Abbildung 89)

Sokrates. "Ich weiss, dass ich nichts weiss." — Ein Gipfel philosophischer Weisheit? — Oder das Problem, Sokrates überhaupt zu verstehen?

Zahlen und geometrische Figuren dienten in Kunst und Religion vieler Kulturen und Epochen als Informationsträger, als Kommunikationsmittel, als Sprache — natürlich als symbolhafte Sprache, nicht vergleichbar mit exakt–wissenschaftlicher resp. "interpersonal exakter" Sprache, dafür aber tiefere seelische Schichten ansprechend, durch das Beispiel belehrend. Wie können wir heute ihren Symbolgehalt ergründen, abgenabelt von diesen Kulturen? Erstaunlicherweise finden sich über alle lokalen Ausprägungen hinweg Gemeinsamkeiten, die mehr vermitteln, als sich sprachlich sagen lässt, die im eigentlich Menschlichen wurzeln, tiefer als die Ratio reichen kann.

Hier eine kurze, unvollständige, (interpretierte Aufzählung) solcher Symbolbeziehungen (vgl. (Bib.: B1), (Bib.: B2)): Im Griechentum wird der Mensch Individuum, ist nicht mehr nur Gruppenmensch. Er ist Einheit, trägt in sich die Zahl des Einen, "göttlichen": Die Eins. Der Mensch aber trägt in sich auch die Symmetrie, also die Zahl zwei, den Dualismus, die Polarität, das Geschlecht etc.. In östlichen Kulturen begegnet uns Yin und Yang. (Vgl. Abbildung 90 und 91) Der Mensch scheint dem Dualismus ausgeliefert: Gut – Böse, Freund – Feind, Krankheit – Gesundheit, vergangen – künftig, warm – kalt, Anfang – Ende, wahr – falsch, trocken – nass, Mann – Weib und so fort. An den Pforten alter Kirchen stehen die klugen und die törichten Jungfrauen. Wir finden uns zwischen den Polen materielle Selbstsucht in Form von Habsucht, Geiz, also gierige Fixiertheit aufs Materielle, Intoleranz einerseits und andererseits lasterhafte Verschwendungssucht, Verantwortungslosigkeit in materiellen Angelegenheiten, Vernachlässigung, Blindheit gegenüber gesellschaftlichen Erfordernissen und Notwendigkeiten, Unbekümmertheit. In der einschlägigen Sprache: Das "Arimanische" und das "Luziferische" fordern uns zum Kampf ums Gleichgewicht. Salomon wie andere Zeitgenossen aus Zypern und solche aus dem Raum der Phönizier und Philister liessen zwei (eherne) Säulen links und rechts vor der Pforte ihrer Tempel aufstellen (vgl. (Bib.: B3)), damit (eine Interpretation) derjenige, der ins Heiligtum gelangen wollte, die Polarität in der Mitte durchschreiten musste und so dieses Erlebnis ins Bewusstsein drang.

Eins und zwei sind drei, die Einheit in der Polarität, die gegensätzlichen Aspekte des Einen. Die Zahl drei ist wieder Symbol des Göttlichen, der Trinität: Kopf, Rumpf und Extremitäten hat der "gottgeschaffene Mensch", enstprechend Verstand, Gefühl und materiellem Tun oder Geist, Seele und belebtem Körper. Er ist hier Bild Gottes, steht in den wesentlichen Freiheitsgraden Raum, Zeit und Kausalität, benimmt sich dialektisch als Synthese von göttlich Geistigem und Materiellem. Sein Raum hat drei Dimensionen. Er passt in ein

gleichseitiges Dreieck. Und sitzend auch in ein rechtwinkliges mit dem kleinsten pythagoräischen Zahlentrippel (3, 4, 5) als Masszahlen! (Vgl. Abbildung 92 – 94) Die Trinität findet sich im Altägyptischen (Osiris, Isis, Horus), im Indischen (Brahma, Vischnu, Shiva), in der griechisch–römischen Welt (die Schicksalsgöttien Moiren oder später Parzen, denen selbst die Götter gehorchen mussten) und auch im Christentum (die drei Personen in einem Gott). Das gleichseitige Dreieck ruht spannungslos: Jeder Eckpunkt hat von jedem andern denselben Abstand. Die Christen stellen darin das "Auge Gottes» dar. Doch die Eckenzahl bleibt endlich, fassbar. Im Gegensatz zum sterblichen Menschen kommt Gott, resp. den Göttern, meist ewiges Leben zu. Für den Menschen und die höheren Lebewesen aber liegt der Gegenpol zum Tod in der Erhaltung der Art, das heisst in der Zeugung, wo der "Lebensfunke springt". Die Zeugung, die als Dialektik interpretiert werden kann, hat wohl daher vielfach göttlichen Charakter. Also die Dreiheit ist es, die den Tod überwindet. Drei musste deswegen wohl göttlich sein. Im Christentum hat Maria "vom heiligen Geist empfangen": Aus Mensch und Gott spriest der Gottmensch. Drei Weise aus dem Morgenland, dem Land der aufgehenden Sonne, sollen an seiner Wiege gestanden haben. Nach zwei mal fünf mal drei Jahren von "Gott als Mensch in der Polarität" dauerte das eigentliche Wirken Christi drei Jahre. Zu dritt sind sie später ans Kreuz geschlagen worden. Dann hat Christus die Polarität, den Tod, am dritten Tag überwunden, ist nach drei Tagen "auferstanden" u.s.w..

Auch passt der ausgewachsene Mensch im Mittel — was erstaunen mag — mit seitlich ausgestreckten Armen ziemlich genau ins Quadrat. Er trägt also die Zahl vier in sich. (Vgl. Abbildung 95) Vier ist die Zahl der Materie: In der Antike gab es die vier Elemente (sowie die nicht materielle Quinta Essenzia), vier Temperamente, bedingt durch entsprechende Körpersäfte etc.. Es gibt die vier Himmelsrichtungen, vier Jahreszeiten, vier Aggregatszustände (fest, flüssig, gasförmig, plasmatisch entsprechend Erde, Wasser, Luft und Feuer), vier Organisationsstufen der festen Materie: Mineral, Pflanze, Tier, Mensch. Sogar die moderne Physik kennt vier Fundamentalkräfte (Wechselwirkungen) und die Genetik vier Grundbausteine. Ursprünglich gab es aber auch vier Erzengel (Michael, Gabriel, Raphael, Uriel), die in die Schöpfung wirken — im späteren Judentum sind es dann allerdings sieben. Das Quadrat ist spannungsgeladen: Die Eckpunkte haben verschiedene Abstände voneinander. Auch der chinesiche Tempel der Erde hat quadratischen Grundriss. Ja, die aus dem Altpersischen bekannte und von den Römern praktizierte Hinrichtungsmethode der Kreuzigung selbst hat kultische zahlensymbolische Bedeutung: Den Menschen aufs Kreuz, das Symbol der Materie zu heften und da verenden zu lassen, drückt den Willen aus, ihn an die Materie zu binden, ihm das Geistige, das Jenseitige zu verunmöglichen, ihn also härter zu bestrafen als nur durch leiblichen Tod, ihn über das Leibliche hinaus zu töten[15]! Dann kennen wir die vier apokalyptischen Reiter Pest, Krieg, Hunger Tod, Symbole der leiblichen Plagen. Der "Materie" gehört die Ruhe nicht. Das Kreuz gilt den Christen als Mahnzeichen. . .

Der Mikrokosmos im Makrokosmos — der Mensch im Universum: Begriffe sind zeitbedingt. "Sich die Erde Untertan machen" ist durch die Brille der damaligen Zeit zu verstehen, etwa sakral im altägyptischen oder babylonischen Sinne. Die Erde war nicht der Planet wie in der heutigen Wissenschaft!

Die Zahl fünf: Unsere Extremitäten sind fünfgliedrig. Der Mensch hat Kopf Rumpf, Oberschenkel, Unterschenkel, Fuss, auf dem er geht. Der Kopf hat fünf Öffnungen. Klassisch unterscheiden wir fünf Sinne. Der Mensch passt ins Pentagramm, das den goldenen Schnitt in sich trägt. Und die Proportionen des Menschen sind bis ins Detail harmonisch: Der goldene Schnitt liefert die Geometrie des Menschen. Daher ist fünf die Zahl des Menschen und das Pentagramm sein Symbol. Wir haben zwei mal fünf Finger, mit denen die meisten von uns zählen gelernt haben. Von den alten Ägyptern hat die Antike — und durch sie auch wir — das Zehnersystern geerbt. (Vgl. Abbildung 96 – 99) Der Mensch mit dem Auftrag, das Irdische beherrschen zu lernen, bedeutete den Alten die Ordnung im Kleinen: der Mikrokosmos. Ins Pentagramm gestellt, wie auf alten Bildern sichtbar, berührt er nur mit seinen fünf äussersten Punkten (Füsse, Hände Kopf) den Kreis. Dann gibt es weiter genau fünf platonische Körper in der dem Menschen möglichen Geometrie, der Geometrie des Mikrokosmos. . . (Vgl. Abbildung 100 – 104) Das Pentagramm war auch das Zeichen der Pythagoräer.

[15] Nach einem ehem. mündl. Hinweis von Prof. J. 0. Fleckenstein (ehem. München, Turin und Basel)

Und die jüdisch–christliche Welt kennt zehn Gebote: zwei mal fünf, wie die zehn Ziffern: Eins für jeden Finger, aufgeschrieben auf den zwei Gesetzestafeln des Moses, eine für jede Hand, bewacht im Tempel von zwei Keruben flankiert, inmitten der Polarität. Dann ist zwei mal fünf die Summe der Tetraktys, einer "dreieckigen Zahl": Die Darstellung der Zahlen eins, zwei, drei und vier im gleichseitigen Dreieck (vgl. (Bib.: B2), (Bib.: B4) – (Bib.: B6)).

Die Tetraktys: $1 + 2 + 3 + 4 = 2 \cdot 5 = 10$

(Vgl. Abbildung 88)

Bei der Tetraktys schworen die Pytagoräer. . . So wie von dreieckigen Zahlen, sprachen die Alten auch von rechteckigen und quadratischen Zahlen.

Dann die Zahl sieben: Sie "entsteht" aus dem Materiellen (vier) und dem Göttlichen (drei). Vier nicht–apokryphe Evangelisten kennt das Christentum, die im Materiellen zu Gott, der Trinität, den drei Personen oder Aspekten führen. Sieben ist die Zahl der Schöpfung im jüdisch–christlich–islamischen Bereich, die sieben Tage dauerte. Der Buddismus kennt sieben Himmel. Der Mondzyklus dauert vier mal sieben Tage bis zur materiellen "Neuschöpfung", analog der Monatsregel des weiblichen Geschlechts. Im siebten Lebensjahr kommt der Zahnwechsel, nach wieder sieben Jahren die Pupertät. Neues entsteht. Der Mann ist durch sieben Öffnungen mit dem Makrokosmos verbunden — nicht so die Frau. (Die Acht finden wir z.B. bei Bauwerken eher in der mittelöstlichen Welt, im christlichen Abendland jedoch nur ausnahmsweise wie im Grundriss des Doms zu Achen, in der San Vitale in Ravenna oder in Ottmarsheim bei Basel etc..) Und sieben Chakras kennt die vedische Welt (und ihre Abkömmlinge), die auch als Verbindungen dienen. Weiter: In der Antike gab es sieben Planeten. Daher können wir nachvollziehen, wie sich Galilei mit Problemen beladen hat, als er mit seinem neu erfundenen Fernrohr als erster Mensch neue Himmelskörper entdeckte: Jupitermonde. Das störte diese göttliche Ordnung der Sieben, musste also Irrtum oder "vorn Teufel" sein. Dann weiter. Um einen Tennisball lassen sich auf einem ebenen Tisch lückenlos sechs weitere gleich grosse Bälle gruppieren. Sieben Kreise bilden so eine vollkommene Figur: Sechs Arbeitstage nach aussen und einen Tag nach innen, "wo Gott ruht". (Vgl. Abbildung 105.) Die Schöpfung gilt auch als göttlich, als vollkommen, als vollendet. Gott wirkt weiter in — aber nicht an — der Schöpfung, er hat die Menschen nicht alleine gelassen. Da gibt es auch noch die sieben Posaunen, die sieben Zornschalen, das Buch mit den sieben Siegeln, später die sieben Erzengel, sieben Todsünden, sieben Kardinaltugenden etc.. Sogar Salomon baute seinen Tempel in sechs Jahren. Im siebten weihte er ihn ein. Sieben Stufen führen zu ihm. Und aus der Titusbeute kennen wir den siebenarmigen Leuchter. Sieben auch war die Zahl der antiken Weltwunder. Sieben ebenfalls die Zahl der Künste des freien Mannes. Eine griechische — und somit unsere — Tonleiter zählt sieben Tonschritte. Das griechische Alphabet sieben Vokale. Oft wird das Leben des Menschen in Siebenjahresperioden eingeteilt.

Ganz anders mit dem Makrokosmos oder Universum. Die Zahl des Kosmos ist die Zwölf. So hat der lichte Tag zwölf Stunden, das Jahr hat zwölf volle Mond–Monate. Doch die Zeitrechnung geht nicht ganz auf, sie hat Fehler. Manchmal passiert es, dass das Jahr dreizehn volle Mond–Monate hat. Das Christentum kennt zwölf Apostel, ein dreizehnter ist "ausgefallen", hat die böse Tat begangen. Den Kosmos können wir nicht ganz rational fassen. Irrationale Längen treten schon in der ebenen Geometrie auf, denken wir an Wurzel aus zwei. Der Kosmos muss daher als nicht ganz vollkommen erschienen sein. In ihm regiert immer noch seine "Mutter", das Chaos — oder auch das Böse. Im Tarot der Zigeuner bedeutet die Karte dreizehn den Tod. Um einen Tennisball im Raum lassen sich zwölf weitere gleich grosse Tennisbälle gruppieren, so dass alle diese zwölf den innern Ball berühren. Jedoch gelingt es nicht, die äussern so zu verteilen, dass sich auch da immer alle

Nachbarn touchieren — Wie man auch versucht, es bleibt immer irgendwo eine Lücke: Doch die dreizehnte Kugel kann man unmöglich ohne Gewalt in die noch freie Lücke zwängen. (Vgl. Abbildung 106.) Die Analogie: Um den Meister scharen sich zwölf Jünger, die Symbole des Universums, auch des Tierkreises. Der dreizehnte hat zwar versucht, findet aber seinen Platz nicht. Das Zentrum, das Göttliche ist nicht Teil des Materiellen, des Kosmos. Zwölf ist vier mal drei: Die materielle — unvollkommene — Spur des Göttlichen, das Werk. Und auch das himmlische Jerusalem besitzt zwölf Tore, das alte Israel vor der babylonischen Gefangenschaft zwölf Stämme etc.. Bei Platon hat der Kosmos die Form eines Pentagondodekaeders (zwölf Ecken, Fünfeckflächen), der vollkommenste der regelmässigen Körper: Die Zwölf, der Makrokosmos ausgedrückt durch den Menschen, den Mikrokosmos, die Fünf. Das Quadrat ins Dreidimensionale übertragen hingegen ergibt den Würfel: das Symbol des Festen, der Erde. Die Vier mal die Drei: aus Materie der Kosmos. . . Das Allerheiligste in Salomons Tempel war würfelförmig. Da hat man die Gesetzestafeln verwahrt. Das Hebräische kannte ursprünglich zweiundzwanzig Konsonantenschriftzeichen: Die drei "Mütter", sieben Doppelkonsonanten und zwölf einfache Konsonanten. Das Göttliche, Vollkommene, die Schöpfung im Kosmos: das Gefäss für die Tora! Und auch im alten Griechentum: Im Homerischen Glauben zählte der olympische Götterkreis zwölf Götter, die wie die Menschen einmal entstanden und deshalb nicht vom Kosmos ausgeschlossen sind. Sie wirken weiterhin in der Welt. Sie sind aber nicht vollständig und alleine: neben ihnen walten auch noch die niederen Gottheiten. . .

Dann der Kreis. Einen Höhepunkt erleben wir bei Ptolemaios (Ptolemäus): Er war überzeugt, dass der Kreis göttlich sei. Die Planeten konnten sich nur auf Sphären bewegen, wenn dazu auch Epizykeln notwendig wurden. Auf der Sphäre ist kein Punkt vor den andern bezüglich des Zentrums ausgezeichnet: Sie bedeutet Harmonie, Ruhe, Unendlichkeit. Niemand kann die Zahl der Kreispunkte abzählen und endlich fassen so wie die Dinge, die ihn umgeben. So hat auch der chinesische Tempel des Himmels kreisförmigen Grundriss. Und weiter — Die Grundform des Pantheon in Rom, dem Tempel aller Götter, ist die Kugel.

Mit dieser Beleuchtung weniger Zahlen und Formen müssen wir es hier bewenden lassen. Hilfreich zum Verständnis der Symbolik kann ferner sein zu beachten, dass in Antike und Mittelalter als Denkprinzip die Analogie ebenso Wertschätzung genoss wie die Kausalität. (Auch heute steht die Analogie von Modell und Theorie vor kausaler Theorie.) Noch die Frage des Primats: Hat die Geometrie und die Zahlenlehre Mythologien und Religionen geprägt — oder handelt es sich um zufällige Analogien, oder wie sonst liesse sich, wenn überhaupt, die Sachlage rational erhellen? Diese Frage müssen wir hier offen lassen.

Von diesem Hintergrund aus können wir jetzt verstehen, dass schon früh grosse Denker sich anschickten, den Rätseln der einfachen, aber "vollkommen" schönen Geometrie und Zahlenlehre den Schleier zu entreissen, unter dem sich die für uns nur im Lichte der Ratio nachvollziehbare Wahrheit verbirgt. Jene Menschen waren bestrebt, dieses abstrakte Schöne zu schauen, Gewissheit zu erlangen. Und wie schon damals im Griechentum gilt auch heute: Im Zentrum der Wertung des Menschen steht der Mensch. Wir sind uns wichtig. Nach dem Menschen sollen wir das Universum bemessen, ob physikalisch, ethisch oder irgendwie, wo wir Normen fordern. Denn wir geben den Sinn. Wir sind es, die fordern. Daher mag es nicht erstaunen, wenn ich behaupte: Wesentliche Entdeckungen der Mathematik verdanken wir dem frühen Interesse fähiger und geistig reifer Erdenbewohner, Sakralgeometrie und Zahlensymbolik in ihrer Ausprägung am Menschen zu untersuchen. Die erstaunlichen Erkenntnisse aus solchem Unterfangen zeigen, dass Mensch wie Mathematik uns ein Mysterium bleiben, das zu Gnostik führen musste.

8.2.2 Einige Kerngedanken zu den gnostischen Wurzeln der Mathematik

(Wie der Mensch den Kreis quadriert)

Bei den Pythagoräern z.B., die eine religiöse Bewegung waren, bildeten die Mathematiker den inneren Kreis. Arithmetik, Geometrie, Harmonielehre, Astronomie hatten da offenbar religiösen Charakter. Zwar stellen wir heute bei den griechischen Göttern viele menschliche Züge und Schwächen fest. Doch was war zuerst, das

Huhn oder das Ei? Haben die Menschen die Götter erfunden und mit menschlichen Zügen versehen, oder hat der irgendwie gedachte Gott — oder die Götter — den Menschen nach seinem (ihrem) Bilde geschaffen? Die Neuzeit überlässt uns hier die Freiheit des Denkens. In der Antike war das anders. Der menschliche Geist musste wohl nach göttlichem Muster sein, ein Bild Gottes, jenes unfassbaren, alles umfassenden Wesens. Und Mathematik — als noch heute die reinste Geisteswissenschaft — musste das Göttliche am reinsten offenbaren. Zum unfassbaren Göttlichen konnte man also näher gelangen, wenn man im Bilde des Göttlichen, im Menschen also, dasjenige ausfindig machen, erkennen und darüber meditieren kann, was dem Göttlichen selbst in reinster erkennbaren Form sich nähert: Das Mathematische!

"Gott würfelt nicht" — davon war noch Albert Einstein überzeugt. Inzwischen haben aber die Physiker den sichtbaren Determinismus über Bord geworfen... Was ist mit dem Rest? (Vgl. (Bib.: B7), (Bib.: B8).)

Und welche Überraschung: Wir finden das Mathematische im Menschen in einer Art, wie es auch der neuzeitliche Verstand nicht zu erklären vermag. Hier bleibt nur das Staunen, das am Ende jeder rationalen Schlusskette stehen muss. Wir gelangen rasch zu Grundfragen, wo der Mensch nur noch feststellen, jedoch nicht mehr vernünftig erklären kann. Da endet das Rationale, das Religiöse beginnt für den, der sich weiter interessiert: In der Antike sicher ein Beweis des Umgreifenden, eine Legitimation des Göttlichen.

Was sind nun solche antike gnostische mathematische Inhalte, die sogar die profanen Mathematiker der Neuzeit ohne deren Wissen in ihrem Forschungsbestreben geleitet haben?

Einmal das Delphische (Delische[16]?) Problem (vgl. (Bib.: B9)): Nach Eratosthenes gelangten die Athener zur Befreiung von der Pest an das Orakel von Delphi. (Das Apolloheiligtum Delphi war neben Olympia mit dem Hauptgott Zeus und Delos, dem Geburtsort der Artemis und des Apollo und Verehrungsort vieler Götter, eines der drei grossen grieschischen Heiligtümmer.) Sie erhielten einen Spruch etwa folgenden Inhaltes: Sie sollen dem in Delphi (oder doch Delos?) verehrten Apollo einen kubischen Altar bauen mit doppeltem Inhalt zu einem bestehenden kubischen Altar. Bauen also, also erst konstruieren mit den Werkzeugen der Architekten, die die Werkzeuge der Geometrie sind: Zirkel und Lineal. Jedenfalls scheint mir der Verweis auf „Zirkel und Lineal“ durch die Tatsache begünstigt worden zu sein, dass seit den mittelalterlichen Klosterschulen Euklids Elemente als „Lehrbuch“ gedient hat. Man kann vermutlich nicht schlüssig nachweisen, ob die Werkzeuge Zirkel und Lineal genannt worden sind.
Apollo war der Gott des Lichtes, der Wahrheit (der Erleuchtung — Erkenntnis), als Meister der drei mal drei resp. neun Musen aber auch der Gott der Kunst, insbesondere der Musik — der Harmonie. Man hat dann in der Antike allerlei versucht. Mit Zirkel und Lineal alleine ging es nicht. Auch die späteren Mathematiker hat das Problem gefesselt. Doch erst im letzten Jahrhundert gelang es endlich auf den Fundamenten der Theorien von Abel und von Galois (Gruppentheorie, Galoistheorie) zu beweisen, dass dieses Problem der Würfelverdoppelung mit Hilfe von Zirkel und Lineal alleine nicht lösbar ist (vgl. (Bib.: B10)). Was aber zu denken gibt, ist folgendes: Über dem Tempeleingang zu Delphi standen die Worte zu lesen: $\gamma\nu\tilde{\omega}\tau\iota\ \sigma\varepsilon\alpha\upsilon\tau\grave{o}\nu$" — gnoti seauton — Mensch, erkenne Dich selbst" Das macht bezüglich des Würfelproblems sehr viel Sinn. Und Apollo, die Erleuchtung hilft! Es braucht weder Zirkel noch Lineal. Wer die Mathemata auf den Menschen anwendet, erkennt: Der Mensch trägt die Lösung des dephischen Problems in sich in seinen Körperproportionen. Mit seiner Körperhöhe[17] als Seitenlänge, Symbol des Menschen, können wir einen Würfel bauen, den ursprünglichen Altar. Die Höhe seines Körpers mit nach oben gegen den Himmel ausgestrecktem Arm als Seitenlänge ergibt dann im Mittel einen Würfel mit doppeltem Volumen! Sich selbst im Würfel, im Symbol des Irdischen, im Kleide des Materiellen erkennen soll also der Mensch. (Vgl. Abbildung 107.) Dann wird er die Pest besiegen. War das der Sinn des Orakelspruchs? Durch Erkenntnis, Forschung, ist heute auch die Pest weitgehend besiegt — es hat über 2000 Jahre gedauert... Der Mensch trägt in sich, was sich rationaler

[16] Schultz, Rätsel im hellenischen Kulturkreis, 1909, S. 145
[17] ausgewachsener europäischer Durchschnittsmensch

Konstruierbarkeit entzieht. Durch ihn tritt das Irrationale, Göttliche in die Welt. Von diesem Problem floss also so viel Energie in die Entwicklung der Mathematik, ohne dass diejenigen, die sich mühten, um den tiefen Sinn der Sache wussten. . . Und nachher ist man allemal klüger. Das Orakel hätte recht behalten, falls man das so akzeptieren möchte. . . Und letzteres ist übrigens nicht sehr wichtig für die Pest, denn ihr hilft das kaum mehr...

Ein anderes Beispiel: Die Quadratur des Kreises. Mit Zirkes und Lineal bleibt es unmöglich, ein Quadrat in einen flächeninhaltsgleichen Kreis zu verwandeln. Auch dies eine Erkenntnis des letzten Jahrhunderts (vgl. (Bib.: B10)). Doch der Mensch trägt die mit rationalen Mitteln so nicht mögliche Quadratur des Kreises in seinen Körperproportionen in sich. Mit seitlich ausgestreckten Armen bildet der ausgewachsene Mensch im Mittel ein Quadrat, das er mit Füssen, Fingern und Kopf berührt. (Vgl. Abbildung 108.) In dieser Stellung können wir aber auch durch Durchstosspunkt der Symmetrieachse durch den Boden und die Endpunkte seiner Fingerspitzen einen Kreis legen. Erstaunlicherweise hat nun dieser Kreis im Rahmen der Messgenauigkeit denselben Flächeninhalt wie das Quadrat: Der Mensch quadriert also den Kreis. Das Irrationale, Göttliche, wird durch ihn so in der Welt offenbar. Die Mathemata auf den Menschen angewandt liefern die Erkenntnis. (Achtung: Auf Leonardos bekannter Skizze mit dem Menschen in Quadrat und Kreis findet sich ein grösserer Kreis, der mit harmonisch proportioniertem Radius. (Vgl. Abbildung 109, . . .) Es handelt sich um eine Veranschaulichung des vom römischen Schriftsteller Vitruvius angegebenen Proportionsschema des Menschen.) Durch die materielle Erscheinung des Menschen spricht die ideelle Sprache der Geometrie: die Idee des Menschen. Wir staunen wieder. Wir können darüber rätseln, ob ein Problem von Pythagoräern vor uns liegt, die seine Lösung kannten. Beweisen allerdings können wir nichts. Solches Wissen war Geheimnis.

Ebenso die Dreiteilung des Winkels. Auch hier konnte erst im letzten Jahrhundert bewiesen werden: Abgesehen von Spezialfällen kann man allgemein einen Winkel nicht mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile teilen (vgl. (Bib.: B10)). Doch der Mensch kann es mit seinem Körper tun: Z.B. wenn er schreitet lässt er einen Kreis auf seiner Unterlage abrollen. Die abgerollte Länge lässt sich einfach mit Zirkel und Lineal dreiteilen. Durch wiederaufrollen, d.h. zurückschreiten erhält er den jetzt dreigeteilten Winkel zurück. Zudem lässt sich die Dreiteilung gewisser Winkel am Menschen in ausgezeichneten Ruhestellungen direkt abmessen.

Ein weiteres Problem wäre das der Transzendenz der Zahl Pi und der Konstruierbarkeit des Kreisumfanges mit Zirkel und Lineal. Pi ist transzendent, wie wir heute wissen, nicht konstruierbar als Strecke mit Zirkel und Lineal. Wie die Dreiteilung des Winkels "schafft" aber auch das der Mensch, denn die Quadratur des Kreises — und somit Pi — steckt in den Körperproportionen. . .

Es drängt sich nun die Frage auf: Wieso zeigt gerade der Mensch im Vergleich zu andern Lebewesen so viele mathematische, geometrische Prinzipien und birgt damit solche Geheimnisse? Was ist dabei naturwissenschaftlich, was entwicklungsgeschichtlich erklärbar, was ist uns heute hingegen nicht erklärbar? Fragen, die keine "wissenschaftliche" Antwort haben.

8.2.3 Von Mathematik und Schönheit

Ein Beispiel der bildenden Künste: "Poseidon", ein ausgewähltes antikes Standbild

Man denke an den Zeitgenossen Vasarely, an Escher, Reuterswärd und andere. Im letzten Jahrhundert war u.a. Böcklin ein grosser Bildrechner. (Vgl. Abbildung 110.) Noch früher Dürer, Holbein, Grünewald. Das kann man zeigen mit Hilfe von Rhöntgentechnik, die Konstruktionslinien sichtbar macht. Oder, was ich für viel eindrücklicher halte, durch Nachkonstruktion anhand von Photographien. Bei Dürer, der als Mathematiker magische Quadrate entdeckt und in seinen Bildern dargestellt hat, wird die Mathematik direkt ablesbar.

Die Geheimnisse eines Kustwerkes lassen den Betrachter sich unmerklich erheben, geben ihm unerklärlich ehrfürchtige Verehrung mit, weil da aus dem Sichtbaren, dem der Ratio aber Verborgenen etwas zu ihm spricht, das er selbst in sich trägt, vielleicht gehemmt in der Entwicklung, doch im Empfinden seines sozialen Wesens verankert.

Betrachten wir Poseidon, gefunden auf dem Grund der Ägäis, wo er seit der Antike geruht haben mag, heute aufgestellt im Nationalmuseum in Athen. (Vgl. Abbildung 89.)

Aus frontaler Sicht ist es mir gelungen, natürlich nach einigem konstruktivem Aufwand, an der Figur gleichseitige Dreiecke, Quadrate, beherrschendes Fünfeck und Zehneck, Kreise etc. auszumachen. Doch oh Überraschung: Die Proportionen des Menschen sind in einem wesentlichen Punkt verletzt! Das Quadrat, in dem Poseidon zweifelserhaben steht, ist zu klein. Oder anders: Mit seiner rechten Hand trifft er die Ecke des Quadrats, mit seiner linken weist er zielend in die Spitze eines grossen Dreiecks und damit über das Quadarat hinaus.

Ein Fehler — oder der Wille des Bildhauers der Antike, der, der mathematischen Symbolik gewiss kundig, so exakt diese Figuren verarbeitet hat? Auf einem riesigen, seiner Körpermitte entlang laufenden Kreise aufgespannt, am Rande der Harmonie des Kreises also, weist diese in Metall, in festeste, edle Materie gegossene Figur mit der zielenden Hand über das Materielle, über das Quadrat hinaus streng ins gleichseitige Dreieck, ins Göttliche. Hier ist ein Gott dargestellt! Fünfeck und Zehneck zeigen ihn symbolhaft im Kleid des Menschen, dem Menschen ein Bild, fest mit dem Boden, der Erde verbunden, im Zentrum die Fruchtbarkeit. Doch der Blick wie auch vielleicht der fehlende, jetzt leicht in ursprünglich richtiger Lage denkbarer Dreizack (Lanze) und die Hand verlassen die menschlichen Symbole, weisen über sie hinaus: Ein wahrhaftes Kunstwerk — könnte man jetzt staunend ausrufen!

Dem antiken Betrachter konnte solche heutige auf Photographie beruhende geometrische "exakte" Analyse nicht möglich sein. Das Werk trägt unsichtbar dem auf exakte Linien der Erscheinungswelt fixierten Verstand die Geometrie und die Zahlensymbolik in sich, unter dem Schleier des Umgreifenden, unbewusst Wirkenden, als Idee doch Erahnbaren. Was einem tief und unwissend, ja ursprünglich ergreift, nennen wir "schön". Den Sinnen verborgen konnte der Betrachter sich dem nicht entziehen, was die sichtbar bleibenden ausgezeichneten Punkte und Linien vom dahinterliegenden Ordnungsprinzip, vom "Kosmos" erzählen. Sie hinterlassen eine Spur des Verstehens, ein Gefühl der Unbestreitbarkeit, dass hier etwas geschieht, etwas Ausserortendliches, ein Fingerzeig des Göttlichen, ehrfurchterregend. Uns mag es heute als Stilmittel erscheinen. Damit vergessen wir die andern Massstäbe anderer Zeiten, wenden die eigenen an und fragen uns kaum, ob sie passen. Das Kustwerk lehrt uns: Das wesentliche Ordnende, der eigentliche Kosmos, bleibt tief hinter dem Sichtbaren verborgen. Hier die Geheimnisse zu lichten bedarf intellektueller Anstrengung. Zur Geometrie gibt es da immer noch keinen Königsweg.

Musik, ein Genuss dem Ohr

Ein Genuss dem Ohr? Oder hat auch sie sich entfernt von der Harmonie, entfernt von Pythagoras? Und wieso Pythagoras?
Unsere Musik ist im Grundaufbau griechisch (vgl. (Bib.: B4), (Bib.: B5)). Ihr Hüter war Apollo, der Hauptgott der Pythagoräer. Ihr Sinn war die Läuterung. Die aus Instrumenten wie Lyra und Flöte erklungenen Melodien bestanden jetzt aus diskreten Tonfolgen mit festen Tonhöhen. Tonleitern: Sie entstammen den Pythagoräern. Pythagoras wird zugeschrieben, er habe die lautquantitativen Beziehungen entdeckt, die wir Intervalle nennen. Die Tonika, der Grundton ertönt durch eine ganze Saite. Auf drei Viertel verkürzt, erklingt die höhere Quart, auf zwei Drittel verkürzt die Quint, beim Halbieren die Oktave. Bis zur temperierten Stimmung, bis zu Werckmeister und Bach waren die Tonverhältnisse unverfälscht, rational. Eine Tonleiter (Oktave) besteht in dieser Musiktradition aus festen Tonschritten, sieben Intervalle an der Zahl, d.h. acht Tönen. Eine solche Oktave entstand aus zwei Tetrachords (Viertonreihen), deren "Ecktöne" feststehen.

Aus der Antike wissen wir zwar von einer Musikschrift (Notenzeichen, z.B. im Museum von Delphi), doch die Interpretation fehlt. Unsere Notenschrift geht aus den frühmittelalterlichen Neumen hervor. Das überlieferte

Mittelalter kannte dann nach griechischem Muster erst acht, später zwölf (!) Kirchentonarten: Die fünf Hauptmodi dorisch, phrygisch, lydisch, äolisch (moll) und ionisch (dur), sowie deren Hypo– und Mixo–Arten. Später in der temperierten Stimmung opfert man die reinen, rationalen Tonverhältnisse der Möglichkeit des Tonartenwechsels, des Orchesters also. Wir haben hier den "Musikkosmos": Zwölf etwas verfälschte, nicht mehr rationale Halbtonschritte, (mit dem Endton der Oktave dreizehn Halbtöne), woraus man die aus sieben Tonschritten bestehende jeweilige Tonleiter auswählt, ausschöpft: Die "Harmonie", in der das Musikstück, die "Musikschöpfung" dann Gestalt bekommt. Verzichten wir auf die Halbtonschritte, so gelangen wir zur Pentatonik (drei Ganztonschritte und zwei Anderthalbtonschritte, fünf Tonschritte.). Es wird wohl heute kein Geheimnis mehr sein, dass die Werke vieler grosser Musiker nicht nur musikalisch äusserst schön sind, sondern zudem noch mathematische Vollkommenheit aufweisen: Tonmuster manifestieren algebraische Gesetze. Man denke an Bach oder Chopin (vgl. (Bib.: B11), (Bib.: B12), . . .).

Die verlorene Harmonie

Sind wir Mathematiker oder Akusmatiker? Diese Frage gleicht der Frage nach Stufe, Rang und Würde. Sie geht ins Weltanschauliche. Ein Bildungswert der Mathematik liegt etwa darin, für solche Dinge die Augen zu öffnen, feiner zu sensibilisieren, grössere Freiheit durch tieferes Verstehen zu schenken. So rettet die Mathematik längst vergangene, dem Bewusstsein nicht mehr vertraute kulturelle Werte.

Wohl aus utilitaristischen Gründen, der praktischen Nützlichkeit wegen, sind uns aus den Wurzeln unserer Kultur Arithmetik, Geometrie und noch Astronomie erhalten geblieben. Doch die Harmonie, die vierte der Mathemata? Wir geniessen sie in der Musik, ihre Bedeutung verkennend haben wir sie aber in dem, was als die Moderne gilt, längst zu den Requisiten geworfen, denn sie hat keine praktische Nützlichkeit. Ihre Wurzeln sind ideeller, tief menschlicher, doch leider heute vergessener Natur. Und in den bildenden Künsten, Malerei, Bildhauerei, Architektur? Zumeist dasselbe Bild. Neuartigkeit, Effektenhascherei spricht die Neugier, die Sensationslust, das Surrealistische im Menschen an. Doch wieso muss heute das Können so oft einfach dem "Zufall" überlassen sein, der mathematischen Strenge von Harmonie abgeschworen, z.B. so dass menschliches Einwirken im Kunstwerk auf das Explodierenlassen einer Bombe reduziert ist? Sicher ein interessantes Experiment. Das Dionysische in der Kunst? Freiheit, die nur noch Freiheit ist und keine Kraft mehr zum Willen zu einer Reife aufbringt? Zwar formuliert z.B. J. Beuys das reizende Argument, dass die Kunst nicht mehr in der Materie stecken soll, wohl aber im Werk dadurch, dass dieses den Betrachter dazu bringt, Kunst in sich selbst entstehen zu lassen. Bemerkenswert, der Geist, nicht nur die Hände sollen schaffen. Doch zufällige Gegenstände symbolisieren dem Menschen kein Ideal mehr, das ihm die Richtung auf eine Reife weist. Ich meine dazu: Richtung ist dem Mensch wesentlich, denn seine Existenz erscheint tatsächlich, bedingt durch ein Umfeld und durch eine Entwicklung gerichtet. Er hat zwar die Freiheit, sich für das Gute im Sinne einer Ethik zu entscheiden. Und so wie er dadurch nicht zufällig ist, kann auch nicht zufällig sein, was er als schön, als angenehm, erbauend, als Kunst — im Sinne von etwas Besonderem –empfindet.

Ist der Mensch dem Menschen nun nicht mehr schön, seine Gesetze kein Mass mehr? Muss sich der Mensch und seine Werte auflösen, zerfallen, dem Widersacher des Apollo, dem Dionysos geopfert, dem Rausch, den Drogen, den Trieben? Oder wird etwa das Maschinenhafte mehr und mehr zum Masse des Menschen? Auf wem lasten dann die Folgen? Wählen wir wieder eine Richtung! Wecken wir doch die verlorenen Werte wieder, geben wir ihnen frei Gelegenheit, neu zu erstarken, mit erweitertem Inhalt wieder Wege auf Ziele zu weisen, die das Leben angenehm machen können, wenn sie das Bewusstsein erreichen.

Unbesiegbar scheinende Kulturen sind erloschen — doch die Kultur lebt, denn der Mensch in seiner Welt ist immer noch Mensch mit seinen Gewohnheiten im Kosmos. Die Revolution in Frankreich hat es erfolglos unternommen, z.B. die eingebürgerten Gepflogenheiten der Zeitrechnung über Bord zu werfen. Spätere Revolutionen haben das nicht mehr gewagt. Dafür setzte man den Hebel woanders an. Denken war in vielen Epochen lebensgefährlich, wenn es den Mund verliess. Doch an Mathematik zu zweifeln, sie in Frage zu stellen, ihre Erkenntnisse in den Dreck zu schleudern, das hat noch niemand gewagt, der sich die Achtung bewahren wollte — auch keine Revolution. Denn sie geniesst denselben Respekt wie die Naturgesetze, obwohl

sie dem Auge meist verborgen bleibt. Verbinden wir die Mathematik doch auch wieder mit dem Menschen! Das wäre ein Stück kulturelle "Heimat" und Geborgenheit, ein Stück Bildung, Arznei für die Gesellschaft.

Ausbildung um Geld zu verdienen, als Lebensgrundlage des einzelnen, ist wichtig. Noch wichtiger jedoch ist die Lebensgrundlage der Sippe, des Volkes, der Menschheit. Bedenken wir: Bildung erweist sich als Fundament der Werte und des Urteils von uns Menschen. Wenn aus Bildungsmangel die Werte im Chaos versinken, ist die Richtschnur des Urteilens als Grundlage des Entscheidens — und daran geknüpft die Zukunft unseres Geschlechts — dem Zufall ausgeliefert. Bildung ist daher die Lebensgrundlage der Menschheit, ohne die es für das Weiterleben aller keine Garantie gibt.

Mathematik ist die Wissenschaft auch der Sicherheit, denn Beweise geben absolute Sicherheit. Längst hat sie sich von der Religion getrennt, profanisiert, eingespannt vor dem Wagen anderer Wissenschaften, den alten Idealen abtrünnig, isoliert, die Gesetze des Ganzen der alten Mathemata verachtend. So hat sie den Planeten verändert. Doch die süssen Früchte lassen sich schwer verdauen. Globale ökologische, ökonomische, demographische Ungleichgewichte bedrohen den Zauberlehrling. Wussten die Pythagoräer etwa um das Gesetz, dass Erkenntnis in falschen, unreifen Händen dem Eigennutz, der Perversion dient und zum Schaden aller wird? War das der Grund für die strenge Verwahrung der Geheimnisse? Gewiss kehrt der freigelassene Geist nie mehr freiwillig in die Flasche" zurück. Wir müssen ihn daher dressieren, ihn beherrschen lernen, ihn in das Netz der Verantwortung einbinden. Ein ewiges Gefecht. Verantwortung wird grösser, wenn die Unreife kleiner wird: Bringen wir also wieder mehr Bildung, mehr Bewusstsein für diese ganzheitlichen Zusammenhänge da hinein, wo die Menschen geistig wachsen, wo sie ihr Rüstzeug, ihren modernen Glauben, ihr Vertrauen und viele ihrer Hoffnungen her haben: in den Unterricht! Gross kann er sein und folgenschwer kann er da wirken, der Bildungswert der Mathematik. Denn die heutigen geistigen Kinder der Wissenschaften drückt der Schmerz ob der verlorenen Orientierung, vor Augen die entstandenen Probleme dieses Planeten. Um die Sicherheit alter Wertvorstellungen gebracht, abgenabelt von den alten Ideen, blicken wir nach Delphi, dem antiken Nabel der Welt, wo Apollo als "spiritueller Pate" der Pythagoräer an der Wiege der Wissenschaften das Bewusstsein leitete. Wer will denn meinen, dass beim geistigen "Besuche solcher alter Verwandten" nicht das verlorene Urvertrauen wieder erstarken kann?

Kapitel 9

Beispiele von geometrischen Gerüsten, symbolbezogene Formen und Zahlen, Prinzipien und Zeugen

Sammlung der Abbildungen und Bildnachweis:

Bildnachweis: Die mit "P" bezeichneten abgebildeten Photos stammen vom Autor aus der Zeit 1965–89. Alle Rechte liegen bem Autor. Dasselbe gilt für die Zeichnungen, sofern kein Bildnachweis beigefügt ist.

9.1 Erste geometrische Zeugen

9.1.1 Projektion und Proportionierung

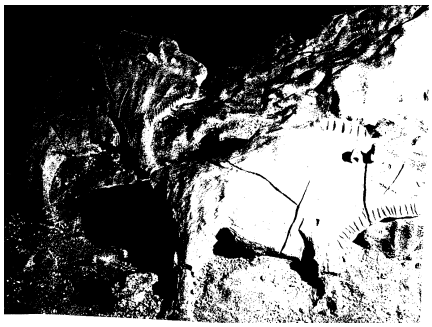


Abbildung 39: Terrakotta, Steinzeit

Abbildung 40: Höhlenmalerei, Steinzeit

9.1.2 Geometrie und Astronomie, Kalender

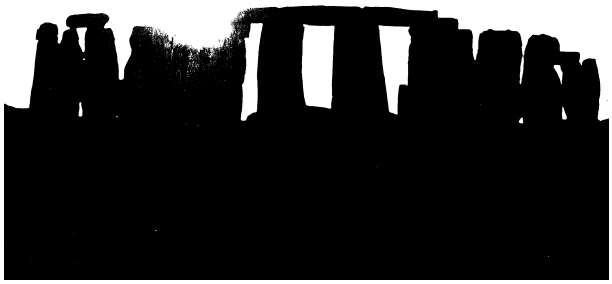


Abbildung 41: Stonehenge mit Sonne

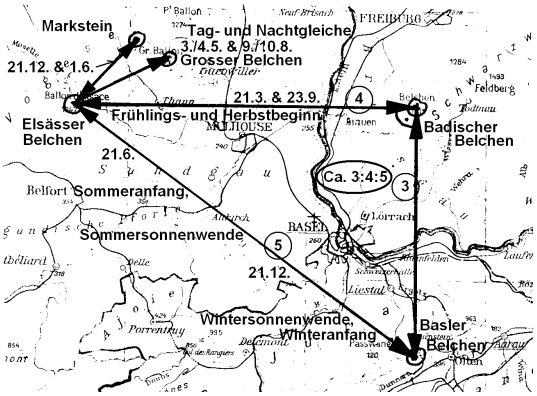


Abbildung 42: Belchendreieck

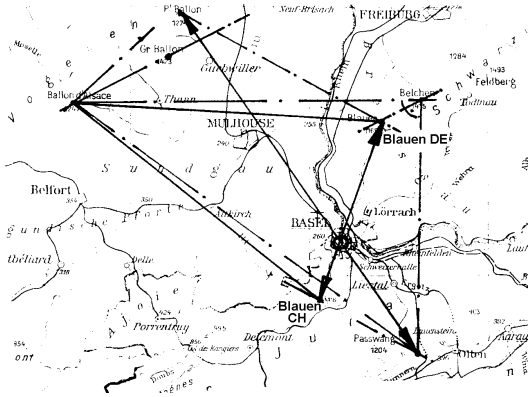


Abbildung 43: Blauendreieck und Lage von Basel

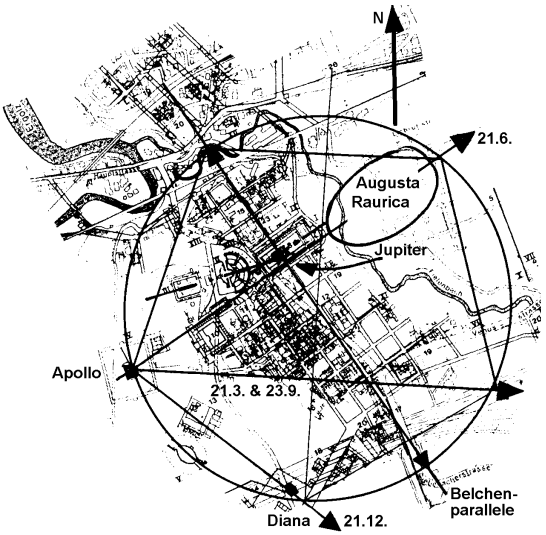
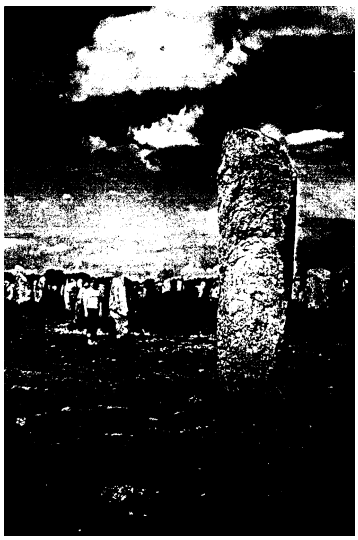


Abbildung 44: Aus dem Stadtplan von Augusta Raurica

9.1.3 Geometrische Punkte, Linien, Formen

P. 45: Menhire bei Carnac ...



P. 46: ... Carnac (Locmariaquer), Bretagne

P. 47: Menhire bei Carnac ...

P. 48: ... Carnac (Locmariaquer), Bretagne

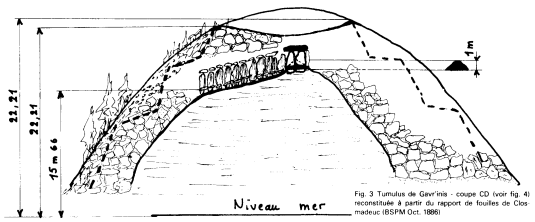
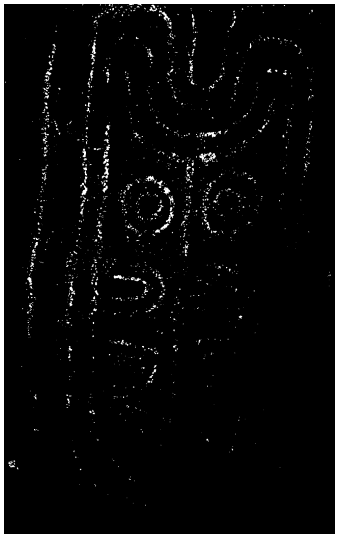


Abb. 49: Tumulus-Stufenpyramide

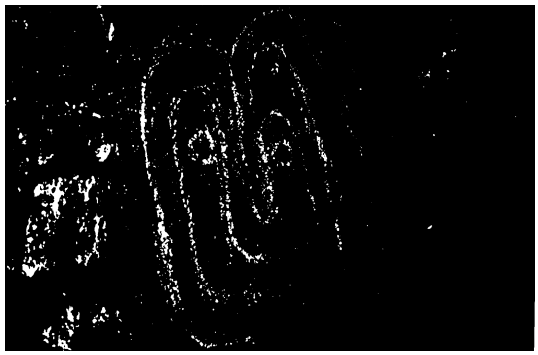
P. 50: Dolmen (Locmariaquer)

Interessanterweise finden wir um die Zeit vor bis während des Pyramidenbaus in Ägypten auch in Wes-

teuropa Stufenpyramiden (3000 – 2500 v.Chr.). Bekannt sind die Stufenpyramiden resp. Tumuli der Insel Man und der Insel Gavr'inis bei Locmariaker (Locmariaquer) nahe Carnac, Bretagne, mit einem Basisdurchmesser 52.5 Meter (vgl. Schnittzeichnung, Detail aus dem Bulletin de l'association archeologique Kergal, études et travaux, mai 1977).

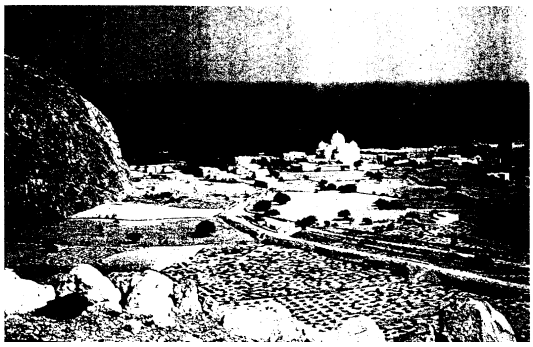


P. 51: Inneres eines Dolmen (Locmariaquer)

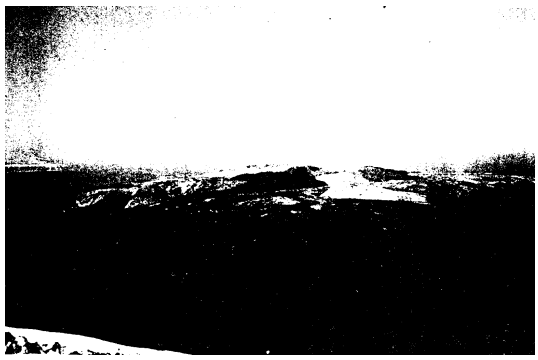


P. 52: Inneres eines Dolmen (Locmariaquer)

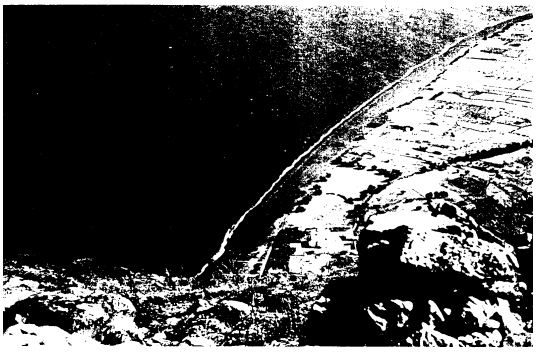
9.1.4 Geometrie in der Seefahrt, Navigation



P. 53: Blick von Santorini (Ägäis) aufs Meer



P. 54: Blick von Santorini (Ägäis) aufs Meer

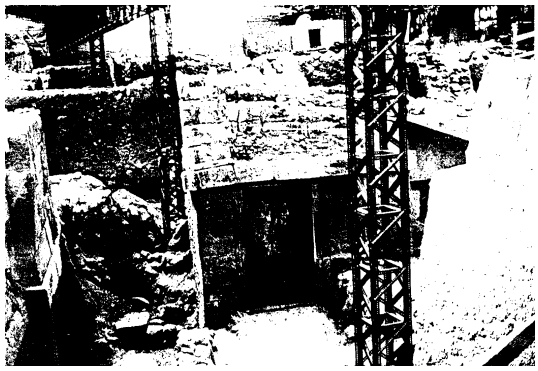


P. 55: Blick von Santorini (Ägäis) aufs Meer

Wie ist man zur Zeit der minoischen Hochblüte (ca. 1700 v.Chr.) von Knossos (bei Heraklion, Kreta) nach Santorini gesegelt, ohne an dieser kleinen Insel vorbeizusteuern und ganz wo anders zu landen? Ohne Präzise Navigation war das unmöglich.

9.1.5 Geraden, Proportionen, Formen in der minoischen Zeit

P. 56: Blick in eine minoische Stadt



P. 57: Blick in eine minoische Stadt

P. 58: Blick in eine minoische Stadt

Die Vulkaninsel Santorini ist im ca. 1500 v. Chr. buchstäblich explodiert, nur der dünne Kraterrand blieb erhalten. Ähnlich wie in Pompei steigt die alte Zeit heute aus dem Tuff–Gestein. Sieht ein Dorf der Gegenwart anders aus? (Lit. (Bib.: A19))

9.2 Ideale Formen

9.2.1 Platonische Körper

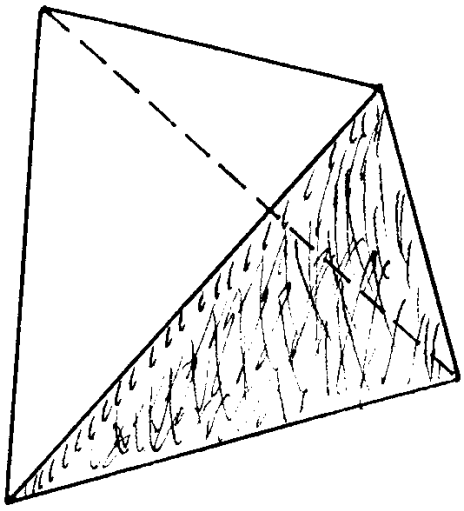


Abb. 59: Ansicht eines Tetraeders

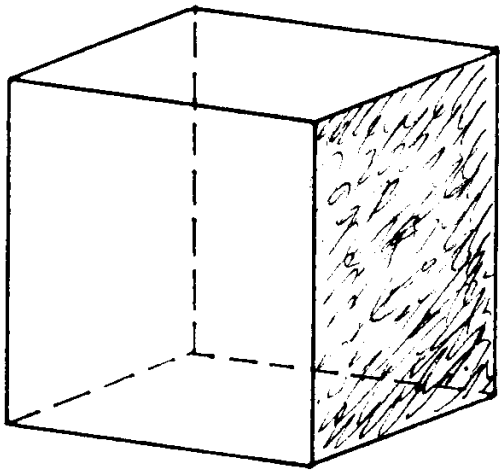


Abb. 60: Ansicht eines Hexaeders

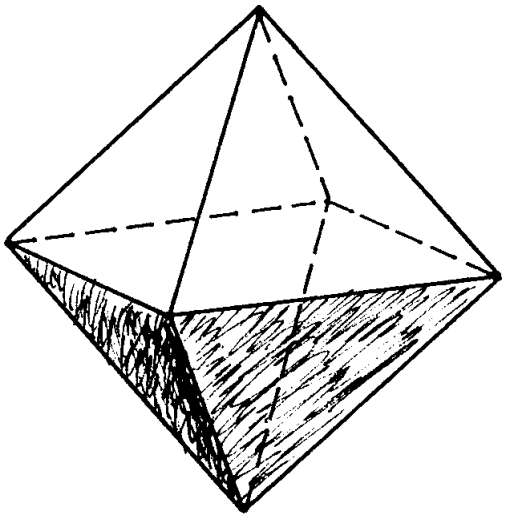


Abb. 61: Ansicht eines Oktaeders

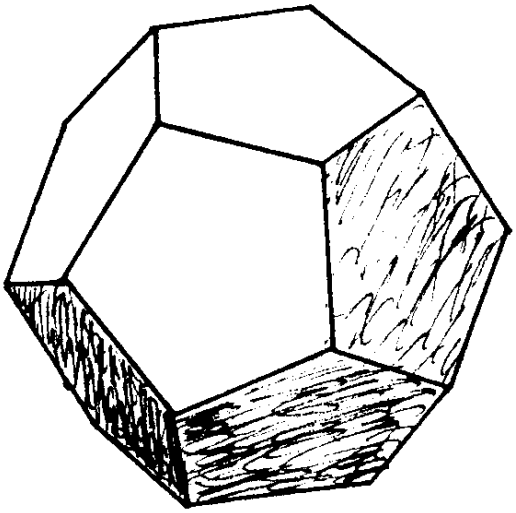


Abb. 62: Ansicht eines Dodekaeders

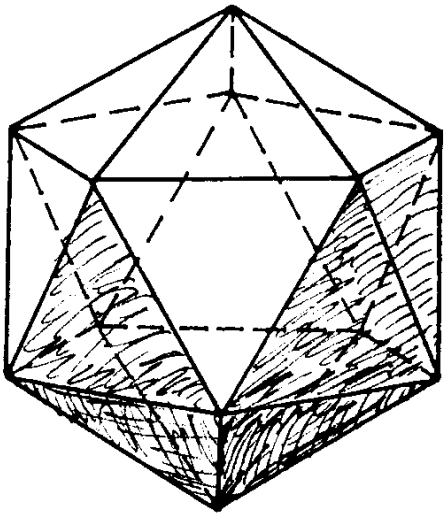


Abb. 63: Ansicht eines Ikosaeders

Im Raume gibt es nur fünf im Sinne von Regelmässigkeit und Symmetrie vollkommene Körper mit lauter gleichen, regelmässigen Seitenflächen: 4–, 6–, 8–, 12– und 20–Flächner.

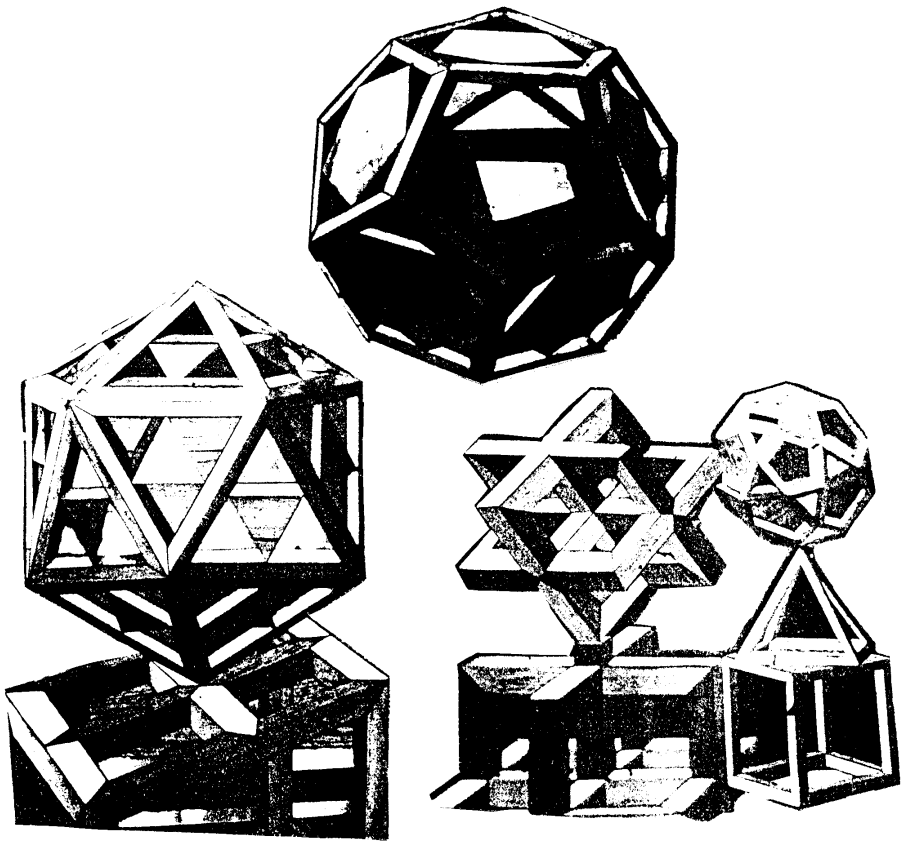


Abbildung 64:
Renaissance–Intarsien, unbekannter Meister (Fra Giovanni da Verona? — Deutscher Meister?)

9.2.2 Kreispackung, Kugelpackung, Symbolik

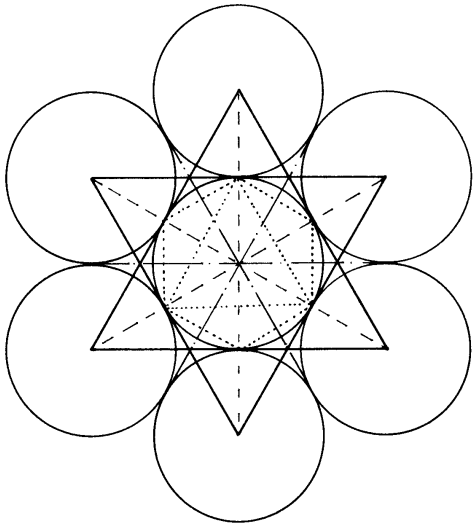
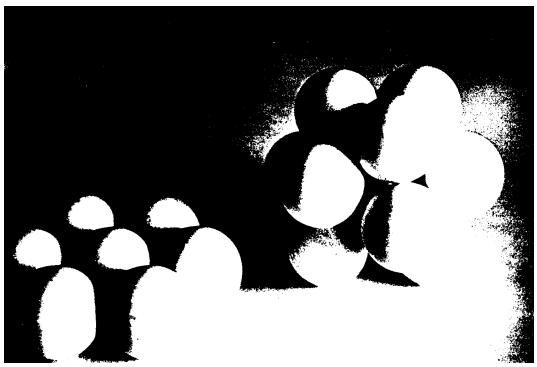


Abb. 65:
Das Sechseck: Das "göttliche Dreieck", die "innere" Welt und sein Spiegelbild, die "äussere" Welt im Kreise, dem Vollkommenen. Harmonie in der ebenen Geometrie.



P. 66:
Im Raume lassen sich zwölf Kugeln um eine dreizehnte gruppieren. Jedoch bleiben immer Lücken, wie man's auch anstellt!

9.3 Zahl, Figur, Symbolgehalt: Bezug zu Natur und Mensch

9.3.1 Ganze Zahlen, rationale Verhältnisse

P. 67: Yin und Yang ...

P. 68: ... in der Natur sich offenbarend

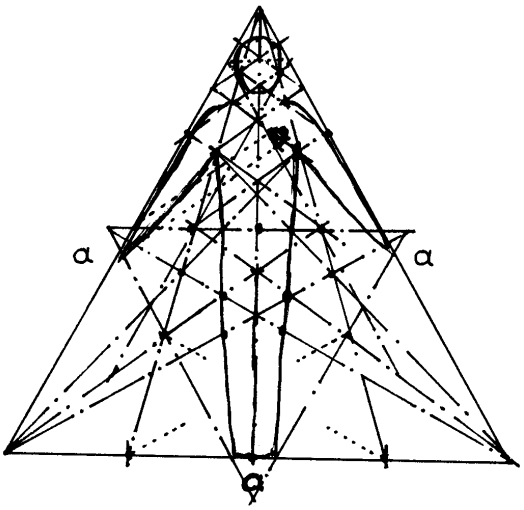


Abb. 69: Der Mensch im Dreieck

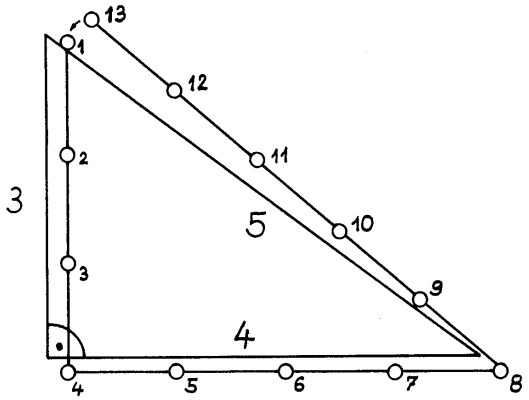


Abb. 70: Pythagoräisches Zahlentrippel

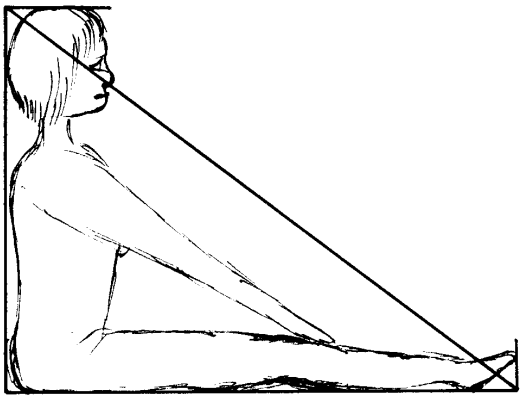


Abb. 71: Mensch und pyth. Dreieck

Fig. oben links: Der Mensch "passt" auch ins gleichseitige Dreieck. Doch zwei Ecken sind ihm vorenthalten.
Fig. oben rechts: $3^2 + 4^2 = 5^2 \rightsquigarrow (3, 4, 5)$ ist ein pythagoräisches Zahlentrippel. Mit einem Seil, in das in gleichen Abständen 13 Knoten geknüpft sind, massen früher die Bauleute den rechten Winkel.
Fig. links: Der ausgewachsene Mensch "passt" ins kleinste pythagoräische Dreieck.

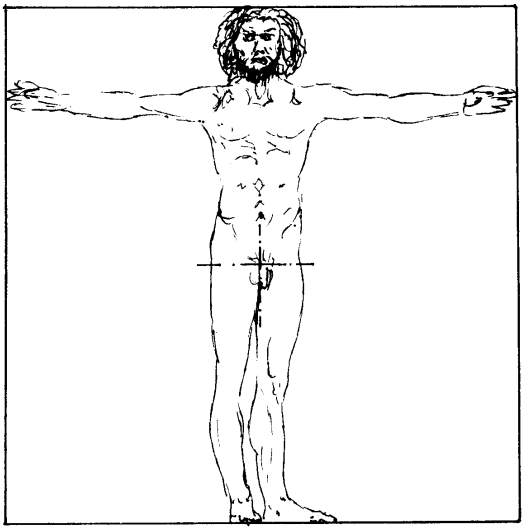


Abb. 72: Mensch und Quadrat

Der "irdische", ausgewachsene Mensch passt im Mittel ziemlich genau ins Quadrat, dem Symbol des Materiellen $\rightsquigarrow$ Körperhöhe = Spannweite. (Die Nachmessung der Behauptung bei zwei Schulklassen von ca. 20–Jährigen (CH) hat die Tatsache bestätigt.)

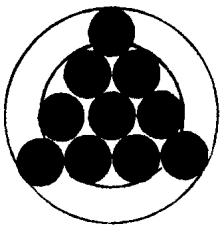


Abb. 73: Tetraktys

9.3.2 Irrationale Verhältnisse

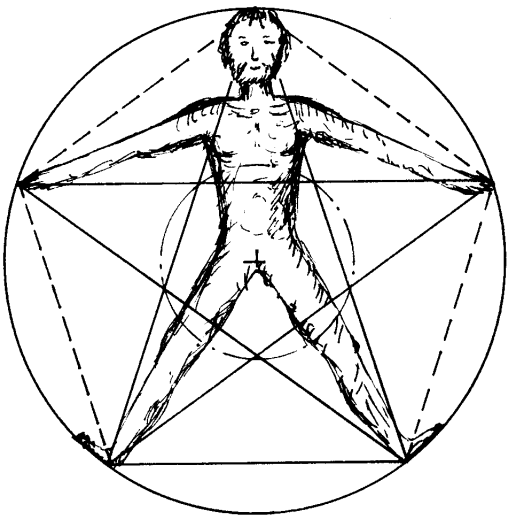


Abb. 74: Der Mensch im Fünfeck

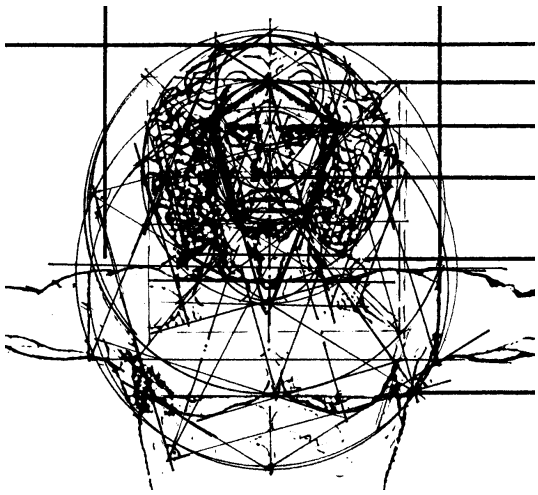


Abb. 75: Kopf, Fünfeck, goldener Schnitt

Der Mensch wie auch das Pentagramm tragen in sich den goldenen Schnitt. Sie stimmen im Bauplan überein. Und der Mensch passt auch ins Pentagramm, das Symbol des Menschen. Diese Figur war auch das Zeichen der Pytagoräer. Sie hielten geheim, dass die Diagonale und die 5–Eck–Seite inkommensurabel sind.

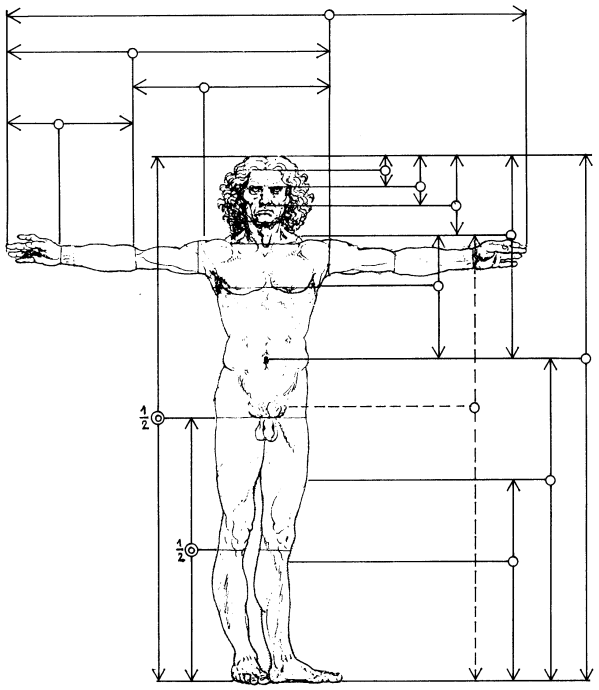


Abb. 76: Mensch und goldener Schnitt

Beispiele von Massen am vollkommen harmonisch gebauten, ausgewachsenen Menschen. Der harmonische Teilpunkt einer Strecke liegt so, dass sich die gesamte Strecke zur grösseren Teilstrecke so verhält wie die grössere Teilstrecke zur kleineren. Ebenso erkennt man Halbierungen.

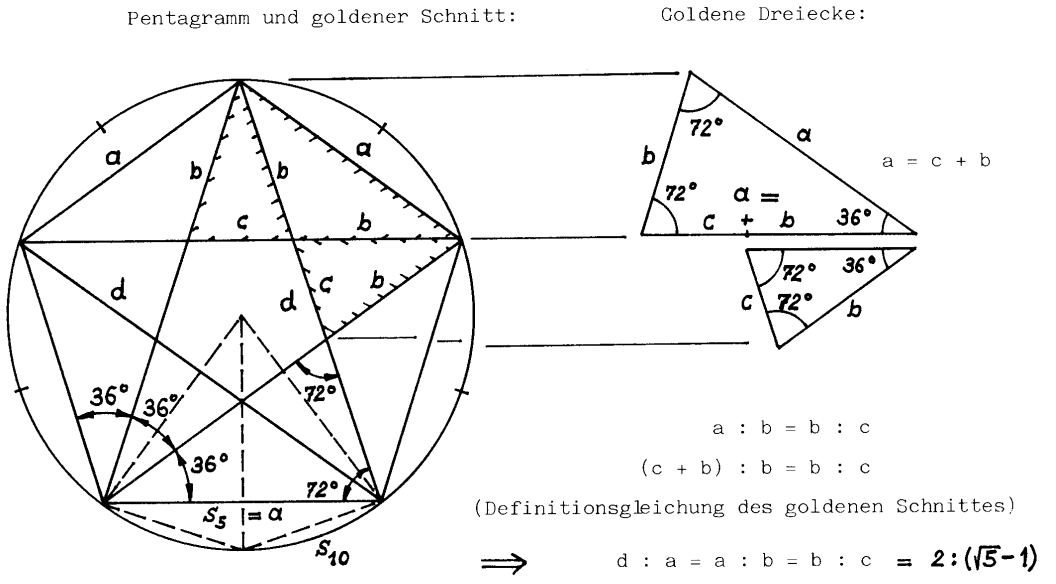
Pentagramm und goldener Schnitt, goldene Dreiecke:

$a = b + c,\ \ d : a = a : b = b : c,$

$(c + b) : b = b : c$

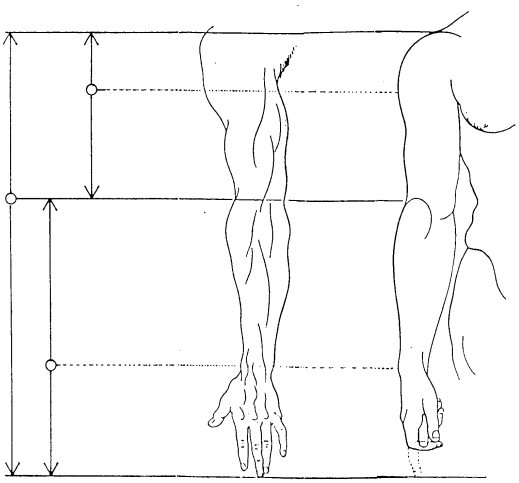
$$\Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

$\rightsquigarrow$ Die harmonische Teilung.

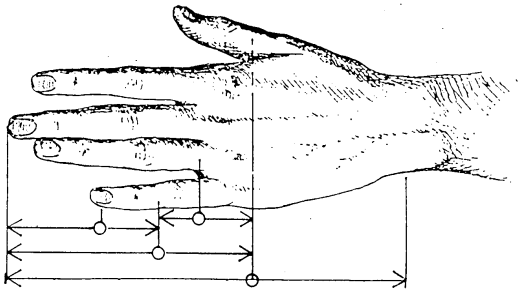


Das Symbol des Menschen, das Pentagramm, war das Zeichen der Pythagoräer.
(Sie hielten geheim, dass Diagonale und Fünfeckseite inkommensurabel sind..)

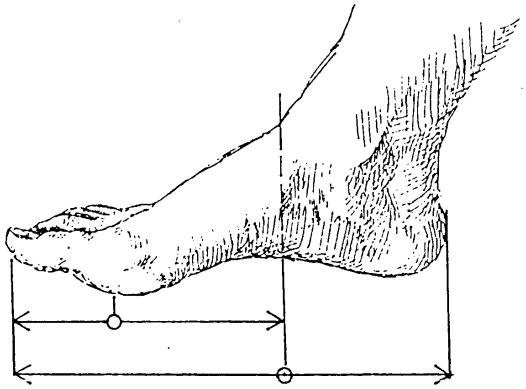
Abb. 77: Fünfeck und goldener Schnitt



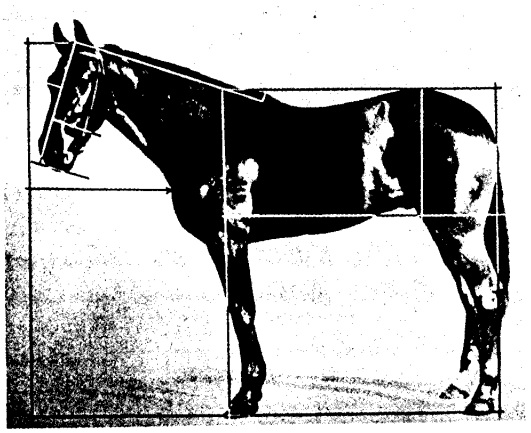
A. 78: Mensch und goldener Schnitt



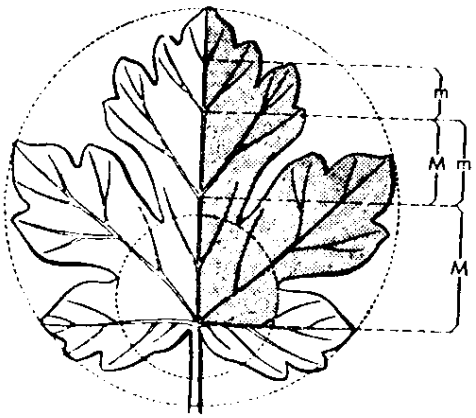
P. 79: Mensch und goldener Schnitt



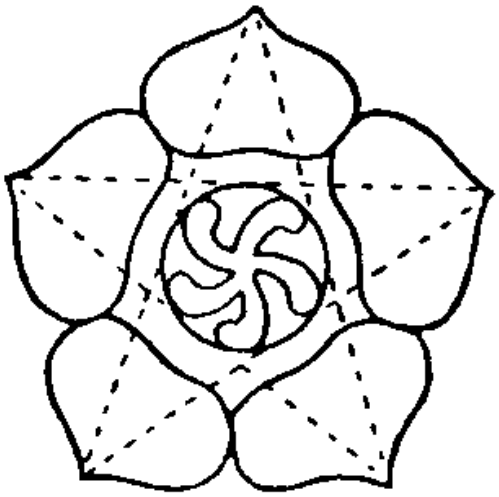
A. 80: Mensch und goldener Schnitt



P. 81: Pferd und goldener Schnitt

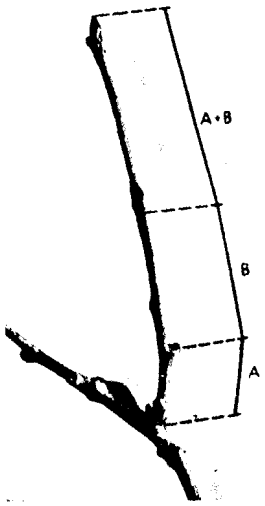


A. 82: Blume und goldener Schnitt

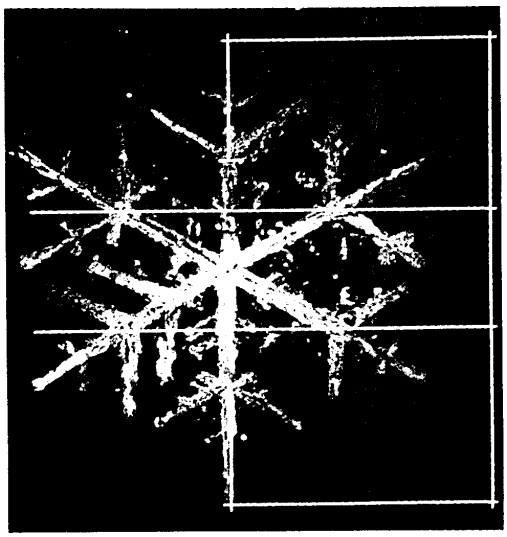


P. 83: Blume und goldener Schnitt

Abb. 84: Weymouth–Kiefer–Zapfen und Fibonacci–Zahlen



A. 85: Zweig und goldener Schnitt



P. 86: Schneeflocke und goldener Schnitt

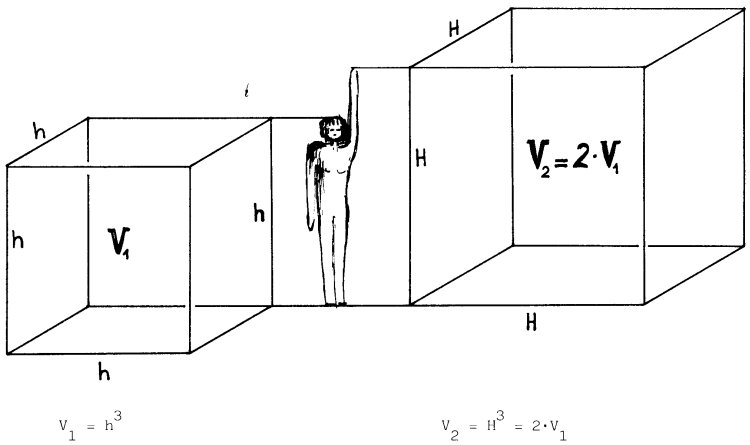


Abb. 87: Mensch und Kubus–Verdoppelung

Der "vollkommen" geformte Mensch verdoppelt sich selbst als Kubusinhalt, er braucht bloss den Arm hochzuhalten. Doch der Inhalt eines aus gleichen kubischen Bausteinen geformter Kubus lässt sich mit solchen Bausteinen nie verdoppeln.

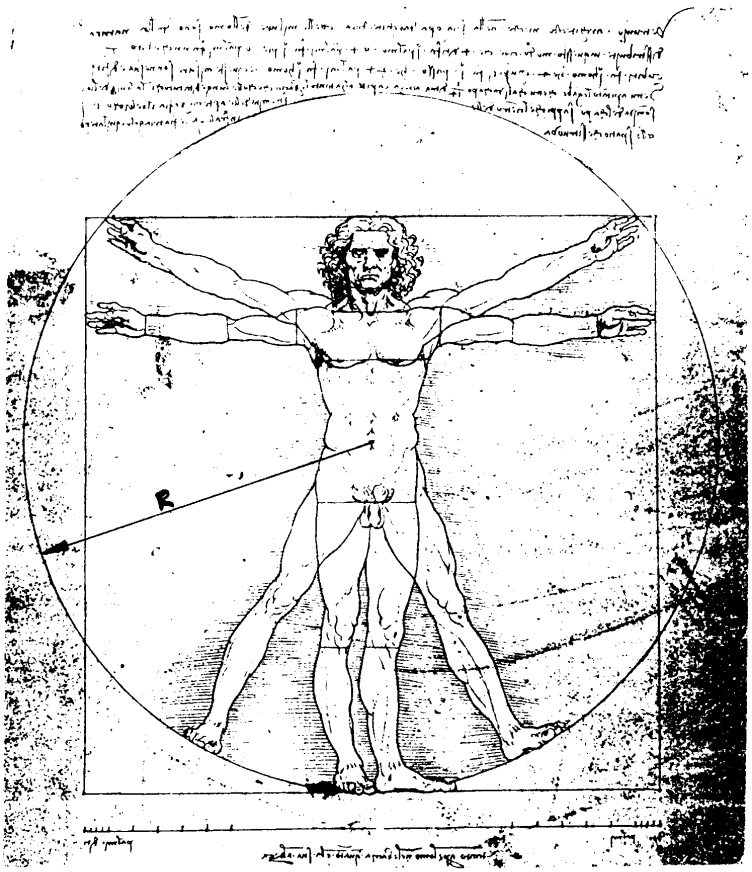


Abb. 88: Leonardos Zeichnung vom Mensch im Quadrag mit „harmonischem Kreis“

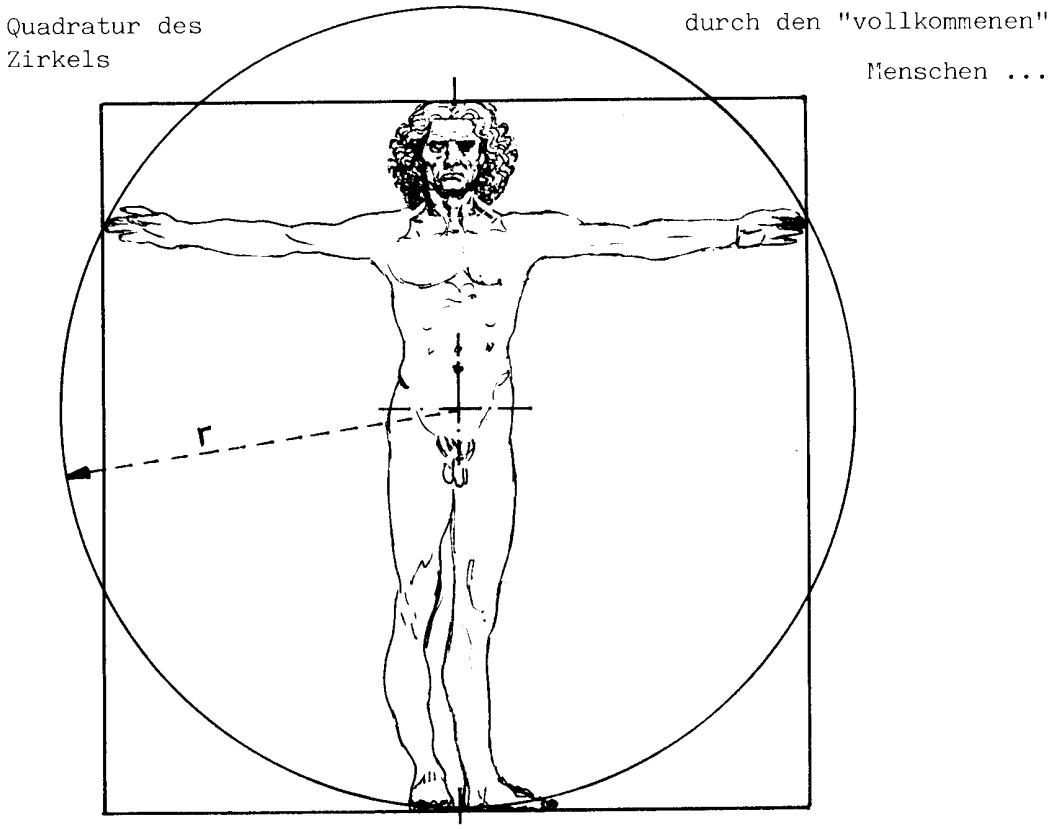
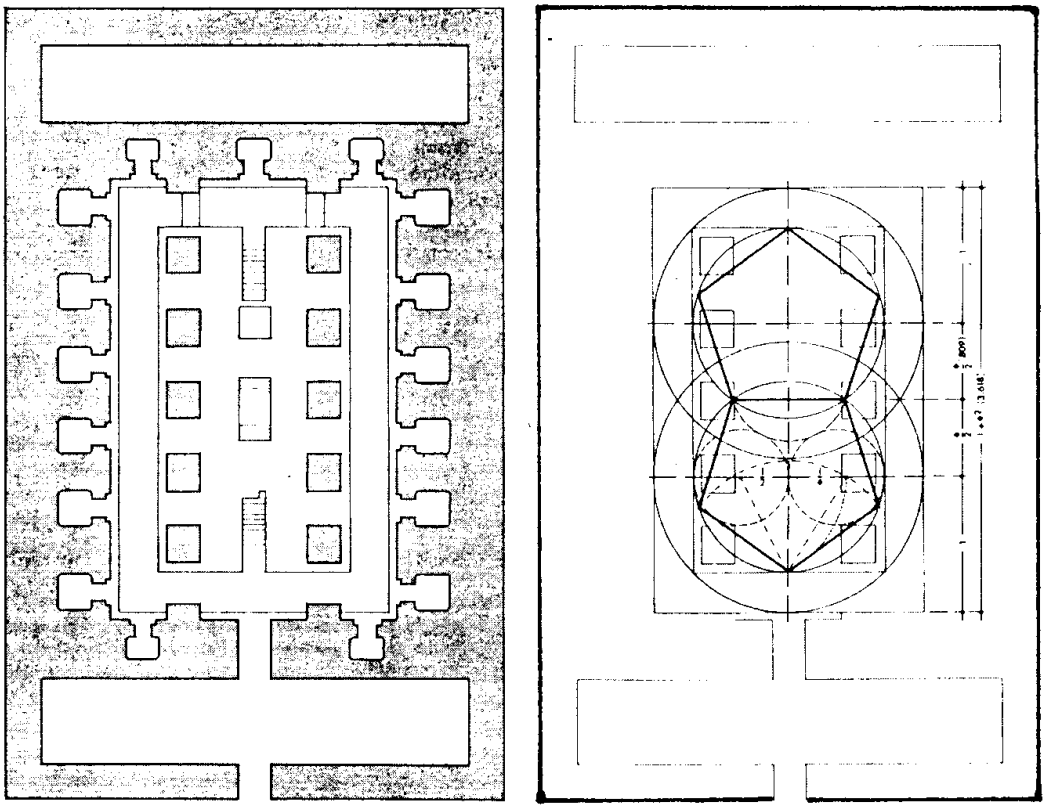


Abb. 89: Der Mensch quadriert den Kreis: Achtung: Leonardos Kreis ist grösser!

(Zur Quadratur des Zirkels durch den vollkommen geformten Menschen: Kreis und Quadrat sind im Rahmen der Messgenauigkeit etwa flächengleich.)

A. 90: Osiristhempel, unterirdisch, vermutlich aus der Zeit von Seti I, 1312 – 1298 v.Chr.

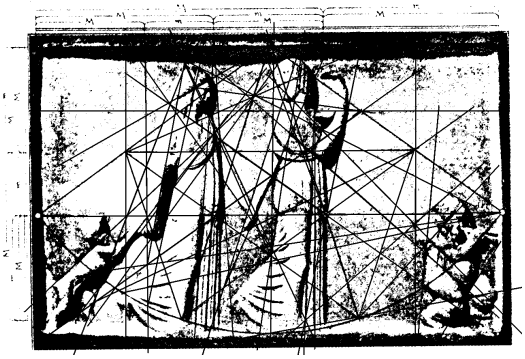


P. 91: Osiristempel, Grundriss mit Fünfeck (von Lucie Lamy)

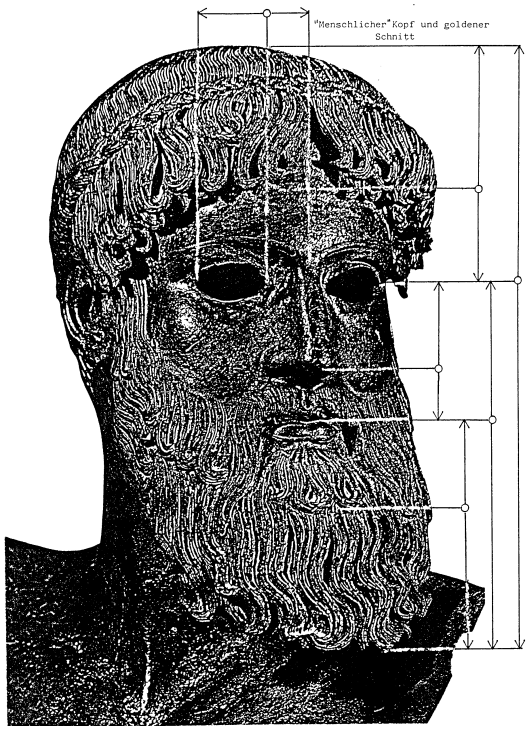
9.4 Das geometrische Gerüst in der Kunst

9.4.1 Rationale und irrationale Verhältnisse in der Antike und später

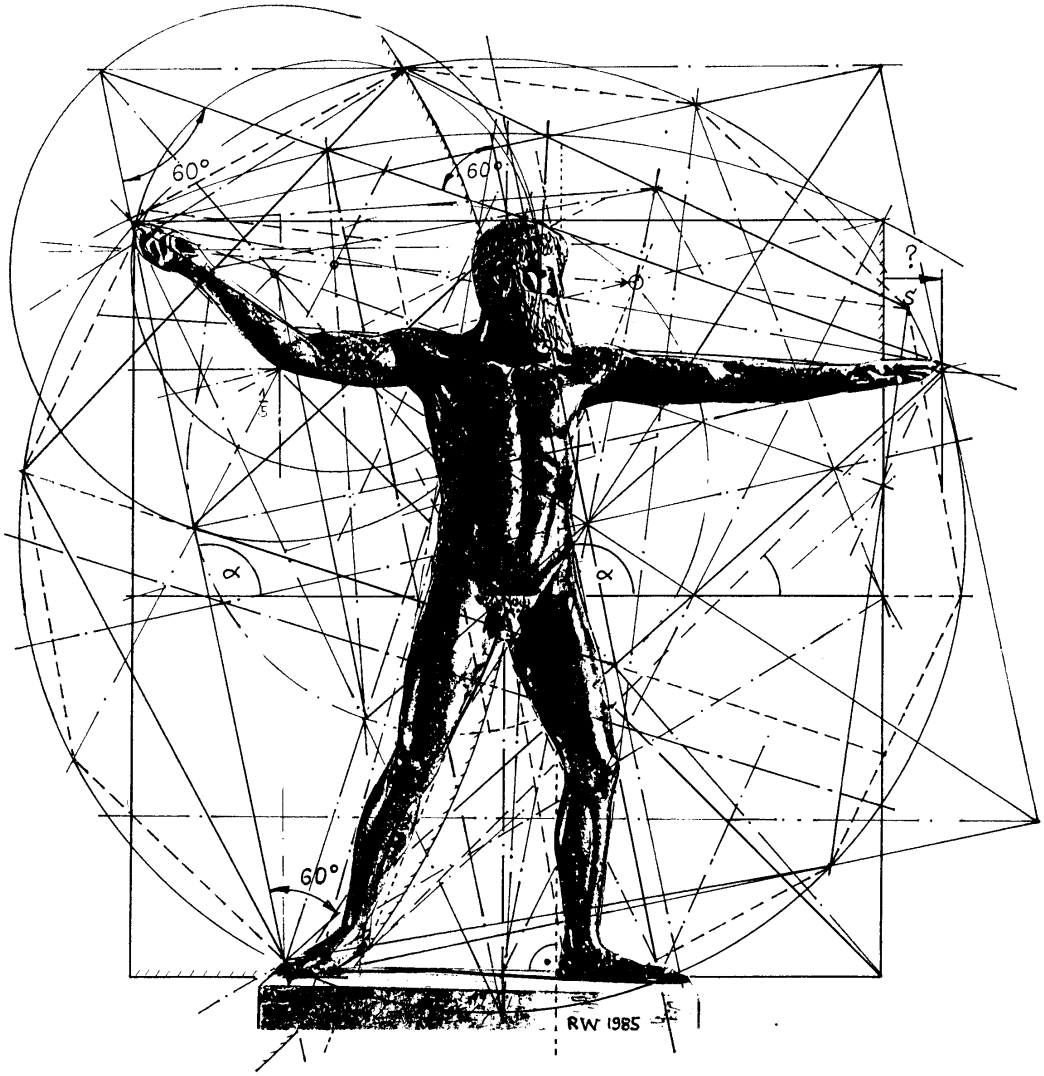
Abb. 92: Hermes od. Medusa, röm. nach griech Original, Glyptothek München



A. 93: Dionysisches Relief, Villa Albani, Roma

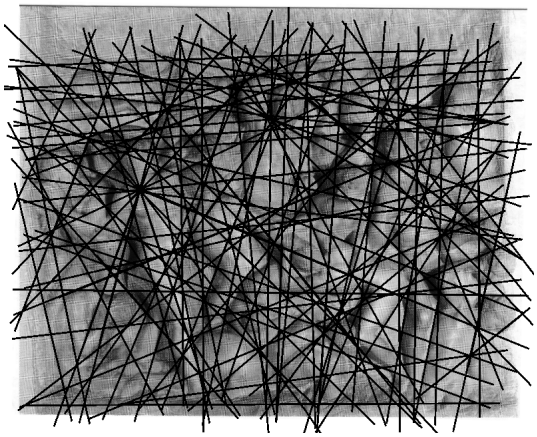


P. 94: Poseidon und der goldene Schnitt

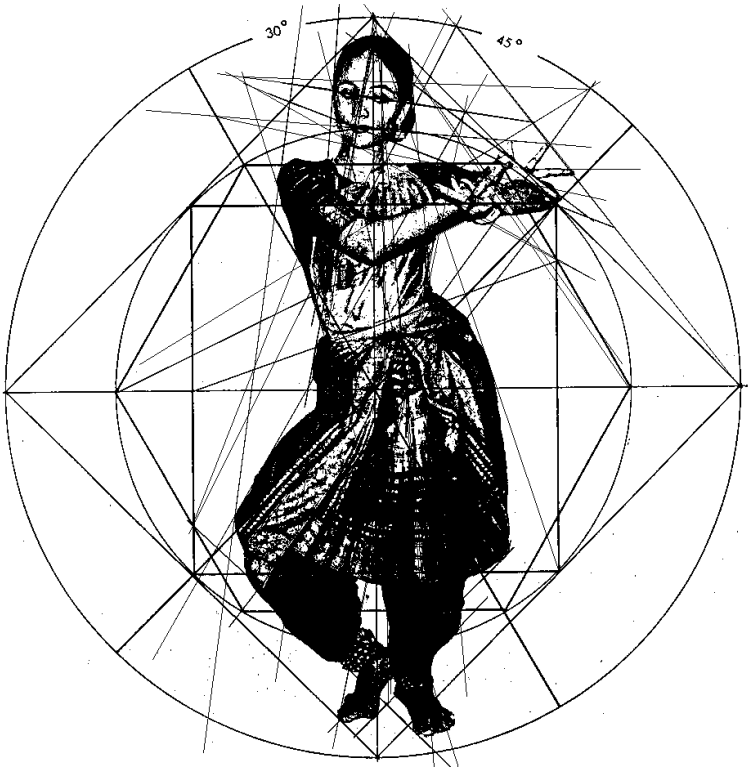


P. / Abb. 95: Poseidon (?) im Kleide der Geometrie. Die geometrischen Proportionen des Menschen sind hier an für den Sinn der Plastic entscheidender Stelle verfälscht: Poseidons Hand weist über das Quadrat hinaus in die Spitze des gleichseitigen Dreiecks, das Symbol Gottes. (Bronzestatue gefunden 1926/28 in der Ägäis bei Artemision, dem antiken Bildhauer Kalamis zugeschrieben. (Lit. (Bib.: B13))
(Verwendet wurde eine Photographie des Autors von einem originalgetreun Abguss im der Skulpturenhalle Basel. Das Original befindet sich im griechischen Nationalmuseum Athen.)

P. 96: Michelangelo, Kentauer u. Lapiti

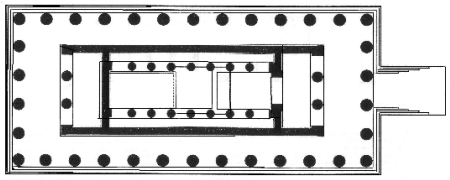


P. 97: Tangenten, Kentauerschlacht



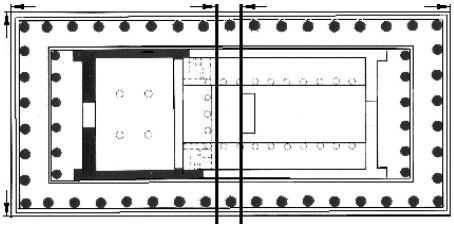
P. / Abb. 98: Östliche Tradition: Hinduistische Tänzerin, Bharat Natyam Tanz

Griechische Antike: Rationale Harmonie oder Mass des Menschen im Tempel?



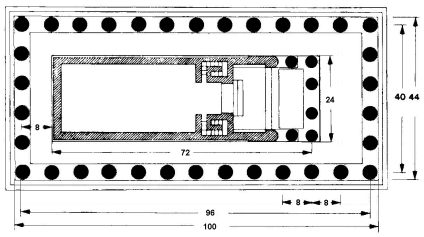
A. 99: Zeus, Olympia

Säulen– und Massverhältnisse:
Stirnseite Abstände: $\frac{5}{3}$: Grosse Sexte.
Stirnseite Säulen: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$: Quinte.
Rechteck Abstände: $\frac{12}{5}$: Kleine Terz mit Oktave.
(Zahl der Vollmonde, des Menschen sowie die vielbedeutende Drei, bei Zeus genealogisch bedeutsam.)
Rechteck Säulen: $\frac{11}{6}$: ?

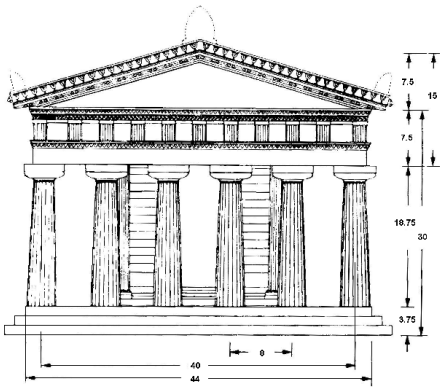


A. 100: Athene, Parthenon

Säulen– und Massverhältnisse:
Stirnseite Abstände: $\frac{7}{5}$: Kein Grundverhältnis (Zahl der Planeten und des Menschen).
Stirnseite Säulen: $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$: Quarte.
Rechteck Abstände: $\frac{16}{7} = 2 \cdot \frac{8}{7}$: Kein Grundverhältnis (Zahl der Planeten und 2^4, doppelte Sphärenzahl, zweimal verdoppelter Kubus, $2 \cdot 2^3$). Relativ später Tempel. Entfernt man längsseitig die mittleren Säulen, so entstehen zwei Quadrate (7×7).
Rechteck Säulen: $\frac{15}{8}$: Grosse Septe.



A. 101: Athene, Paestum



A. 102: Athene, Paestum

Massverhältnisse Grundriss:
Längsseite: $\frac{96}{72} = \frac{4}{3}$: Quarte.
Breitseite: $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$: Grosse Sexte.
Die vorkommenden Zahlen $8, 24, 40, 44, 72, 96, 100$ sind alle Vielfache von 4. Das führt zum Verhältnis $1 : 2 : 6 : 10 : 11 : 18 : 24 : 25$. Darin liegt vieles verborgen. Z.B. $\frac{96}{8} = \frac{24}{4}$ = Zahl der Vollmonde.

Massverhältnisse Aufriss:
$3.75 : 7.5 : 15 : 18.75 : 30 = 1 : 2 : 4 : 5 : 8$.
Darin stecken z.B.:
$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4}$: Oktave.
$\frac{5}{4}$: Grosse Terz.
$\frac{8}{5}$: Kleine Sexte.

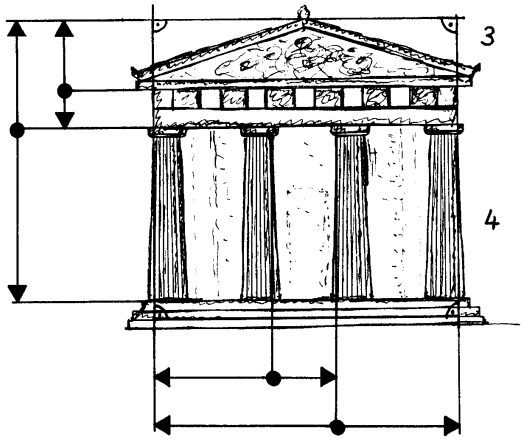
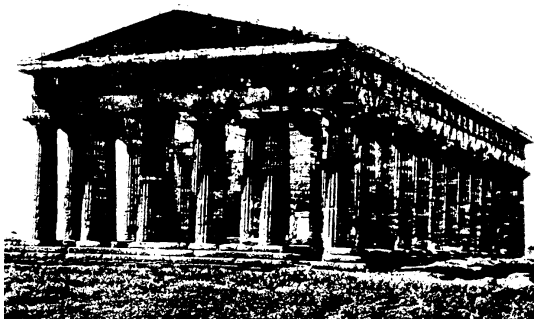
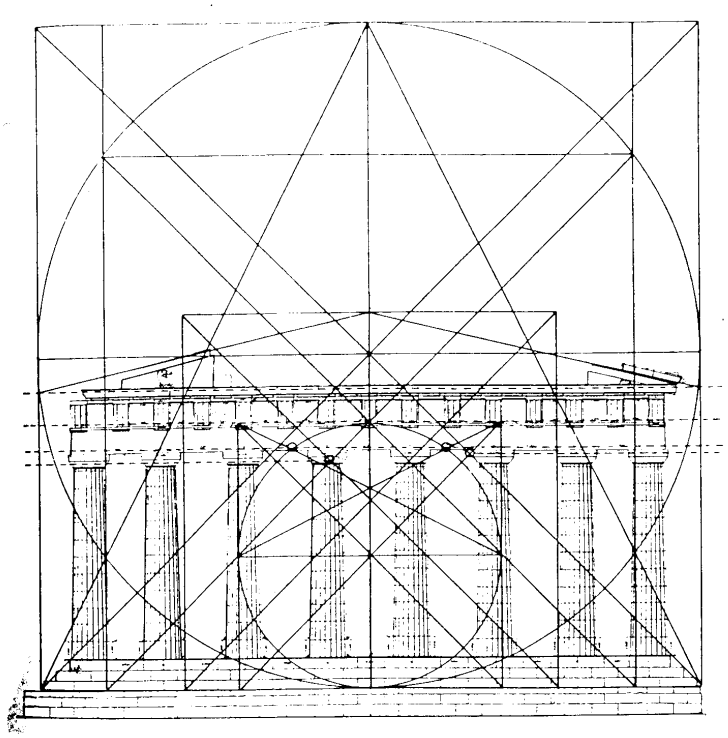


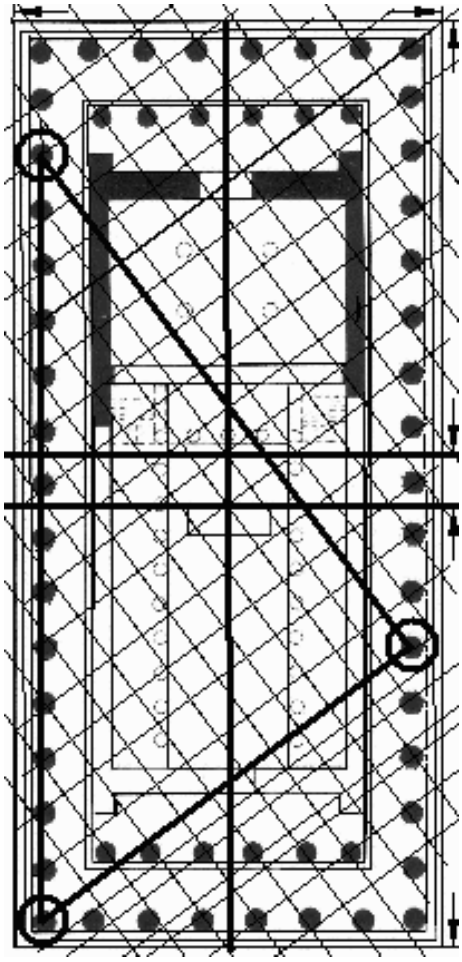
Abb. 103: Harmonische Proportionen, griech. Tempel



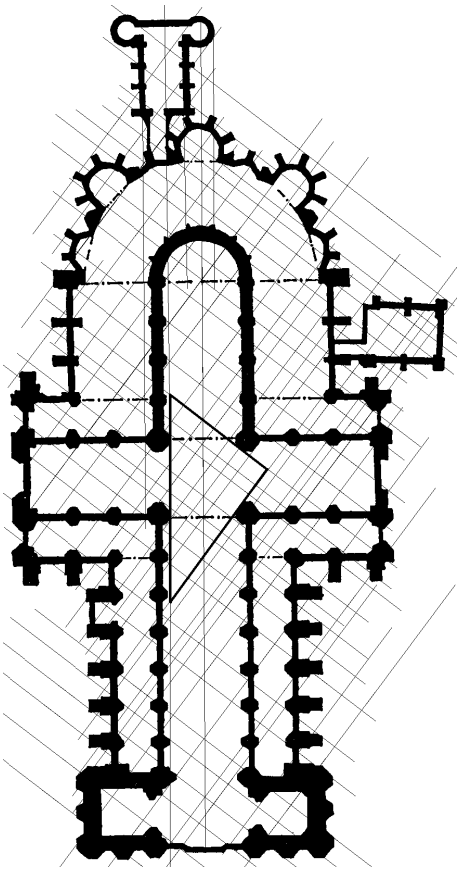
P. 104: Poseidontempel, Paestum



P. / Abb. 105: Parthenon, Athen, v. Tons Brunés



A. 106: Parthenon mit ägypt. Dreieck



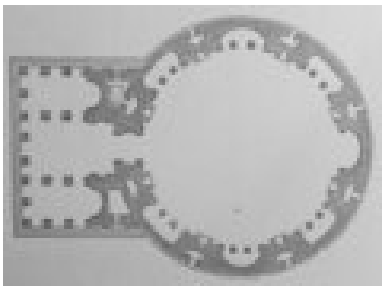
A. 107: Chartres mit ägypt. Dreieck

In den obigen beiden Skizzen lassen sich sehr viele ägyptische Dreiecke „passend“ in den jeweiligen Grundriss einzeichnen. Ein „zufälliges“ Dreieck ist jeweils exemplarisch herausgehoben. Auf eine Interpretation des Sachverhaltes soll hier des engen Rahmen wegens verzichtet werden (was den interessierten Leser zu eigenen Untersuchungen anregen und motivieren sollte).
Bei einem ägyptischen Dreieck ist das Seitenverhältnis $a : b : c = 3 : 4 : 5 \;\Rightarrow\; (a^2 + b^2 = c^2)$. Ein ägyptisches Dreieck ist also ein pythagoräisches Dreieck.
$(4 : 3)$ ist die Quarte, $(5 : 4)$ die grosse Terz und $(5 : 3)$ ist die grosse Sexte.
Dabei gilt: $(5 : 4) = \frac{5}{4} = 1.25 < (4 : 3) = \frac{4}{3} = 1.33333\ldots < (5 : 3) = \frac{5}{3} = 1.66666\ldots$

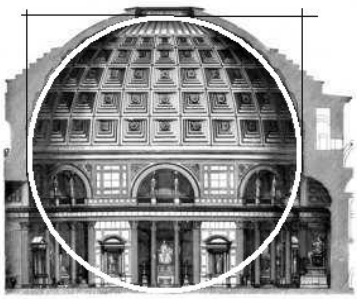
$\rightsquigarrow$ „grosse Terz < Quart < grosse Sexte“.

Römisches Weltreich: Das Pantheon Roms und Kugel

A. 108: Innen



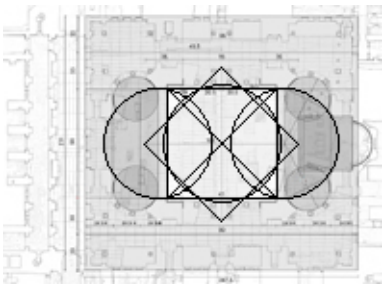
A. 109: Grundriss



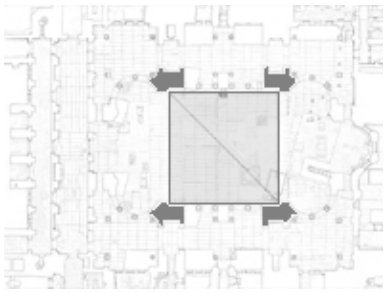
A. 110: Pantheon Aufr. Der Parthenon–Tempel um die Kugel — im Grundriss der Kreis.

Spätes Rom und Byzanz, Hagia Sophia: Viele Kugeln als Erbe

A. 111: H.Soph. innen

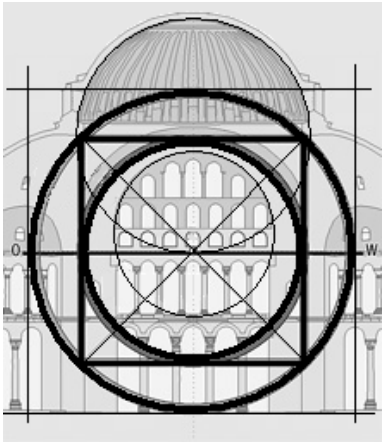


A. 112: Grundriss

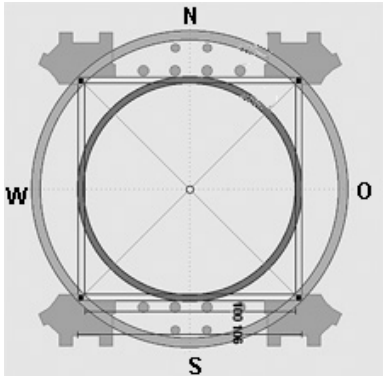


A. 113: Quadr. H.Soph.

A. 114: H.Soph. aussen

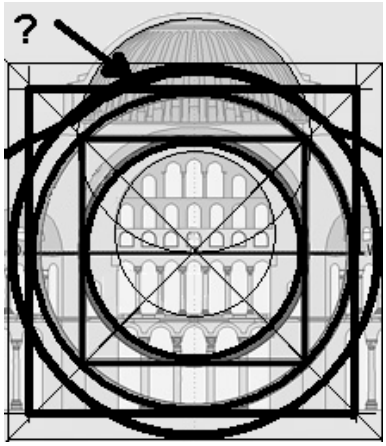


A. 115: Aufriss

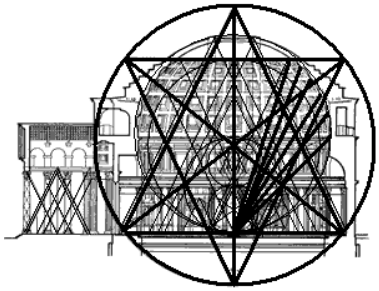


A. 116: Quadr. H.Sophia

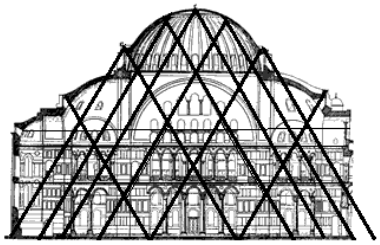
Eine Idee von Volker Hofmann, Bern: Die ehemalige eingestürzte Kuppel der Hagia Sophia entstand aus dem Kreis, welcher dem gezeichneten Quadrat flächengleich ist.



A. 117: Kuppel H.Sophia



A. 118: Pantheon–Geometrie



A. 119: Hagia Sophia–Geometrie

Steckbrief zur Hagia Sophia:

- ⊘ Die Hagia Sophia (HS) gilt als eines der wenigen herausragenden Bauwerke der Weltarchitektur: „Das 8. Weltwunder“.
- ⊘ Auffallend: Immense Kuppel, scheinbar schwerlos. Schon Marco Polo bemerkte die geniale Lichtführung.
- ⊘ Architekte oder Mathematiker des heutigen Baus unter Konstantin I.: Anthemios von Tralles und Isidoros von Millet.
- ⊘ Entstehung: 1. bekannte Kirche mit Baubeginn 325 n.Chr. unter Konstantin I. Brand im Juni 404 (Aufstand gegen die Absetzung des Patriarchen Johannes Chrysostomos durch Kaiserin Eudoxia). Wiederaufbau unter Theodosius II., neuer Brand 532 unter Kaiser Justinian I. (Zeit nach der Reichstrennung und dem politischen Untergang Westroms).
- ⊘ Heutiger Bau: Kurze Bauzeit 532-537.
- ⊘ 7. Mai 558: Erdbeben, Einsturz der Kuppel. Bau der heutigen höheren Kuppel. 989 und 1346 teilweise Einsturz der Kuppel, Verstärkung des Baus.
- ⊘ 1204-1261: Römisch-katholische Kirche des lateinischen Kaiserreichs, venezianische Abhängigkeit. Anbau eines Glockenturms (zerstört).
- ⊘ 29. Mai 1453: Fall von Byzanz, Umwandlung in eine Moschee unter Sultan Mehmed II. Fatih, Entfernung der meisten christilichen Insignien, späterer Anbau der Minarette (unter Mehmed II. nach 1453, unter Bayezid II. 1481-1512, zwei unter Selim II. vor 1600).

- ⊘ 1932 Umwandlung in ein Museum.
- ⊘ Problem: Um die Prinzipien von Erklärungsmodellen für ein geometrisches Gerüst ist bis anhin gestritten worden. Historische Unterlagen fehlen.
- ⊘ Im Grundriss auffallend: Quadrat (Quadrate) von 100 oder 99 byzanntinischen Fuss Seitenlänge (31 m). Bei 99 Fuss ist die Diagonale von 140 Fuss eine gute Näherung. Zu Quadraten und den zugehörigen Würfeln gehören immer Inn– und Umkreise. resp. Kugeln.
- ⊘ Die Kuppelhöhe innen misst ca. 56 m. Aussenmasse. ca. $70 \times 75\ m^2$.
- ⊘ Symbolik: Kugel als physische Gestalt des Universums, Würfel als Vorbild der Ordnung (himmlisches Jerusalem u.s.w.).
- ⊘ Denken auch in der christilchen Antike in der Tradition Platons: Die Weltschöpfung ist ein geometrisches Problem. Der Kosmos bedeutet Ordnung und nicht Inkommensurabilität. Verhälltnisse sollten ganzzahlig sein. Zahl wird so als Paradigma einer Weltschöpfung sowie als auch als kritikon Organon dines Schöpfergottes gesehen. Schöpfung wird demnach zu Architektur. (Bekannt dazu sind Argumente von Proklos Diadochos, ein Hauptdenker der Schule von Athen sowie des alten Hippasos v. Megapont, 5.Jh.v.Chr. und den „spätantiken“ des 6. Jh.n.Chr. Johannes Philoponos, Asklepios v. Tralleis, Boetius, Cassiodorus). Ist es nun doch so, dass die göttliche Weisheit Kugelgestalt haben muss, wie schon der Philosophe Xenophanes (ca. 565–470 v.Chr.) angeblich behauptet haben soll? — Die Hagia Sophia als „neues christliches Pantheon“ zeigt hier eine Position.
- ⊘ Zum Problem der ursprünlgichen Kuppelform nach einer Idee von Volker Hofmann, Bern: Die ehemalige eingestürzte Kuppel der Hagia Sophia könnte aus demjenigen Kreis entstanden sein, welcher dem in der Skizze gezeichneten Quadrat flächengleich ist (Seitenlänge $\sqrt{2} \cdot 31\ m$). Ein Grundelement wäre demnach die Kugel, ähnlich wie sie im Pantheon Roms existiert.
- ⊘ Zur Frage nach den Verhältnissen der Zahlen 75, 70, 56, 140, 100, 99...:
  Es ist $\dfrac{99}{70} \approx \dfrac{140}{99} \approx \sqrt{2}$
- ⊘ In der Hagia Sophia findet man des gleichseitige Dreieck (60^o–Winkel), währenddem im Pantheon der Pyramidenwinkel ($51^o\ 51'\ 14''$) sichtbar wird (spitzer Winkel im auffallenden grossen Dreieck). Im Pantheon hat es übrigens an der Decke 5 Kassettenringe zu je 7 mal 4 gleich 28 Kassetten. Hier ist die im babylonischen Bereich wichtige Zahl 28 neben der im ägyptischen Bereich wichtigen 5, resp. der im gesamten Bogen vorhandenen doppelten 5, also der 10, im Tempel der Götter des Reiches baulich verewigt. Wenn man vom Zentrum des Raumes unten nach oben blickt, erscheinen alle Ringabstände unter etwa demselben Winkel.
- ⊘ Weiteres Problem: wie gross war der byzantinische Fuss?

Eine rationale Näherung von $\sqrt{2}$ erhält man wie folgt:

Sei s_n das n–te Glied einer Zahlenfolge für Quadratseiten und d_n das n–te Glied einer Zahlenfolge für die Diagonale der Quadrate. Wir setzen:

$$s_1 = 1,\ \ d_1 = 1,\ \ s_n = s_{n-1} + d_{n-1},\ \ d_n = 2\,s_{n-1} + d_{n-1}$$

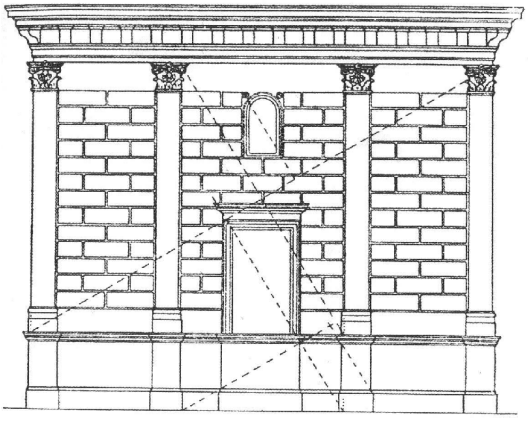
Dann gilt: $u_n := \dfrac{d_n}{s_n} = \dfrac{2\,s_{n-1} + d_{n-1}}{s_{n-1} + d_{n-1}} = \dfrac{s_{n-1}}{s_{n-1} + d_{n-1}} + 1 = \dfrac{1}{1 + \frac{d_{n-1}}{s_{n-1}}} + 1$

$$\Rightarrow\ u := \lim_{n\to\infty} u_n > 0,\ \ u = \frac{1}{1+u} + 1\ \Rightarrow\ u = u^2 = 1 + 1 + u\ \Rightarrow\ u^2 = 2\ \Rightarrow\ u = \sqrt{2}$$

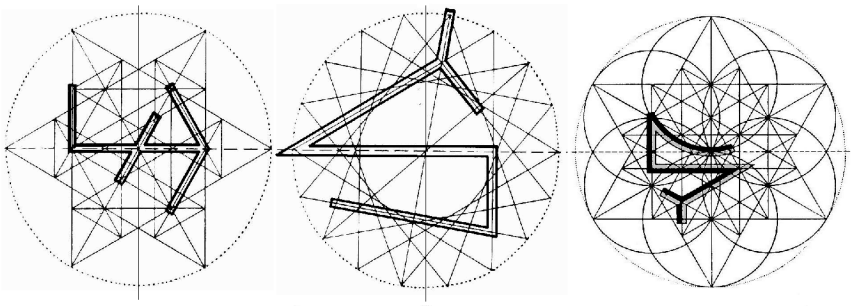
u_n ergibt daher eine Näherungsfolge für $\sqrt{2}$. Die hier entstehenden Näherungszahlen finden sich, so wird vermutet, in den Massen der Hagia Sophia.

$$\left(\begin{array}{lll}
1 & 1 & 1.0000\ldots \\
2 & 3 & 1.5000\ldots \\
5 & 7 & 1.4000\ldots \\
12 & 17 & 1.41666666666\ldots \\
29 & 41 & 1.41379310344\ldots \\
70 & 99 & 1.41428571428\ldots \\
169 & 239 & 1.41420118343\ldots \\
408 & 577 & 1.41421568627\ldots \\
985 & 1393 & 1.41421319796\ldots \\
2378 & 3363 & 1.41421362489\ldots \\
5741 & 8119 & 1.41421355164\ldots \\
13860 & 19601 & 1.41421356421\ldots \\
33461 & 47321 & 1.41421356205\ldots \\
80782 & 114243 & 1.41421356242\ldots \\
195025 & 275807 & 1.41421356236\ldots
\end{array}\right)$$

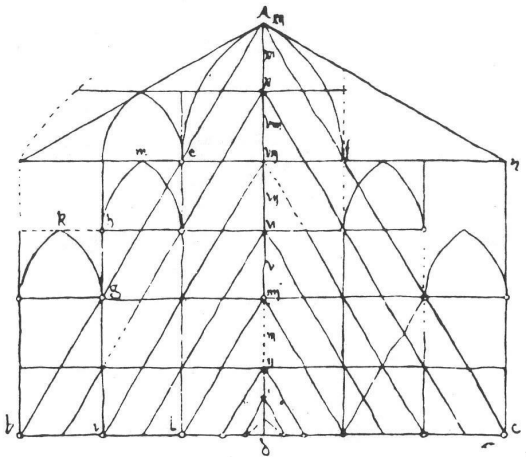
Gotik, Renaissance



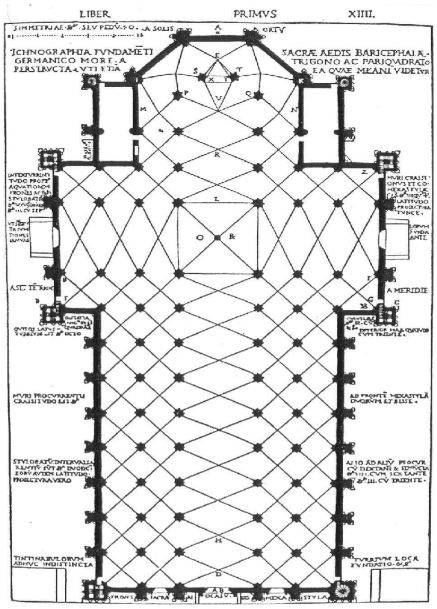
P. / Abb. 120: D. Bramante, Cancellaria Rom, Teil der Fassade



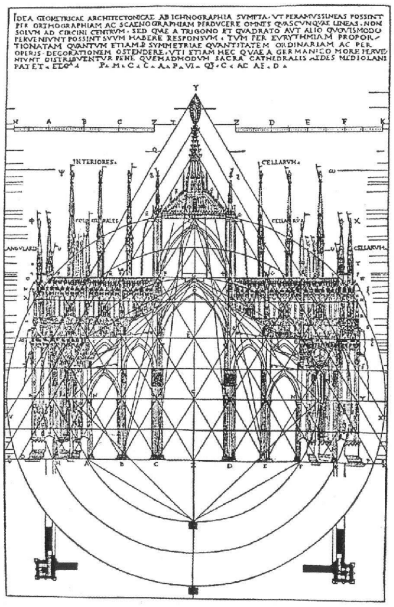
P. / Abb. 121: Steinmetzzeichen im Kleide der Geometrie



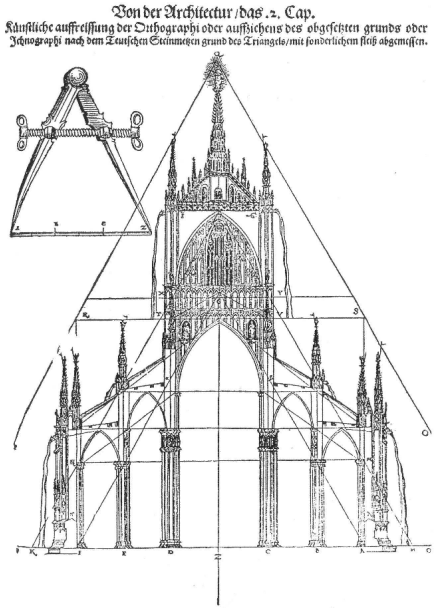
P. 122: Mailander Dom, 1391, G. Stornaloco



P. 123: Mailander Dom, 1521, Cesariano



P. 124: Mailander Dom, 1521, Cesariano

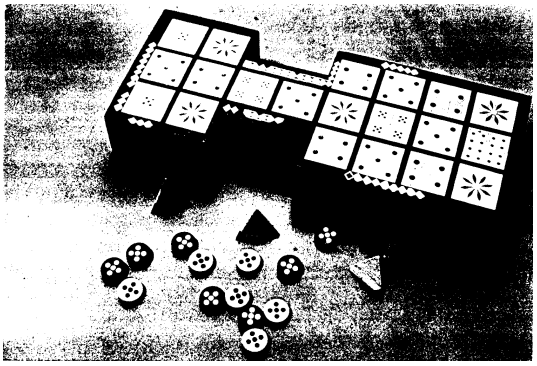


P. 125: Mailander Dom, 1548, Ryff
(zu Vitruv, Architectura)

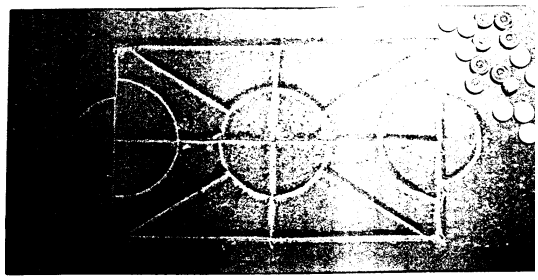
9.5 Ornamentik: Spiel, Dekoration, Kunst

Auf mathematischen (gruppentheoretischen) Grundlagen der Ornamentik soll weiter hinten eingegangen werden.

9.5.1 Spiel



P. 126: Kopie des königlichen Spiels von Ur.



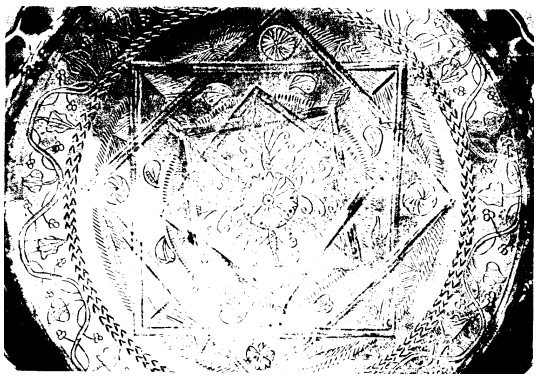
RÖMISCHER SPIELTISCH

P. 127: Röm. Spieltisch aus Augusta Raurica.

Original des königlichen Spiels von Ur: British Museum, sumerische Abteilung.

9.5.2 Dekoration, Kunst

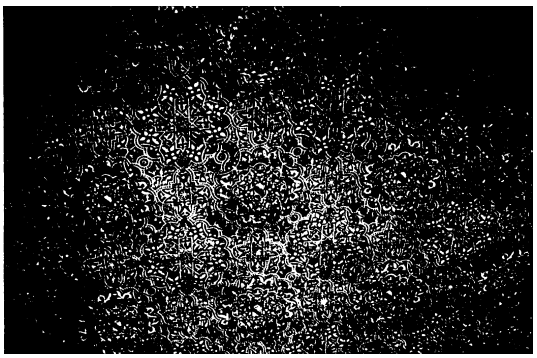
A. 128: Griechische Vase, Ornamentik: Attisch geometrische Halshenkelamphora.



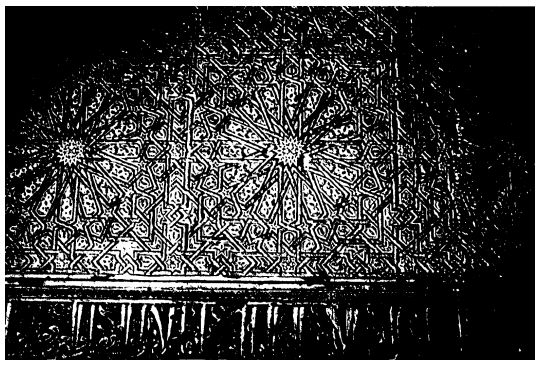
P. 129: Römische Ornamentik

Beispiel römischer Ornamentik: Detail aus dem Silberschatz von Augusta Raurica. (Original: Römermuseum Augst, CH.)

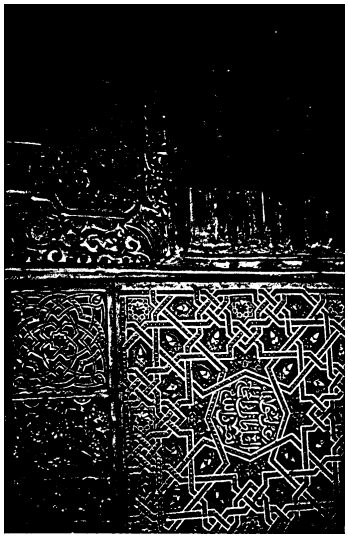
9.5.3 Hochblüte der Ornamentik



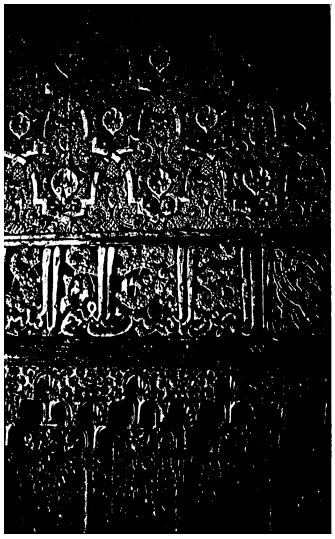
P. 130: Geometrie, Alhambra, Granada



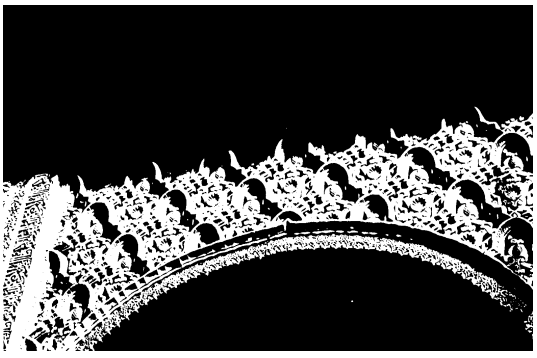
P. 131: Geometrie, Alhambra, Granada



P. 132: Geometrie, Alhambra, Granada

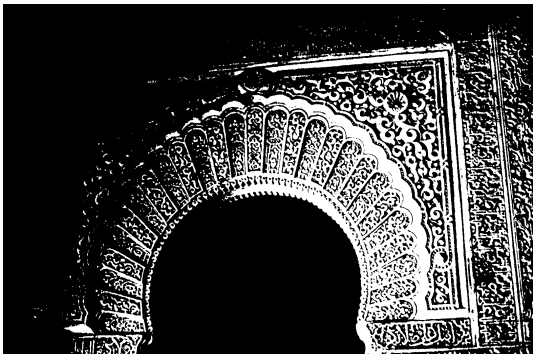


P. 133: Geometrie, Alhambra, Granada



P. 134: Geometrie, Alhambra, Granada

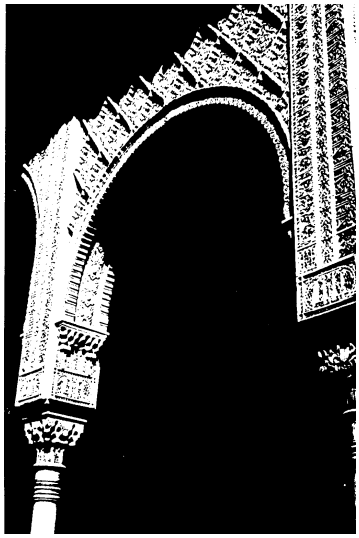
P. 135: Geometrie, Alhambra, Granada



P. 136: Geometrie, Alhambra, Granada

P. 137: Geometrie, Alhambra, Granada

P. 138: Geometrie, Alhambra, Granada



P. 139: Geometrie, Alhambra, Granada

Die strenge Geometrie in der Ornamentik an der Alhambra von Granada schöpft die Gruppentheorie weitgehend aus.

9.6 Geometrie, Zahlen, Symbolik am Bau, geometrische Gerüste

9.6.1 Altertum

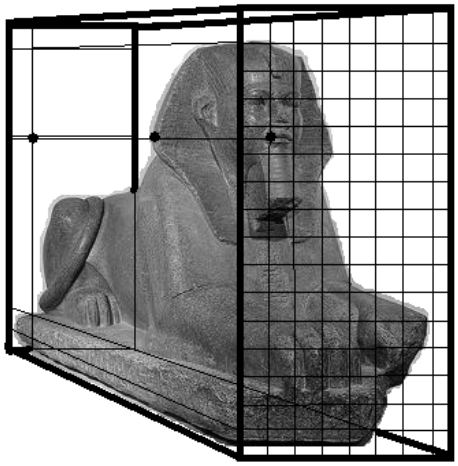


Abbildung 140: Sphinx in Produktion

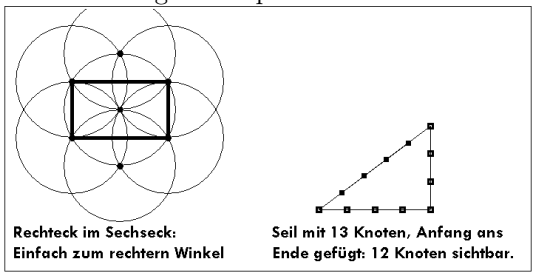


Abbildung 141: Bsp. einfacher Konstruktionen des rechten Winkels mit Seil und Pflock

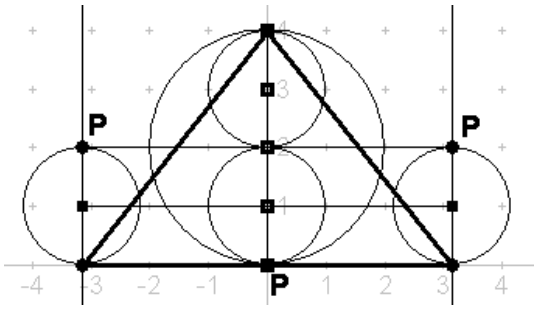
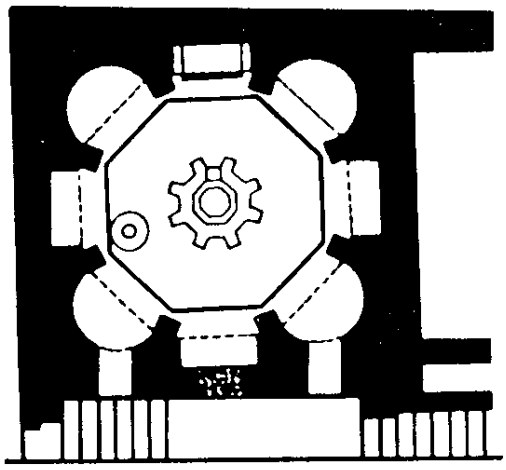
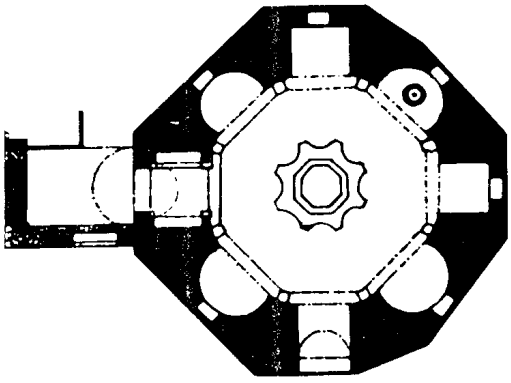


Abbildung 142: Konstruktionen der Cheopspyramidenmasse mit einem Messrad

9.6.2 Antike, Frühmittelalter

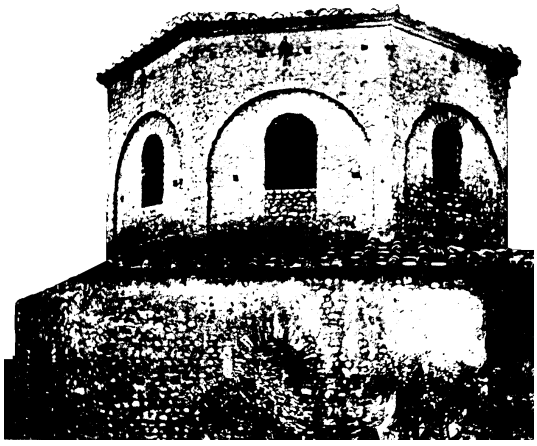


P. 143: Achteck: Paptisterium in Fréjus, ca. 374



P. 144: Paptisterium in Albenga, ca. 425

Achtecke in der Baukunst

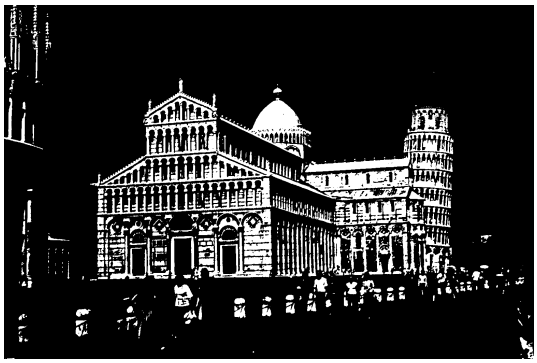


P. 145: Paptisterium in Albenga
(vor Architekten–Eingriff: Amphorendecke!)

P. 146: Paptisterium in Fréjus, innen

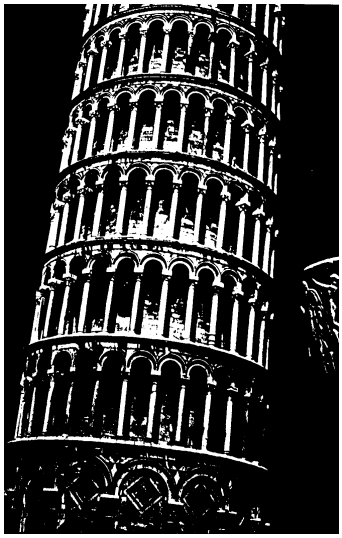
Abb. 147: Pfalzkapelle in Aachen, um 800

9.6.3 Romanik

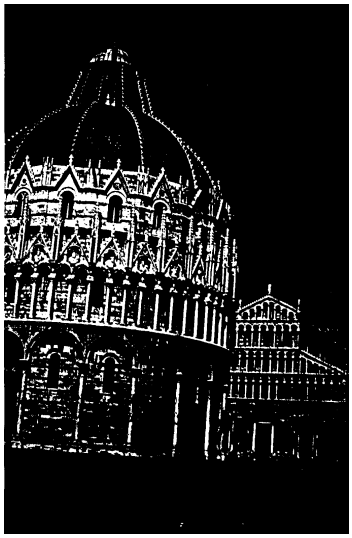


P. 148: Geometrie, Dom von Pisa

P. 149: Geometrie, Dom von Pisa



P. 150: Geometrie, Dom von Pisa

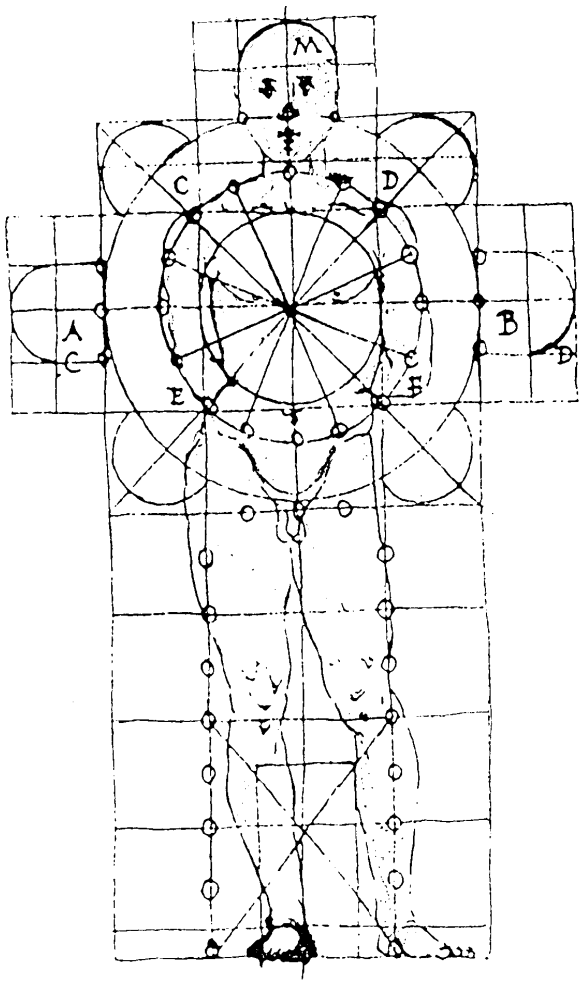


P. 151: Geometrie, Dom von Pisa

Strenge Geometrie in der romanischen Architektur am Beispiel des Doms von Pisa.

Abb. 152: Geometrie und Symbolik

9.6.4 Gotik, Renaissance



A. 153: Das „Mass des Menschen“ im Grundriss, Francesco die Giorgio Martini, Ende 15. Jhdt.

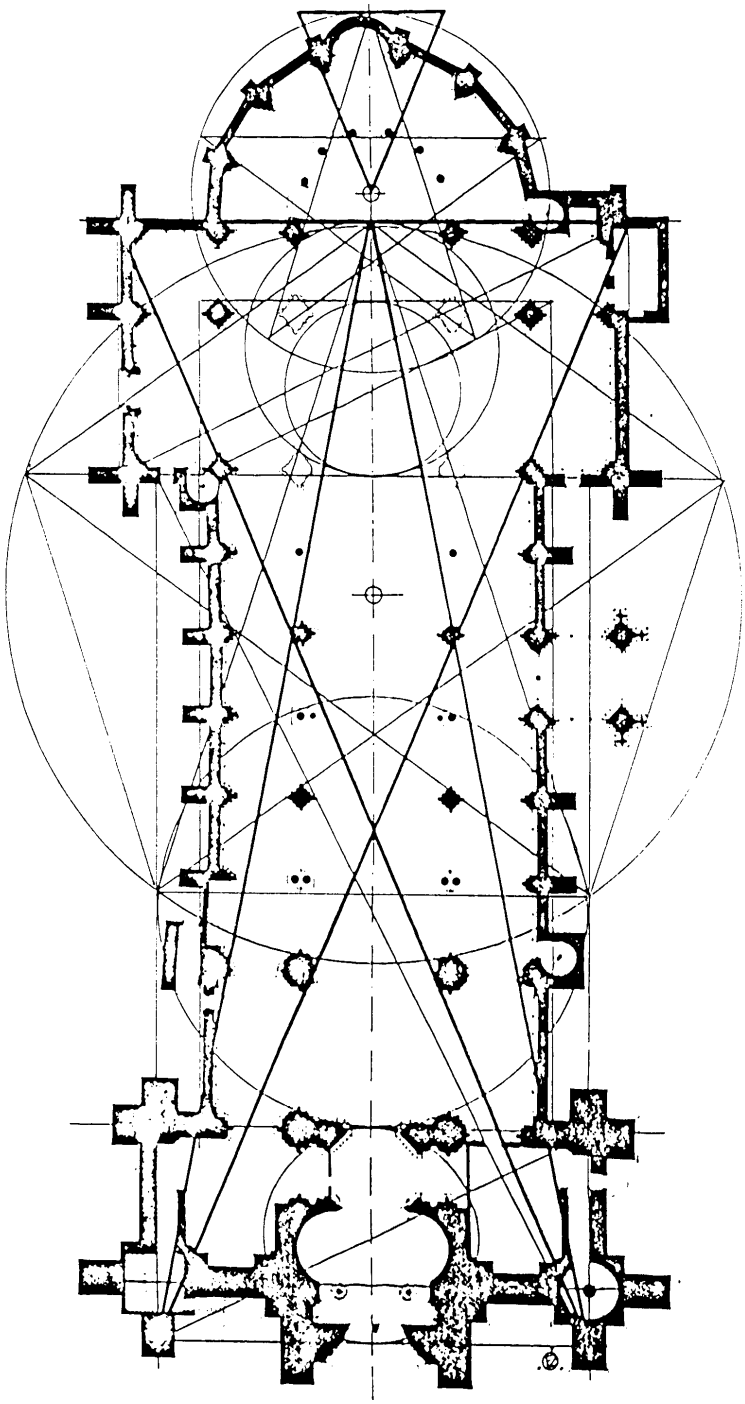


Abb. 154: Grundriss der Kathedrale von Lausanne, nachempfundene Ideenlinien 1

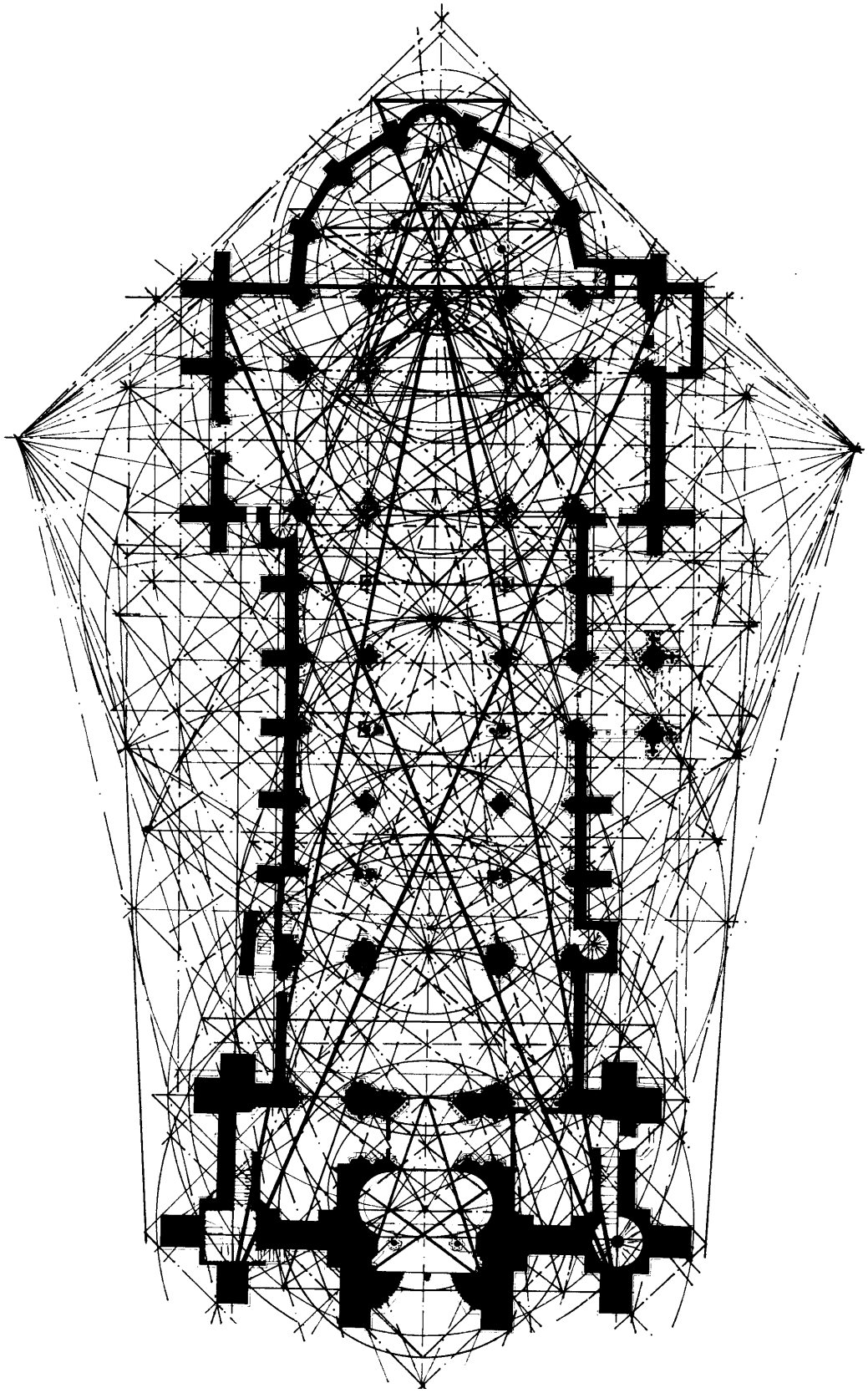
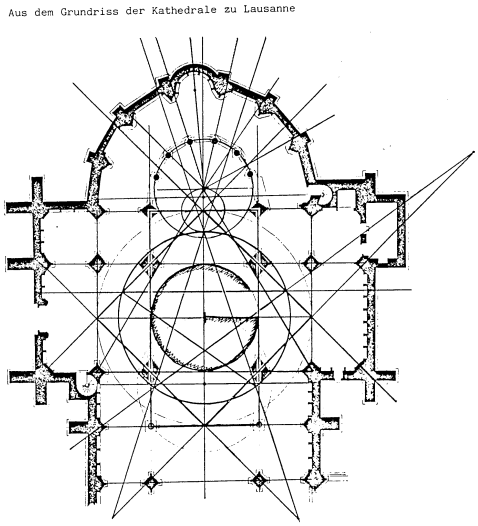


Abb. 155: Grundriss der Kathedrale von Lausanne, nachempfundene Ideenlinien 2



A. 156: Grundriss der Kathedrale von Lausanne, nachempfundene Ideenlinien 3, Chor

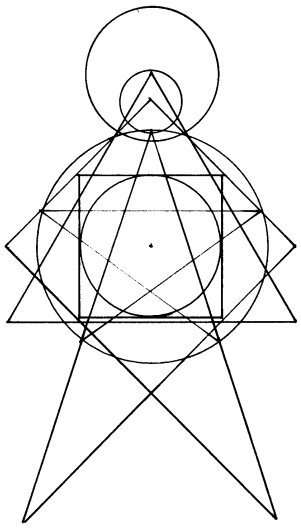
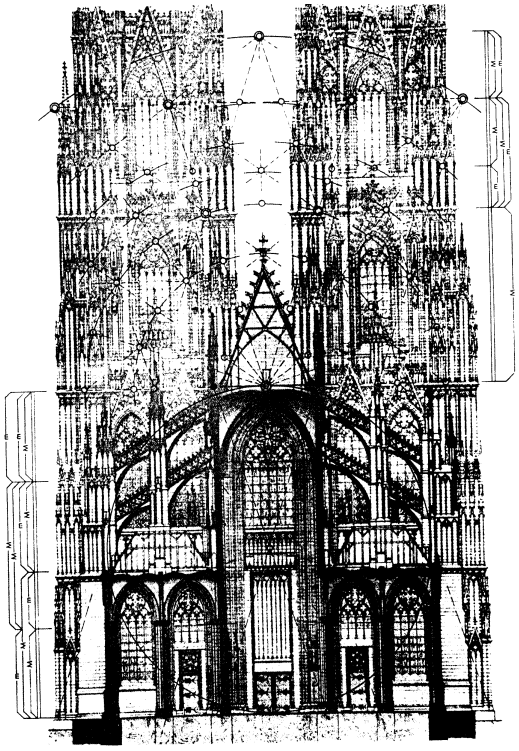
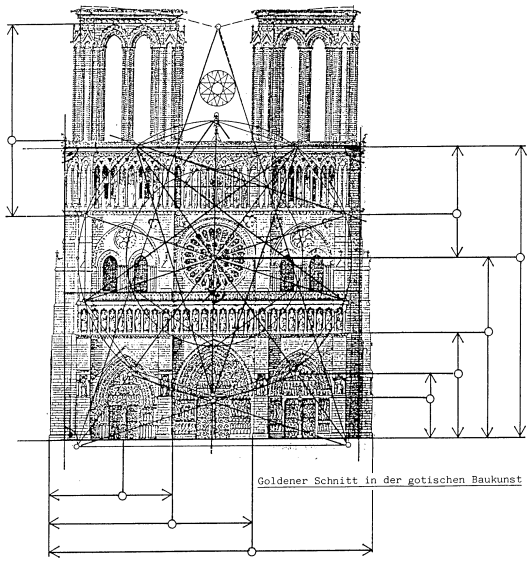


Abb. in den Ideenlinien des Chores der Kathedrale von Lausanne

Die Konstruktionslinien des "mystischen Leib Christi" im Chor des Grundrisses der Kathedrale von Lausanne: Nach dem „Bauplan des Menschen": Kreis (Vollkommenheit), Achsialsymmetrie (Parität), gleichseitiges Dreieck (Göttliches), Quadrat (Irdisches) und Pentagramm (Menschliches) sind vereinigt.



A. Kölner Dom



A. 159: Notre Dame, Paris

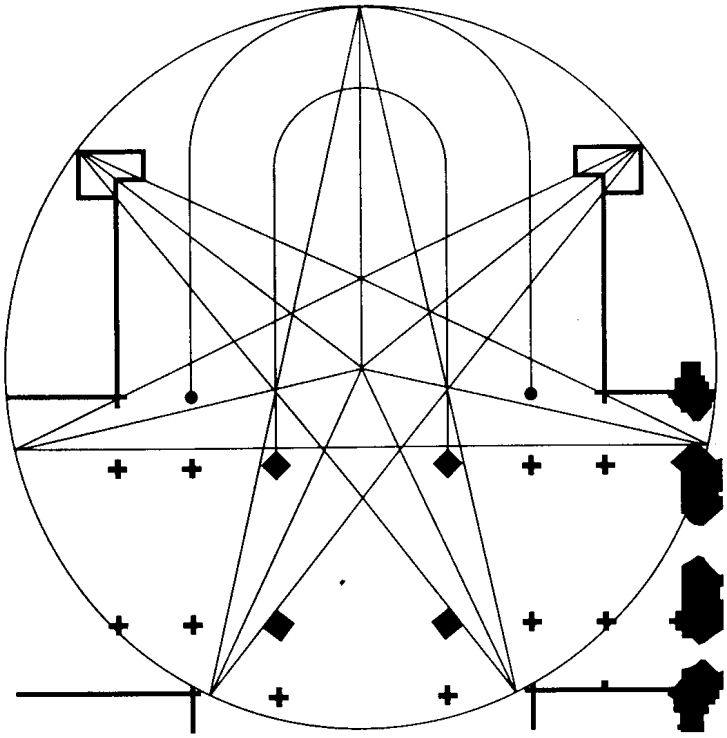


Abb. 160: Begrenzung der Breite des Querschiffes und der Apsidentürme, Kathedrale von Chartres

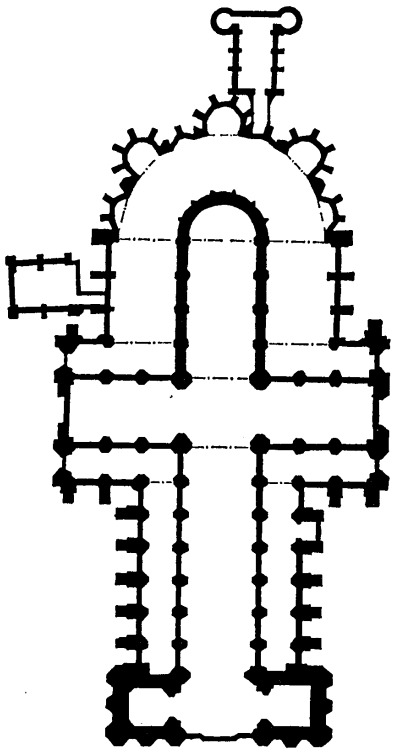
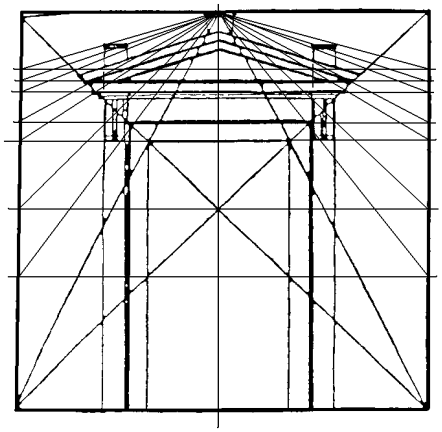


Abb. 161: Grundriss der Kathedrale von Chartres

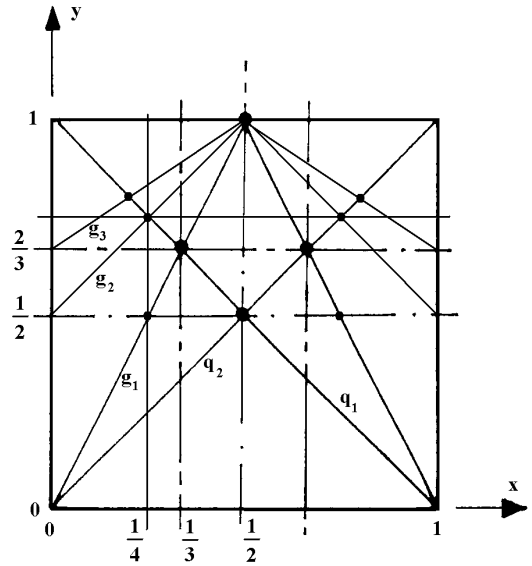
9.7 Zur Proportionierung

9.7.1 Beispiele

Nachvolgend sehen wir die Erzeugung von Stammbruchverhältnissen mittels Diagonalenschnittpunkten und y–Achsen–Schnittpunkten.



A. 162: Proportionierung n. Vitruv (Jonisches Portal)



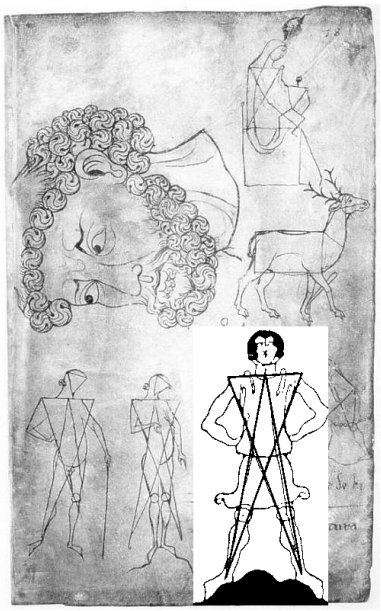
A. 163: Proportionierung nach Vitruv (Schema)

$$q_1:\ y=-x+1,\ \ q_2:\ y=x\ \Rightarrow\ q_1\cap q_2:\ y=-x+1=x\ \Rightarrow\ 2\,x=1\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}$$

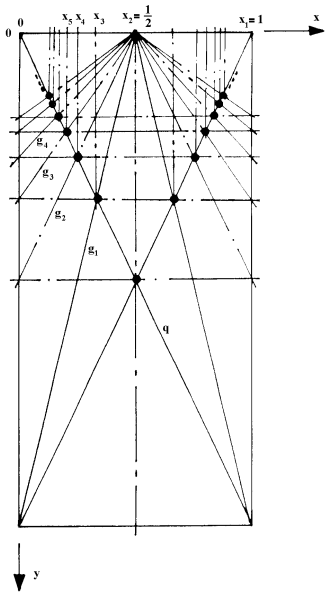
$$q_1:\ y=-x+1,\ \ g_1:\ y=2\,x\ \Rightarrow\ q_1\cap g_1:\ y=-x+1=2\,x\ \Rightarrow\ 3\,x=1\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{3}$$

$$q_1:\ y=-x+1,\ \ g_2:\ y=x+\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ q_1\cap g_2:\ y=-x+1=x+\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 2\,x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{4}$$

... u.s.w.



A. 164: Aus dem Portfolio von Villard de Honnecourt



A. 165: Proportionierung (Schema)

Zum Portfolio von Villard de Honnecourt ca. 1230 - 35, p. 18 r: Vgl. Internet:
http://www.newcastle.edu.au/discipline/fine-art/pubs/villard/album35.jpg
http://www.newcastle.edu.au/discipline/fine-art/pubs/villard/album-1.htm

$$q:\ y = 2\,x,\ \ g_1:\ y = -4\,x + 2\ \Rightarrow\ q \cap g_1:\ y = 2\,x = -4\,x + 2\ \Rightarrow\ 6\,x = 2\ \Rightarrow\ x = x_3 = \frac{1}{3}$$

$$q:\ y = 2\,x,\ \ g_2:\ y = -2\,x + 1\ \Rightarrow\ q \cap g_2:\ y = 2\,x = -2\,x + 1\ \Rightarrow\ 4\,x = 1\ \Rightarrow\ x = x_4 = \frac{1}{4}$$

$$q:\ y = 2\,x,\ \ g_3:\ y = -\frac{4}{3}\,x + \frac{2}{3}\ \Rightarrow\ q \cap g_3:\ y = 2\,x = -\frac{4}{3}\,x + \frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \frac{10}{3}\,x = \frac{2}{3}\ \Rightarrow\ x = \frac{1}{5}$$

. . . u.s.w.

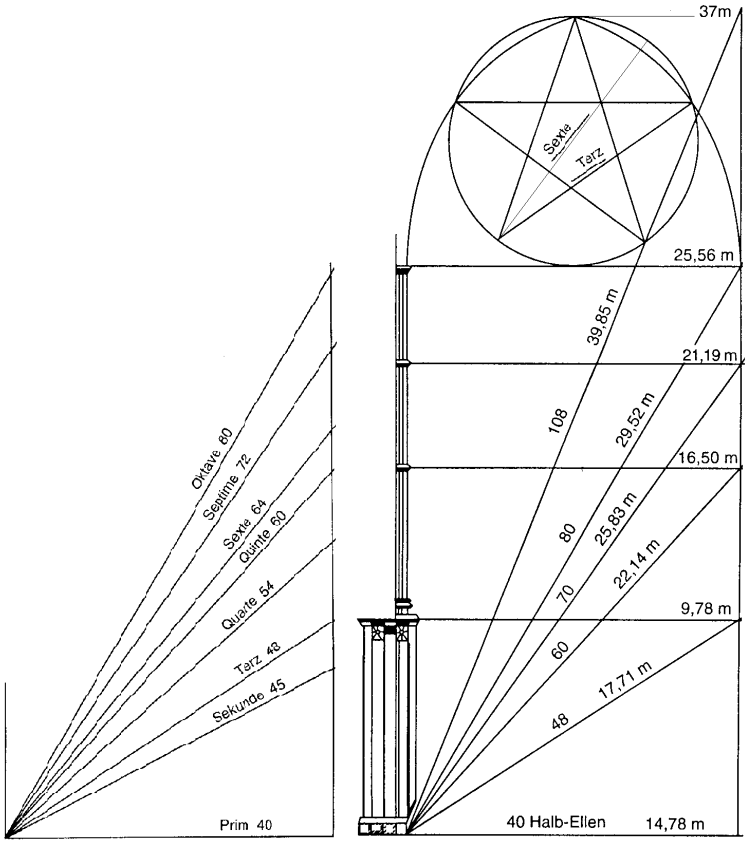
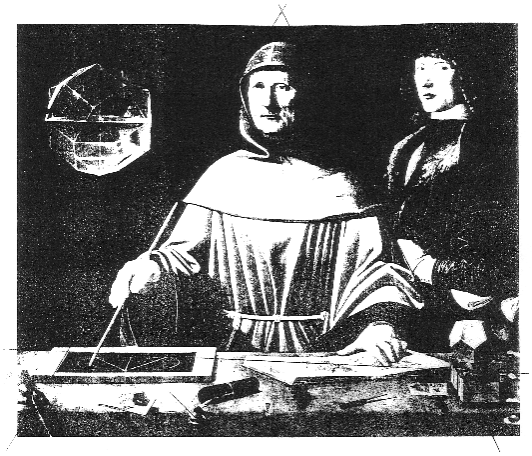


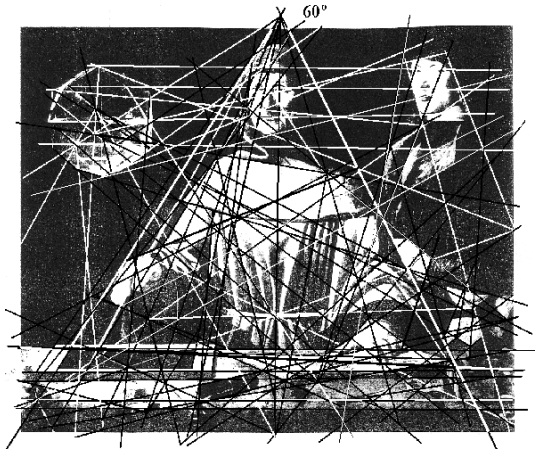
Abb. 166: Chartres, erste gregorianische Tonleiter, Lit. (Bib.: V4)

Nach Pater Bescond von Saint–Vandrille (Lit. (Bib.: V4)) finden sich in obiger Abbildung die Zahlenverhältnisse der ersten gregorianischen Tonleiter (d.h. nicht etwa eine dur– oder moll–Tonart). Was ist hier bestimmend? — Rationale pythagoräische Zahlenverhältnisse oder irrationaler goldener Schnitt, „das Mass des Menschen“ ?

9.7.2 Malerei der Renaissance: geometrische Gerüste von Kunstwerken

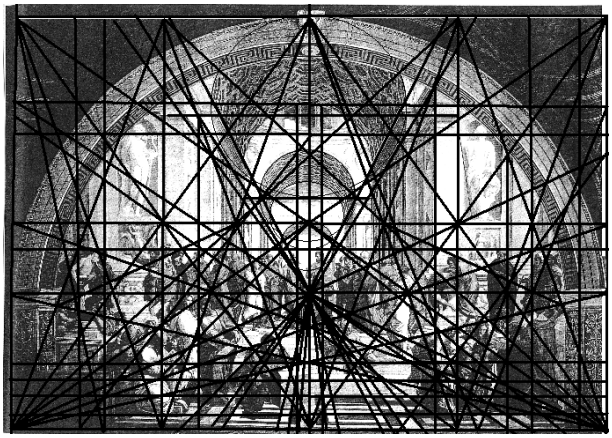


A. 167: Luca Pacioli und Guidobaldo Montefeltro, Herzog v. Urbino, ev.v. Jacobo de Barbari, ca. 1495



A. 168: Luca Pacioli und Guidobaldo Montefeltro, aus dem geometrischen Gerüst

A. 169: Raffael, Die Schule von Athen



A. 170: Raffael, Die Schule von Athen, Linien aus dem geometrischen Gerüst

P. 171: Holbeins Familienbildnis

P. 172: Kunstmuseum BS, Amerbach–Kabinett

Das Amerbach–Kabinett des Kustmuseums Basel ist die älteste öffentliche Kunstsammlung dieser Erde. Holbein, durch die Reformation in Basel der Aufträge von religiöser Seite beraubt, verliess seine Familie (Kinder aus erster Ehe seiner Frau) und gelangte wohl über die Verbindung Erasmus – Thomas Morus als Hofmaler an den englichen Königshof. Das Bild ist bei seiner kurzzeitigen Rückkehr nach Basel (1528) entstanden. Die Familie blieb in Basel (Lit. (Bib.: A21), (Bib.: A22).) Hohlbeins Freund Amerbach hat die Sammlung der Universität vermacht. Sie wurde im Haus zur Mücke nahe dem Münsterplatz untergrbracht und jeden Sonntag Morgen der Öffentlichkeit zugänglich gemacht.

P. 173: Detail

P. 174: Detail

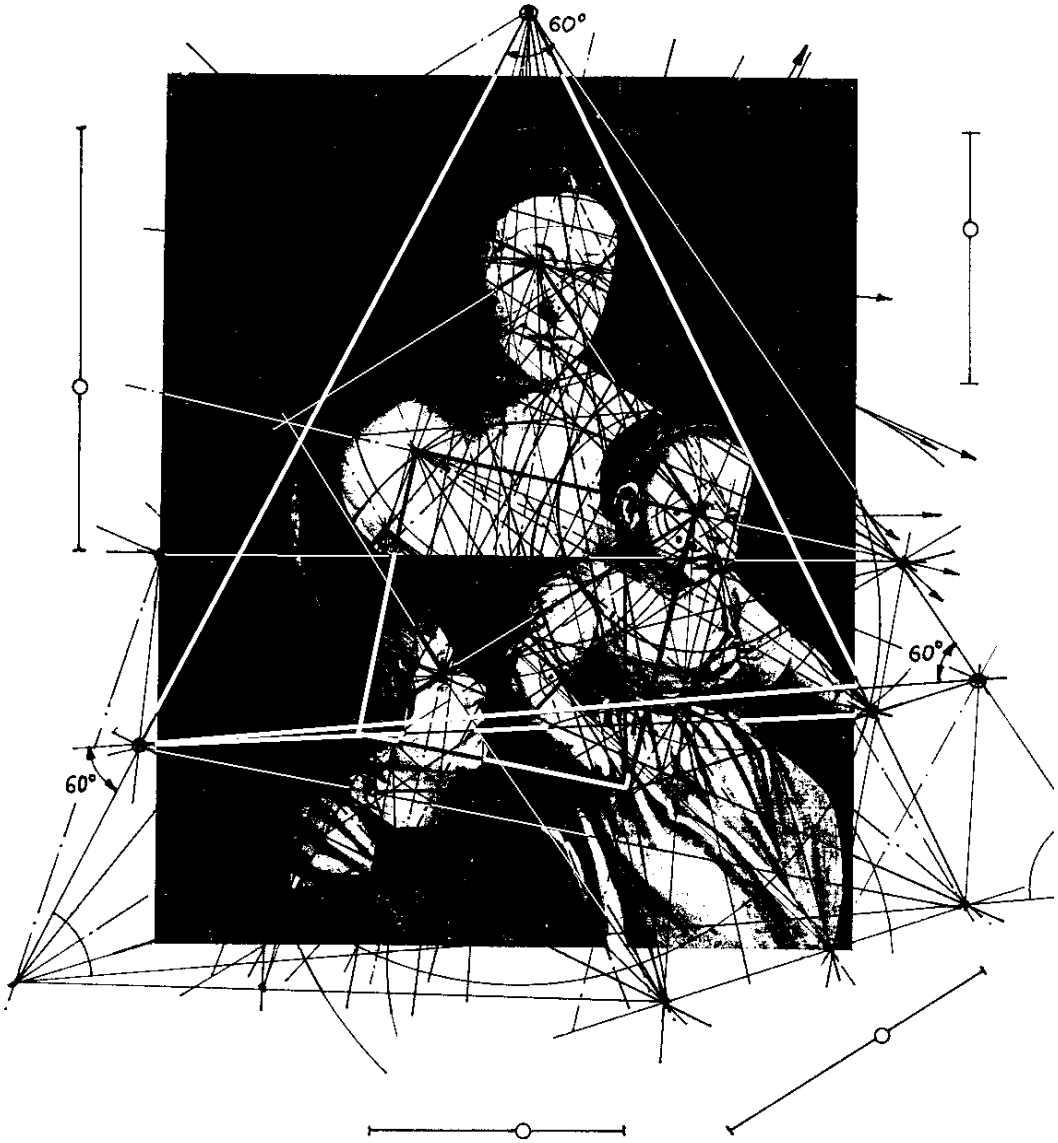


Abb. 175: Holbeins Familienbildnis, nachempfundene Ideenlinien, dunkel

Abb. 176: Holbeins Familienbildnis, nachempfundene Ideenlinien, hell

Nachempfindung der mutmasslichen Konstruktionslinien in Holbeins Familienbild, Zwischenschritt.

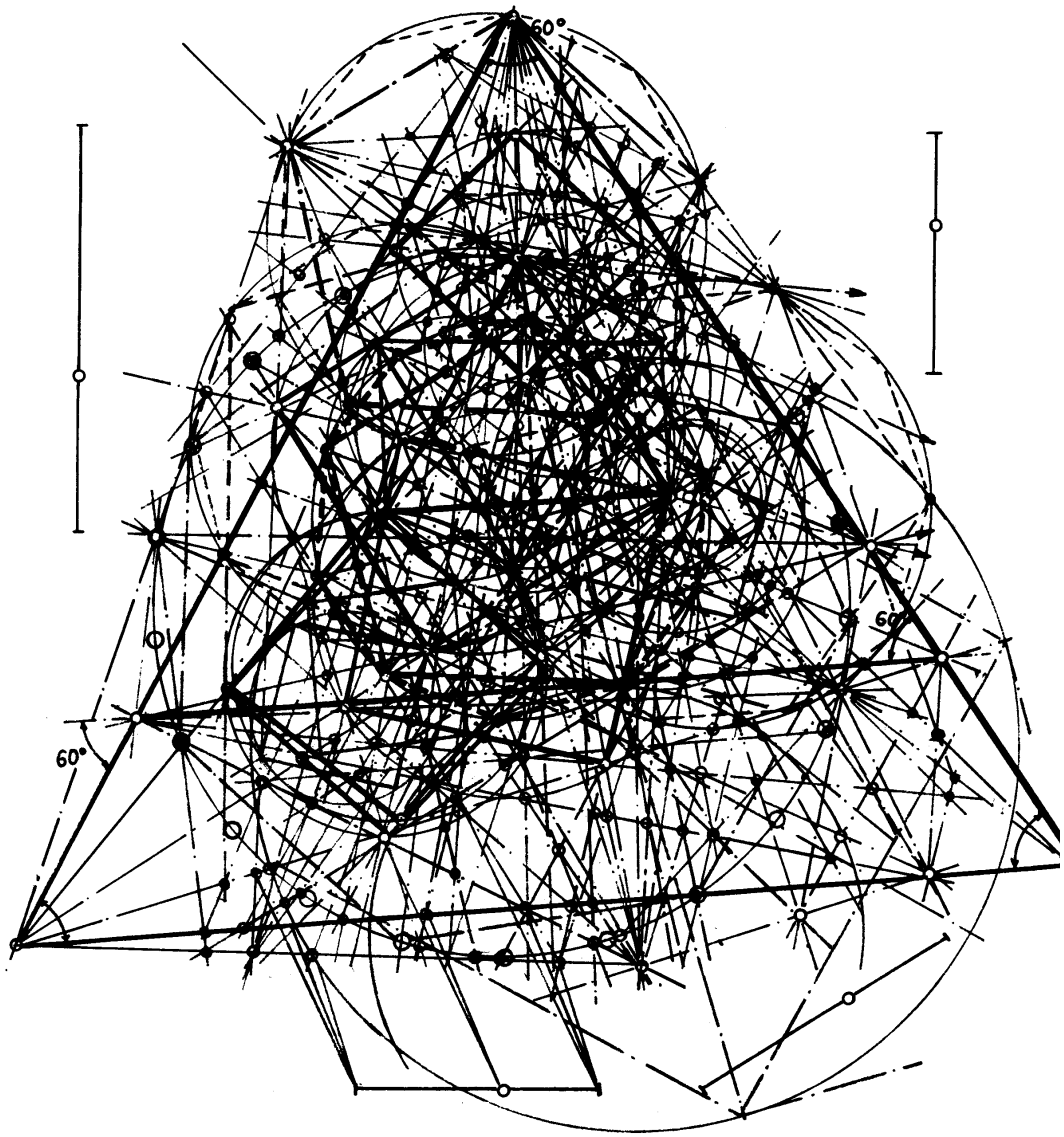


Abb. 177: Holbeins Familienbildnis, nachempfundene Ideenlinien isoliert, oberer Teil

Bei näherem Hinsehen tauchen aus dem Wirrwarr ideale Figuren oder Teile von solchen auf.

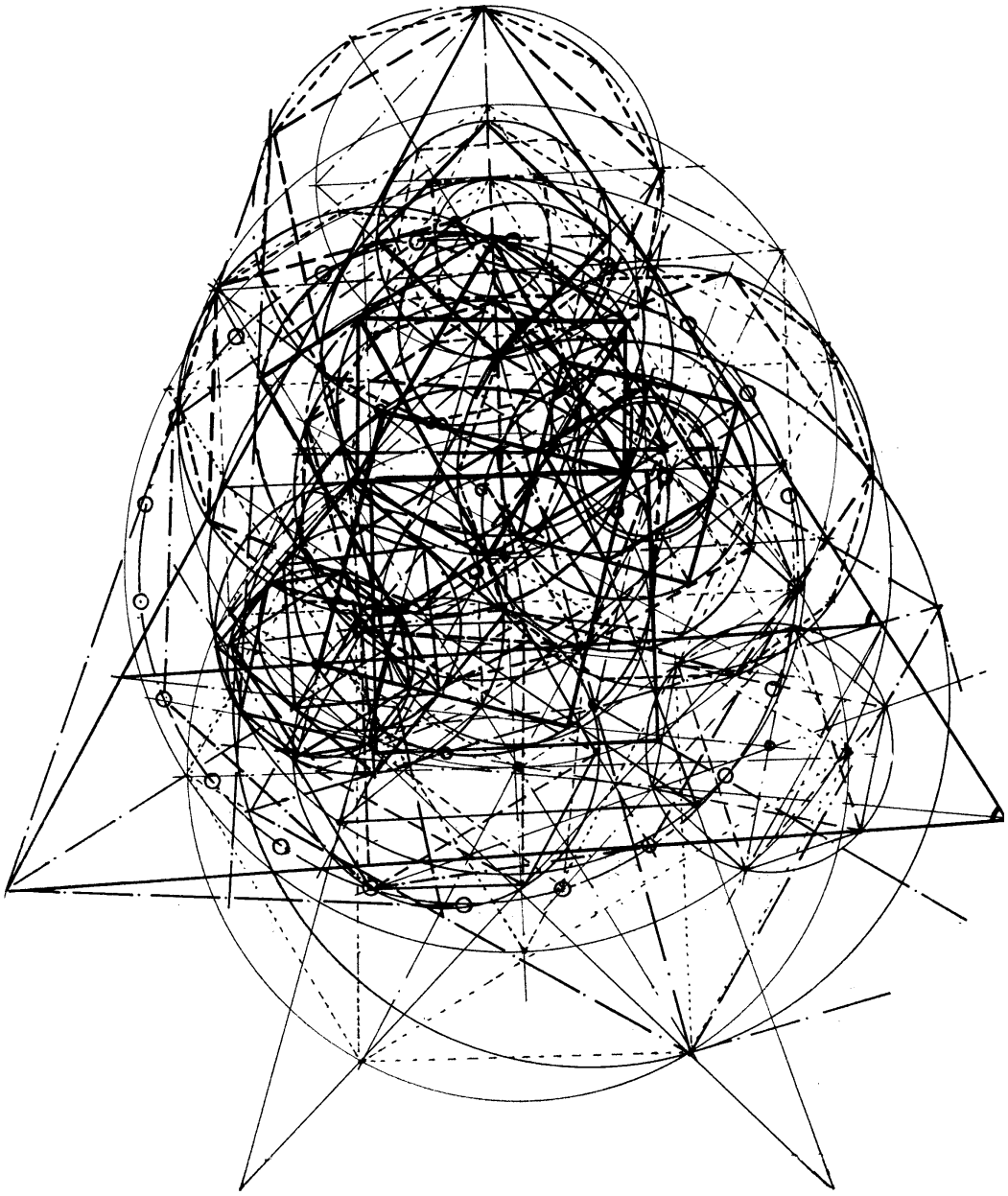


Abb. 178: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, ganzer Teil

Hier sind die Linen von 194 weggelassen, welche nur der Perspektive dienen. Einige regelmässige Figuren sind herausgezeichnet, die vielleicht von Holbein als Idee hinter das Ganze gestellt worden sind.

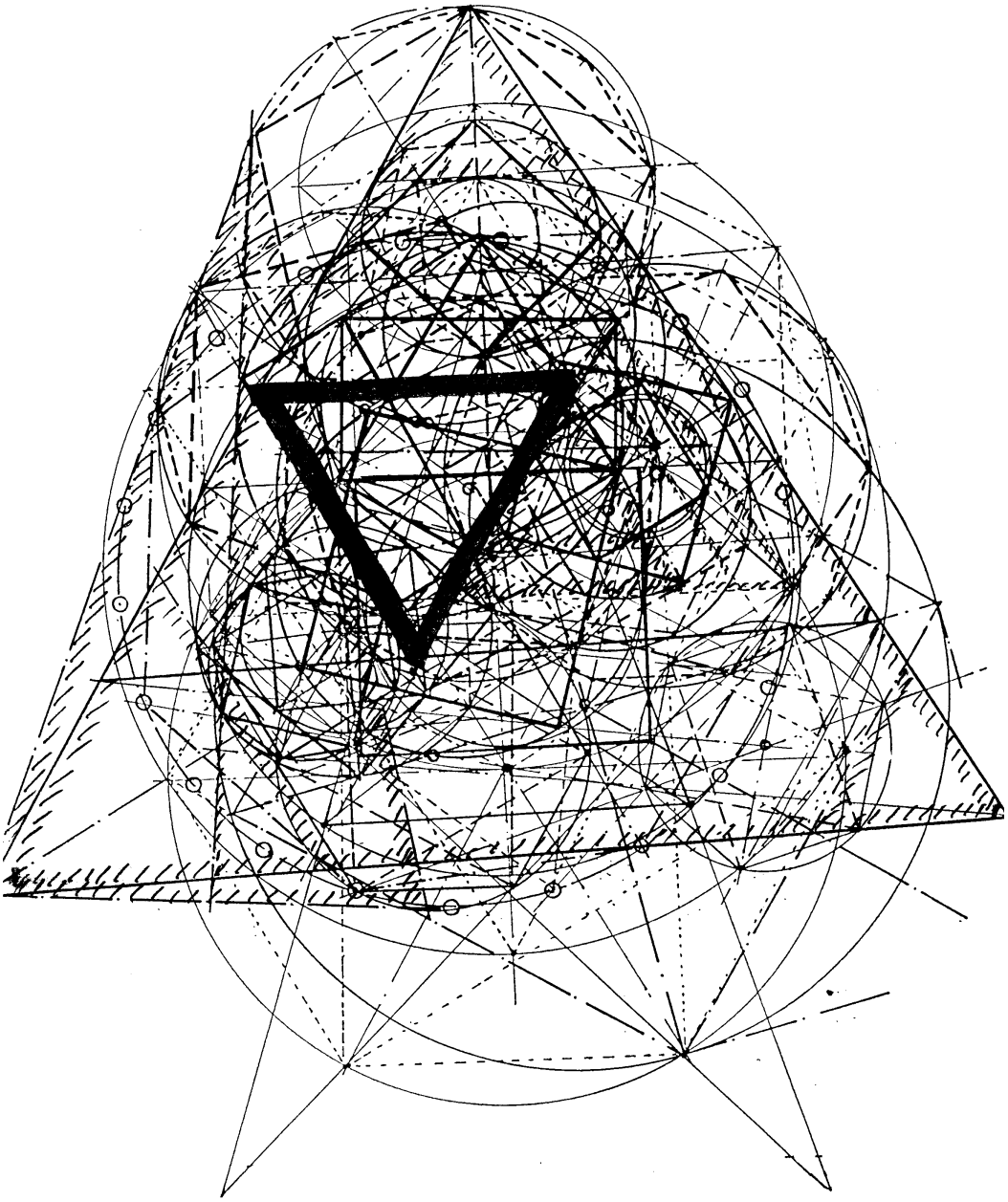


Abb. 179: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, gleichseitige Dreiecke

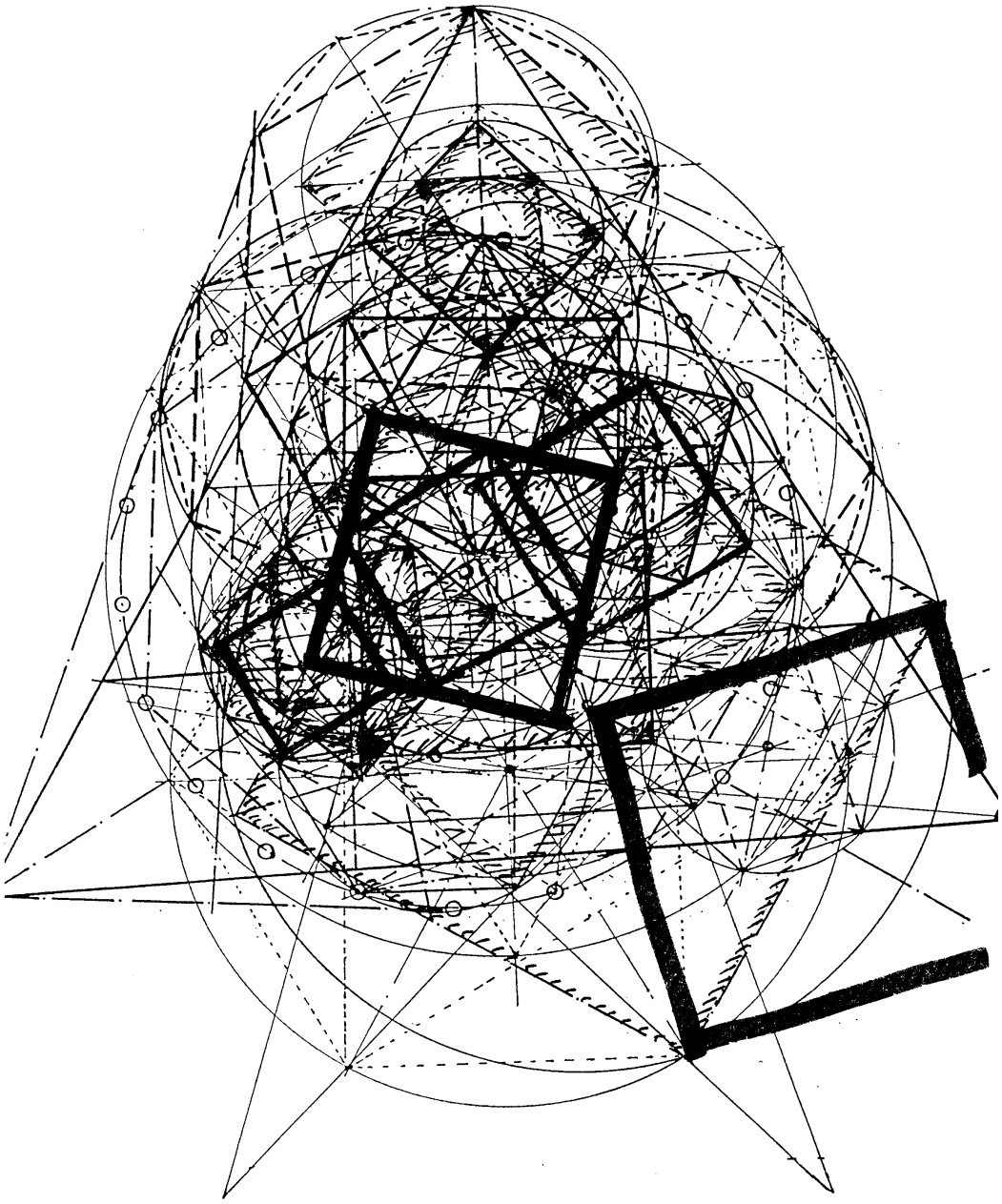


Abb. 180: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, gleichseitige Quadrate

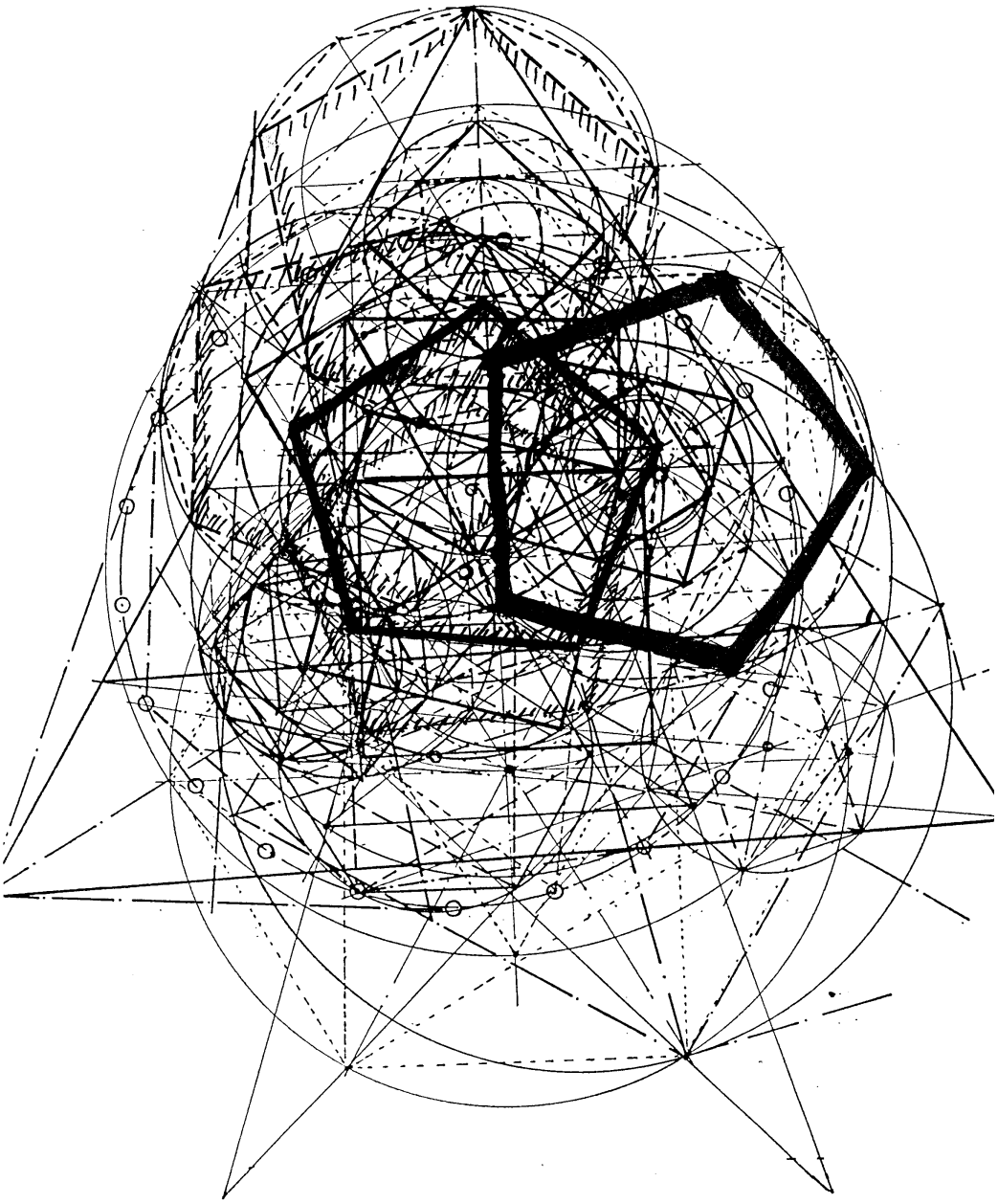


Abb. 181: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, mittlere gleichseitige Fünfecke

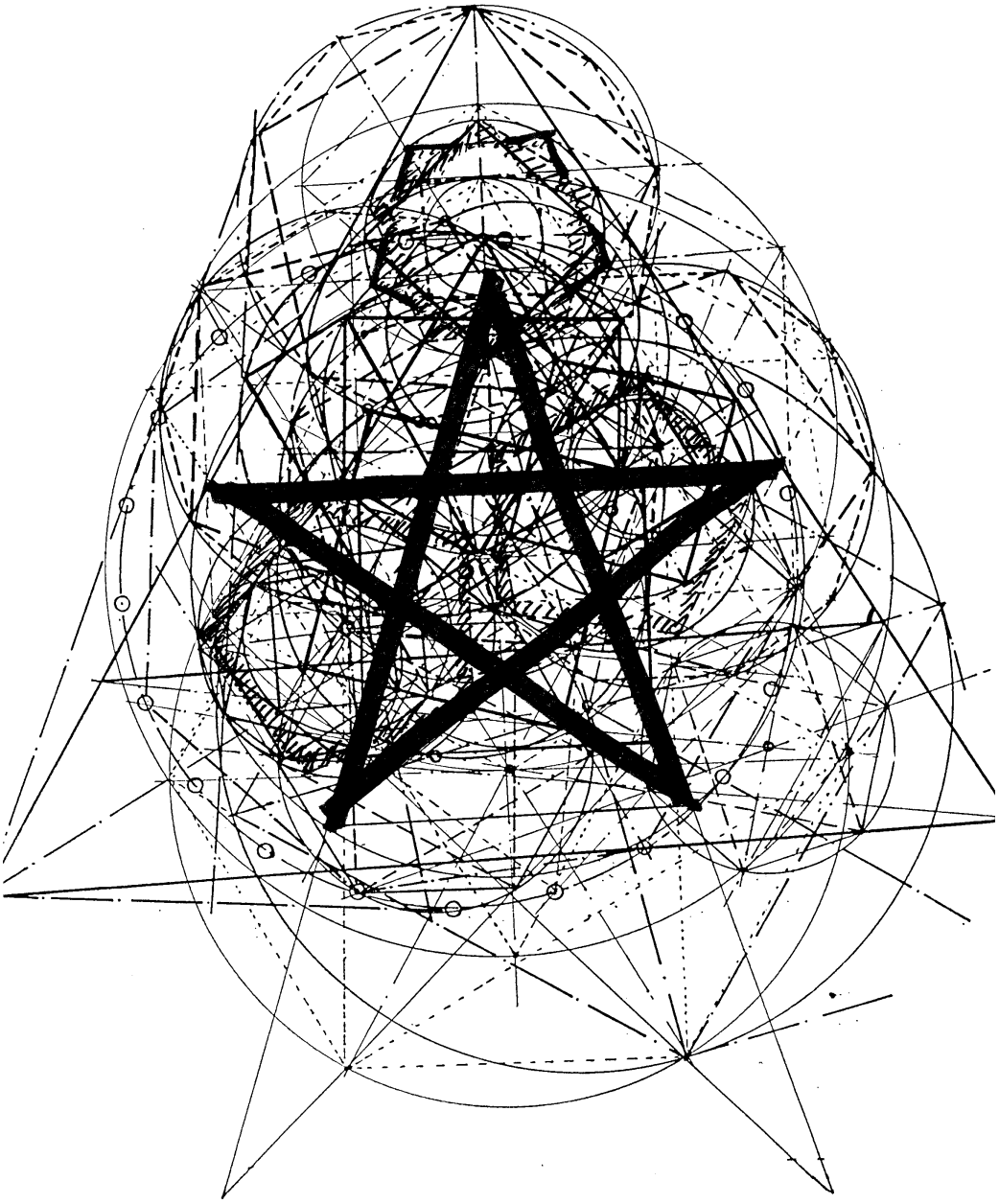


Abb. 182: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, gleichseitige Fünfecke

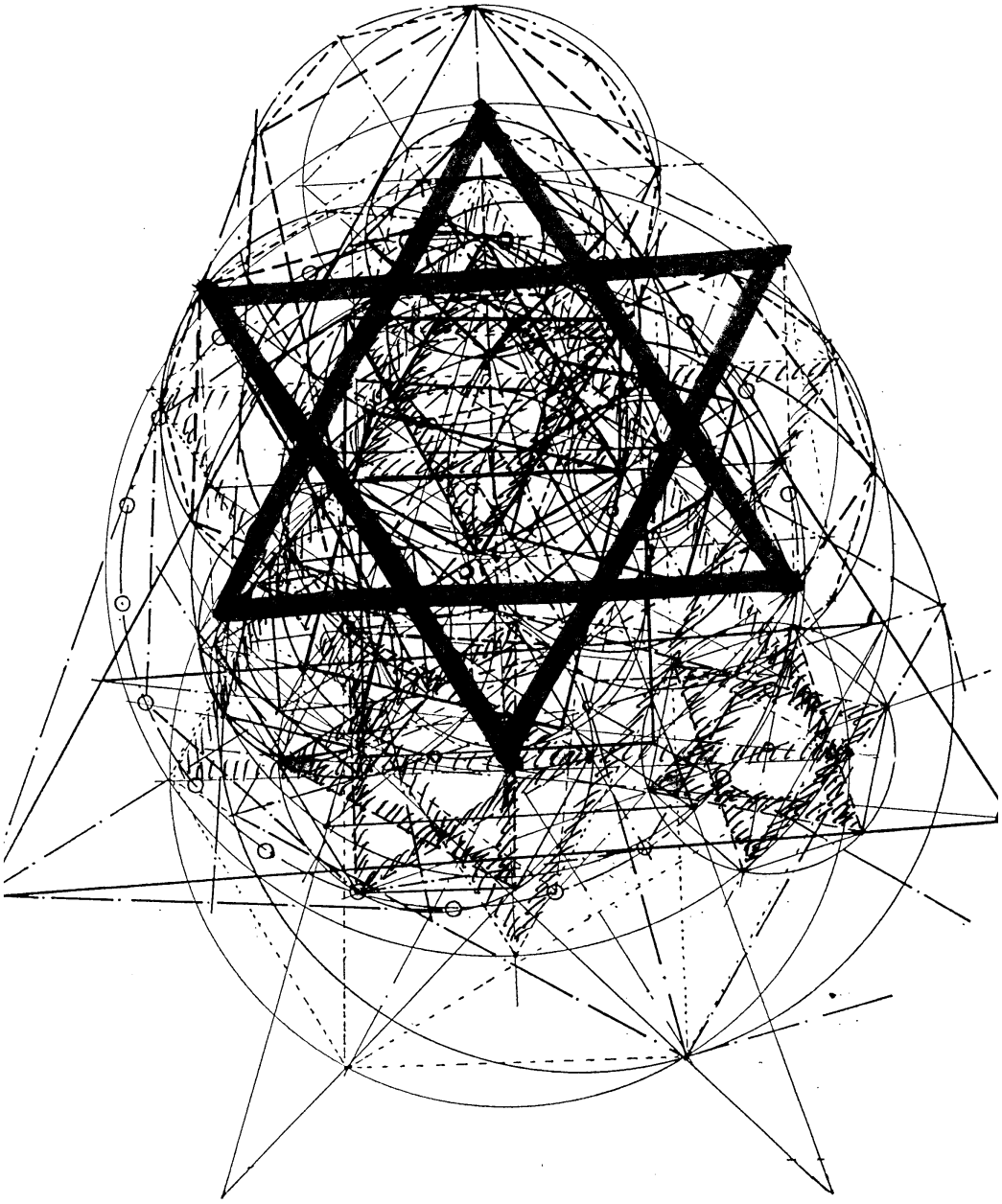


Abb. 183: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, gleichseitige Sechsecke

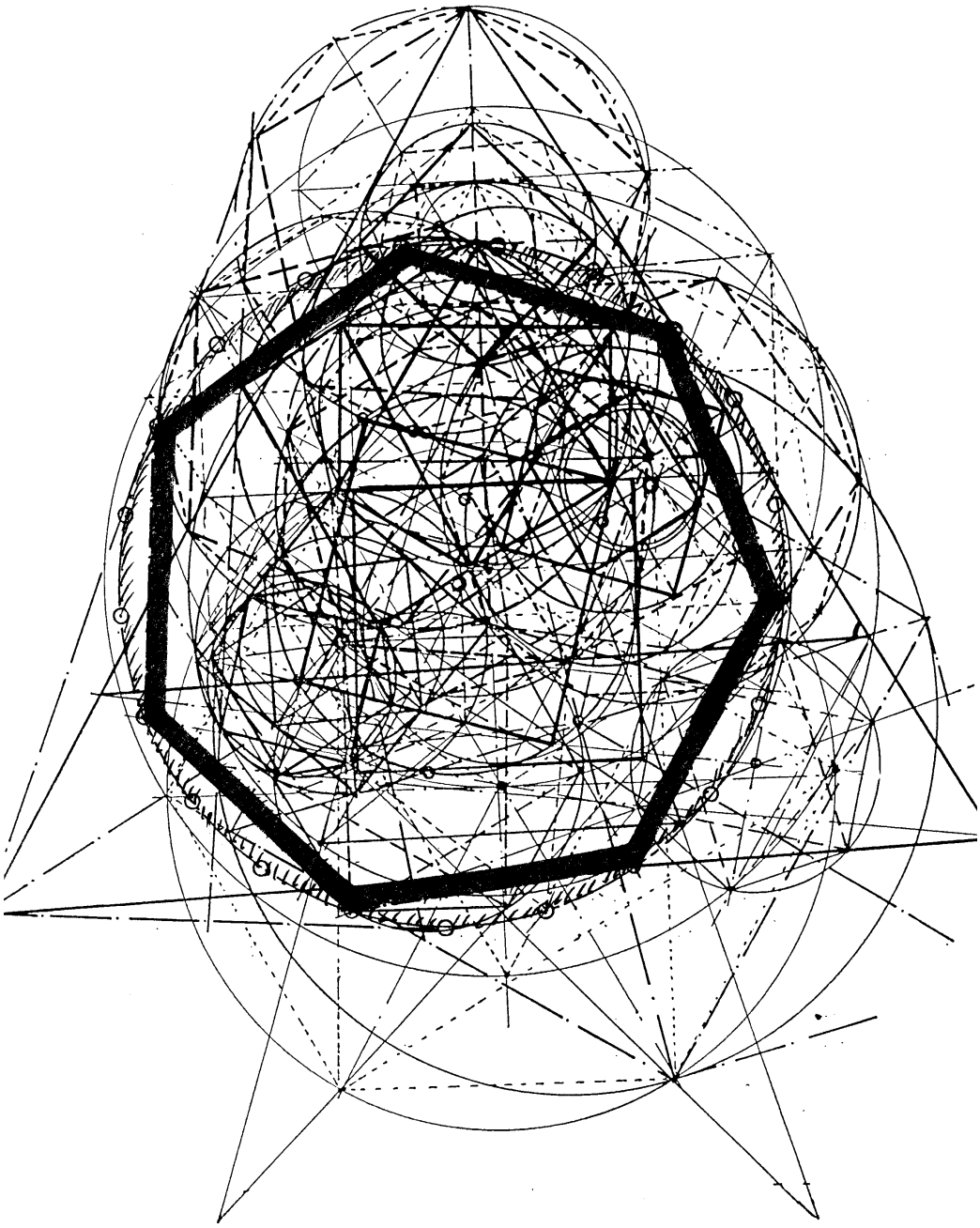


Abb. 184: Holbeins Familienbildnis, wesentl. Ideenlinien: Sieben– u. Einundzwanzigeck

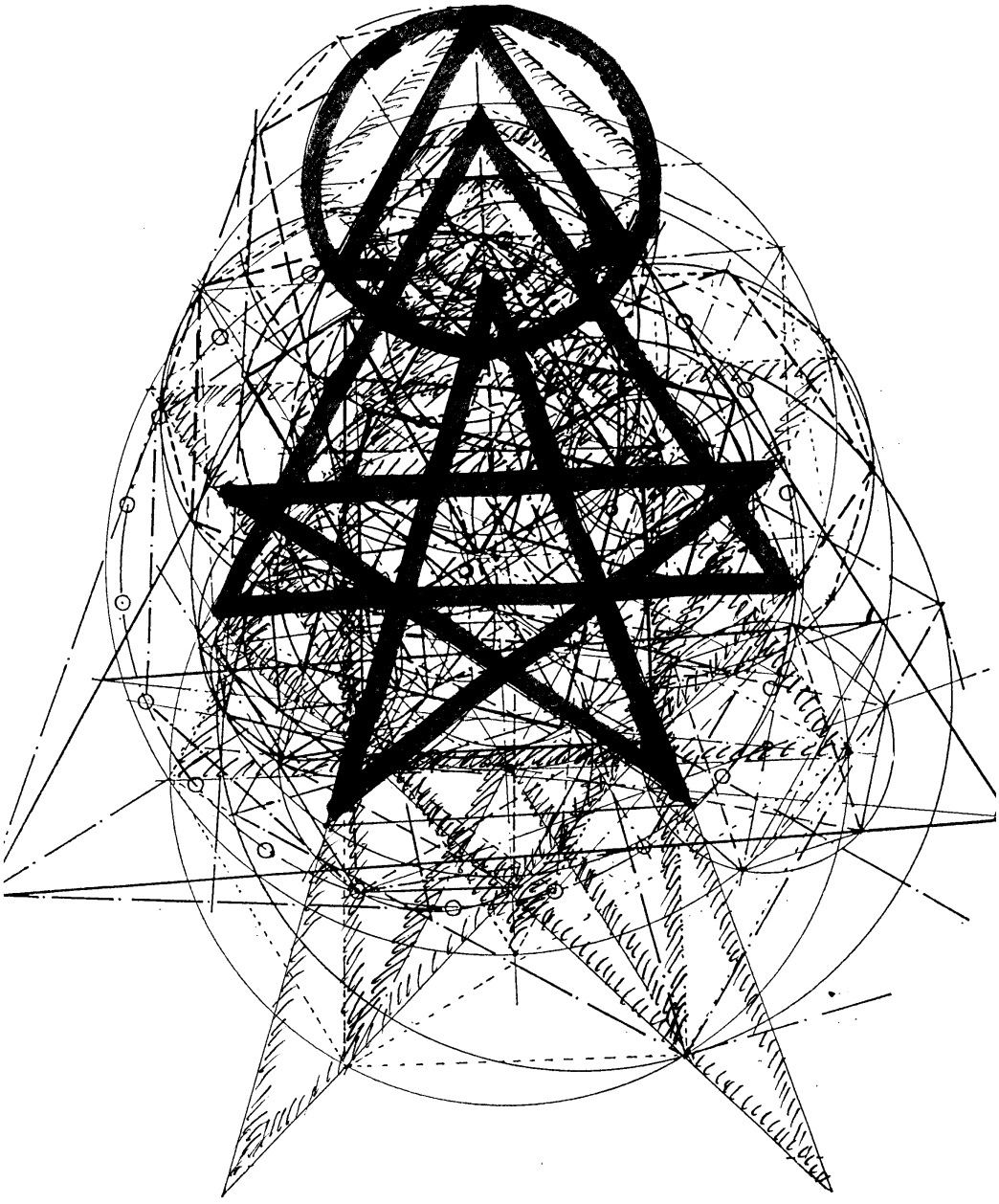
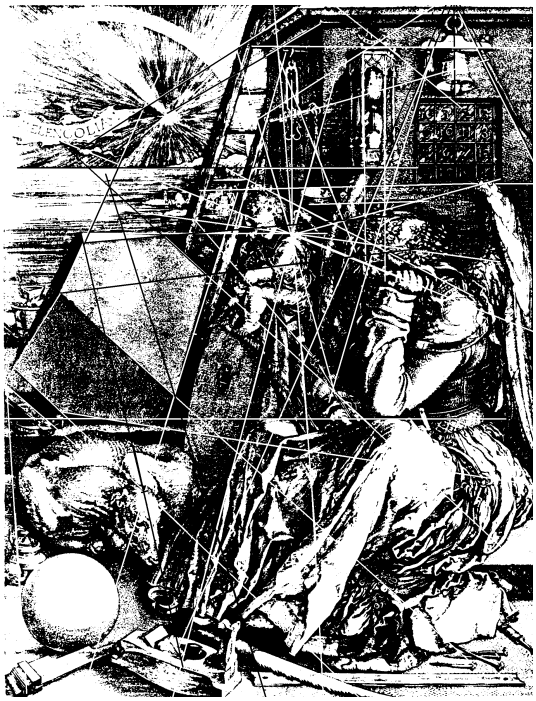


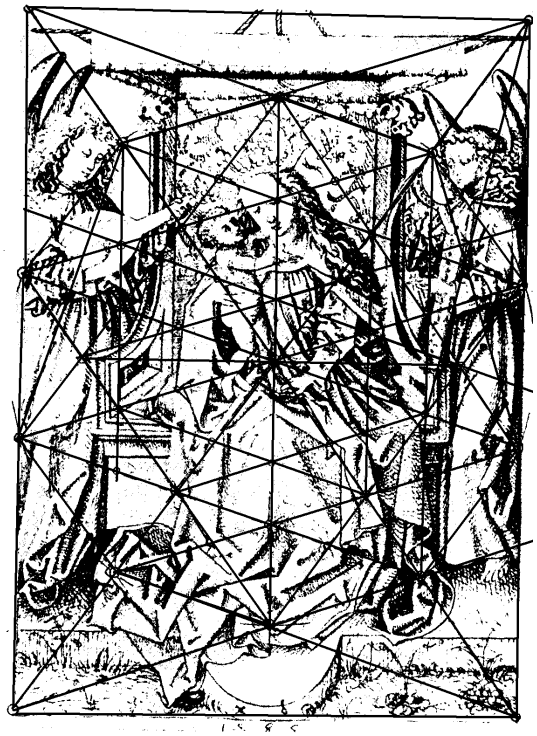
Abb. 185: Holbeins Familienbildnis, wesentl. Ideenlinien: „Mystischer Leib Christi“

Der mystische Leib Christi tritt hervor. Er steht bestimmend hinter dem Bild, das der Altgläubige unter intimer, jedoch profaner Oberfläche, im jetzt reformierten Basel zurückgelassen hat, wo nun niemand mehr religiöse Bilder bestellen wollte und einem Maler das Brot somit knapp wurde. Ist das Bild ein Ausdruck tiefer Religiosität und Segnung der Familie, die Holbein nun zurücklassen und bald dem Schicksal überlassen wird? Oder ist es einfach das Schema der eingeübten, gängigen Madonna–Bilder?

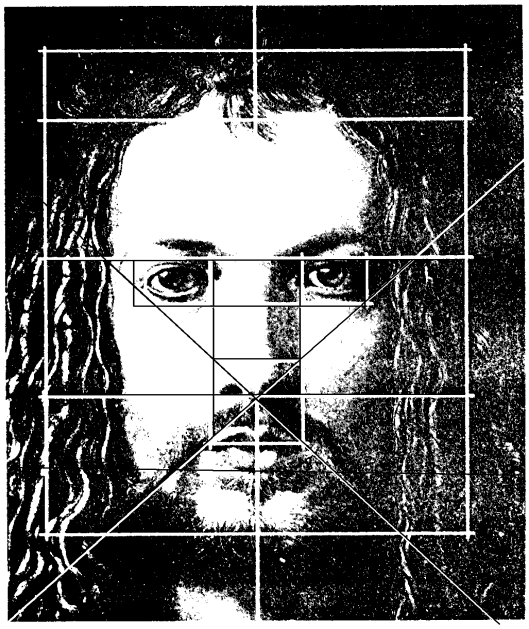
A. 186: Dürrer, Melancholia



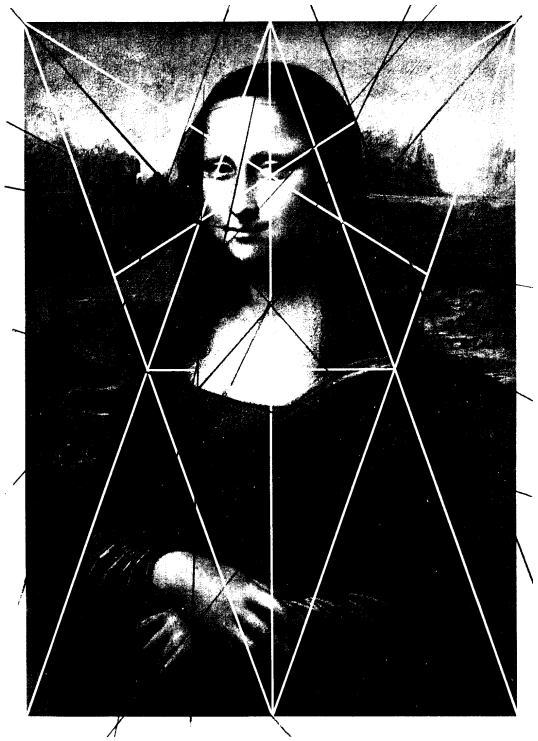
A. 187: Dürrer, Melancholia, einige Linien



A. 188: Federzeichnung von Dürrer: Die Jungfrau mit den musizierenden Engeln, 1485



A. 189: Selbstbildnis



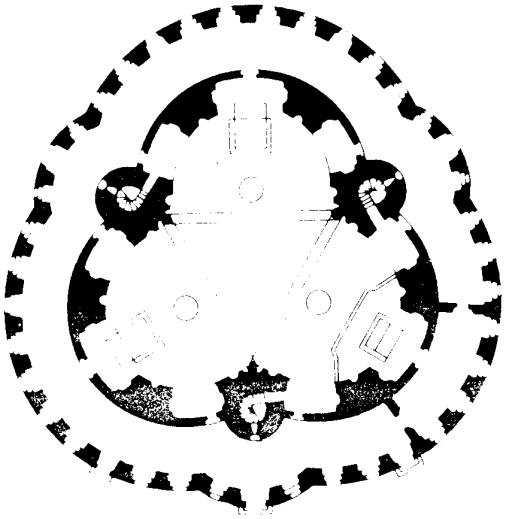
A. 190: Leonardo da Vinci, Mona Lisa

A. 191: Raffael, Vermählung der Jungfrau

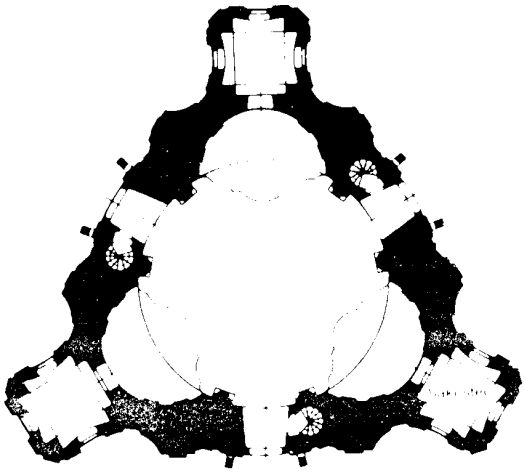
Abb. 192: Raffael, Sistinische Madonna — Die Galetea

Abb. 193: Tizian, Himmerfahrt der Maria

9.7.3 Bauwerke im Barock: Geometrische Prinzipien, Formen

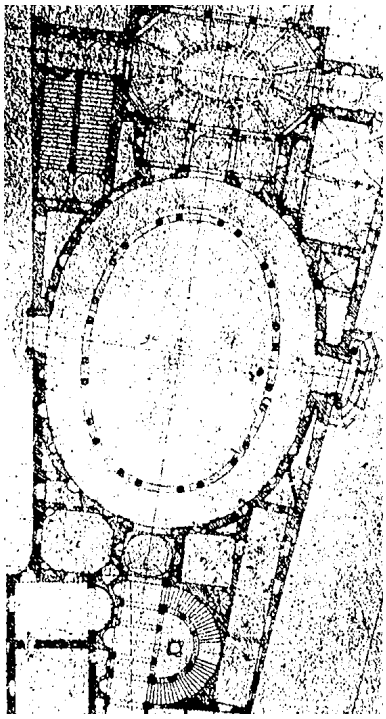


P. 194: Dreifaltigkeitskirche, Kappel bei Waldsassen, Georg Dietzenhofer, 1685–1689

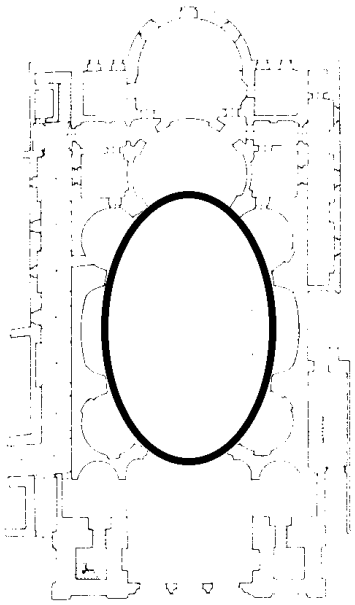


P. 195: Dreifaltigkeitskirche, Stadl Paura bei Lambach, Johann Michael Prunner, 1714–1724

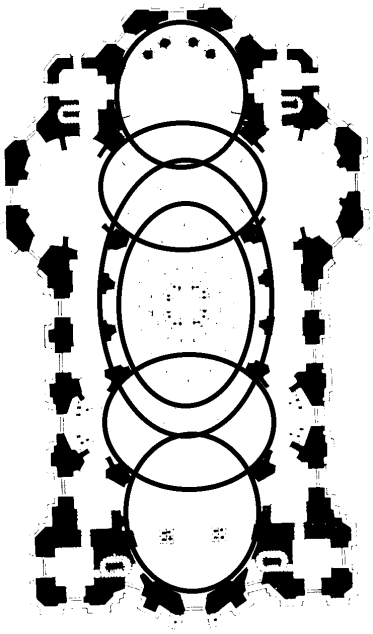
Grundrisse im Barock



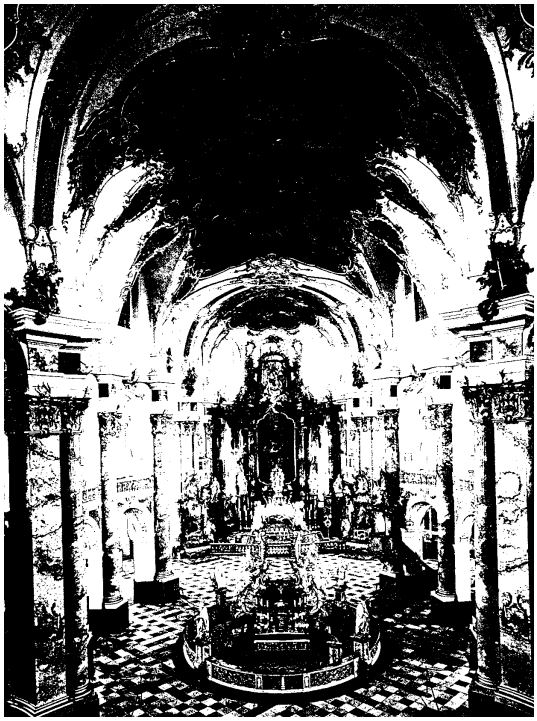
P. 196: Francesco Borromini, Entwurf für den Palazzo Carpegna, Rom



P. 197: Klosterkirche St. Anna im Lehl, München



P. 198: Wallfahrtskirche Vierzehnheiligen bei Staffelstein, Balthasar Neumann, 1743–72



P. 199: Wallfahrtskirche Vierzehnheiligen, innen

9.7.4 Neuzeit

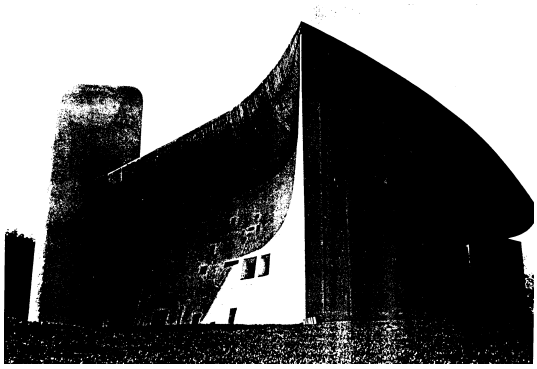


Abb. 200: Le Corbusier, Ronchamps

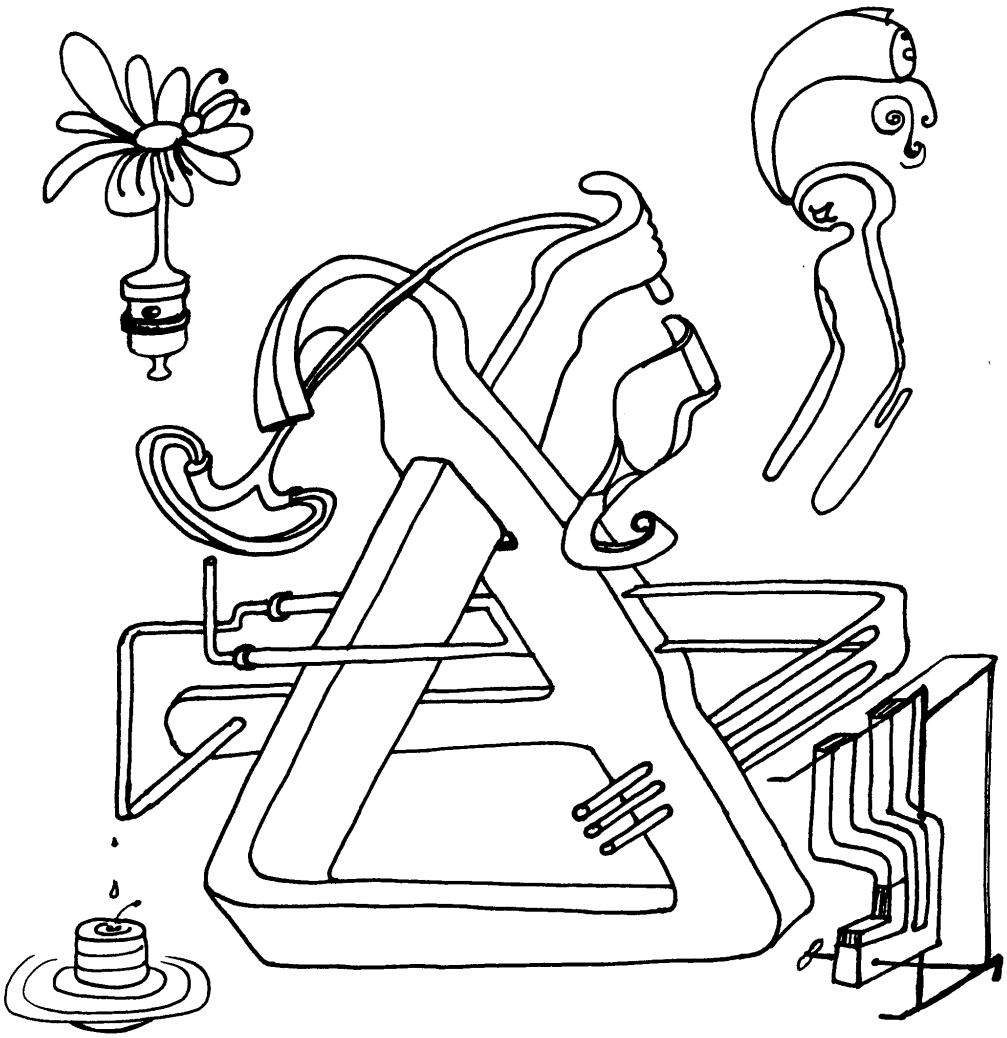


Abb. 201: Die Drei in der Vier in "moderneren" Zeiten . . .

Eine gezielte und bewusste Verfälschung der geometrischen Gesetze der Perspektive wird vom Auge akzeptiert, das nur auf einer kleinen Fläche scharf sieht, sich also fixieren muss. Da die Umgebung nur "neblig" vorhanden ist, entsteht Illusion. Mit Mathematik, hier speziell mit Geometrie, lässt sich so spielen. (Zeichnung des Autors, inspiriert von Reuterswärd, von dem Escher die Ideen kopiert hat.)

Kapitel 10

Die Anfänge der axiomatischen Mehtode: Euklids Frage, ob es nur fünf platonische Körper gibt und was daraus seit Kepler noch wird...

Im Jahre 1619 erschien Keplers monumentales Werk *Harmonica mundi* (Die Weltharmonik — „Mit Kaiserlichem Privileg auf 15 Jahre“). Keplers Werk setzt sich zusammen aus folgenden Büchern (Titel sinngemäss gekürzt):

1. Geometrie (reguläre Figuren, harmonische Proportionen)
2. Architektonische oder figürliche Geometrie
3. Harmonielehre (Harmonielehre und musikalische Dinge)
4. Metaphysishes, psychologisches und astronomisches Buch (mit Astrologie)
5. Astronomisches und metaphysisches Buch
6. Anhang mit wissenschaftlichen Vergleichen zur Antike und zur damaligen Gegenwart

Interessanterweise sind es heute genau diese Themen, die in den Bereich der Architektur wieder einfliessen. Historisches Verständnis für die meisterhafte Restaurieration (statt der oft praktizierten Totrestauration) und Sinn für Harmonie, Ästhetik, ordnende Einbindung in den Kosmos statt Chaos u.s.w. sind gefragt. Um da bestehen zu können, genügt nicht der nackte Dünkel und die gefühlstötende überhebliche Arroganz. Ohne Kenntnisse wird kein Meister. Studium ist angesagt! Davon handeln die folgenden Kapitel.
Bemerkenswerterweise ist mir die Ähnlichkeit der Thematik in diesem Skript mit Keplers Themen erst aufgefallen, als der Stoff dieses Skripts schon längst gedacht und in grossen Teilen schon entstanden war. Im Nachhinein also. Dass diese historische Konstanz Tatsache ist, bestätigt mir die Wichtigkeit des in diese Themen gelegten Anliegens.

Was in diesem Kapitel folgt, ist ein Auszug des deutschen Teils aus dem Algebra–Kurs mit einigen Änderungen. Vgl. Unter:
http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html ⇝ Menu ⇝ Algebra

10.1 Polyedersatz

10.1.1 Begriffe

Definition: Ein **Polyeder**[18] ist ein durch endlich viele ebenen Flächen begrenzter endlicher Körper.

Einteilung: Konvexe, nicht konvexe, solche ohne Löcher, solche mit n Löchern, ...

Zur Klassifizierung verwenden wir die „Gummigeometrie“:

Wir denken uns den Körper aus Gummi gebaut, sodass er aufblasbar ist. Hat der Körper kein Loch, so entsteht beim Aufblasen ein **kugelartiges Gebilde**. Hat er ein Loch, so kann er auf diese Weise zu einem **Torus** oder Reifen (Pneu) aufgeblasen werden und dann weiter zu einem kugelartigen Gebilde mit irgendwo aussen einem Henkel (wie bei einer Tasse). Hat der Körper zwei Löcher, so ist er entsprechend deformierbar in einen Doppeltorus und dann in ein kugelartiges Gebilde mit zwei Henkeln u.s.w..

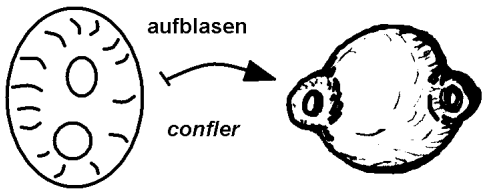


Abbildung 202:
Körper und sein Henkelkörper

Allgemein: Hat der Körper n Löcher, so lässt er sich in ein kugelartiges Gebilde mit n Henkeln deformieren. Jedes Polyeder ist so deformierbar.

Sei p die Anzahl der so entstehenden Henkel.

Definition: p heisst **Geschlecht** des Polyeders.

Körper, die gleiches Geschlecht haben, heissen **topologisch äquivalent**.
Les corps qui ont le même genre, s'appellent **topologiquement équivalents**.

10.1.2 Der Satz

Im Folgenden betrachten wir ein Polyeder mit e **Ecken**, k **Kanten** und f **Flächen**.

Satz: (**Polyedersatz**[19])

Vor.:

Gegeben sei ein Polyeder vom Geschlecht p.

Beh.:

$e - k + f = 2 - 2p$

Definition: $2-2p$ heisst **Eulersche Charakteristik** .

Wir untersuchen die Sache hier im Falle $p = 0$.

Falls das Polyeder Flächen besitzt, die keine Dreiecke sind, zerlegen wir diese Fächen in Dreiecke mit den bestehenden Eckpunkten. Dabei zerschneidet eine neue Kante eine bestehende Fläche in zwei neue Flächen. Die Kantenzahl k und die Flächenzahl f erhöhen sich um eins, e bleibt gleich. Somit ändert $z_0 = e - k + f$ nicht. Wir haben damit künstlich erreicht, dass alle Seitenflächen Dreiecke sind bei gleichem z_0.

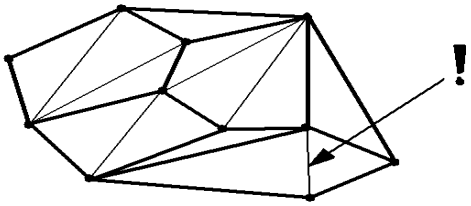


Abbildung 203

Nun wenden wir auf den Körper die Gummigeometrie an: Wir schneiden den Körper jetzt längs einer Kante zwischen zwei benachbarten Ecken auf und deformieren dann die Oberfläche derart, dass sie auf der Ebene liegt. Die aufgeschnittene Kante erscheint dabei jetzt doppelt, darf daher nur einmal gezählt werden. ($z_0 \longmapsto z_1 = z_0 + 1$.)

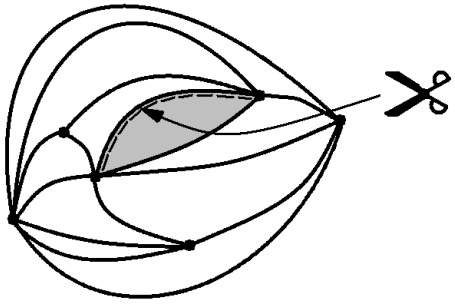


Abbildung 204

Entfernen wir nun in der Ebene von aussen her eine Kante und auch die damit eingeschlossene Dreiecksfläche, so bleibt z_0 wieder gleich. Bei dieser Operation können aber „freie Ecken“ entstehen: Eine übriggebliebene Ecke am Ende einer Kante (ihre „freie Kante“), die keine Fläche mehr umschliesst. Entfernt man aber diese freie Ecke auch mit ihrer freien Kante, so ändert z_0 nicht.

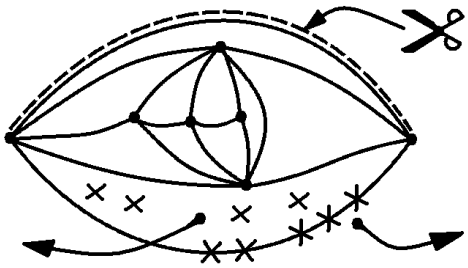


Abbildung 205

Auf diese Weise kann man die in die Ebene ausgebreitete Oberfläche des Polyeders durch Entfernung von Kanten, Flächen und Ecken solange abbauen bis nur noch eine Dreiecksfläche übrigbleibt, deren eine Kante die beim Aufschneiden entstanden ist, also doppelt vorhanden war und daher nicht gezählt werden darf.

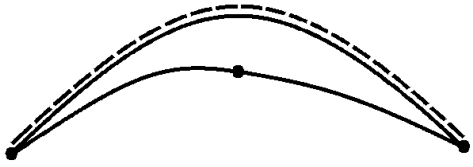


Abbildung 206

Am Schlusse bleibt dann noch:

[19] Ein allgemeiner Beweis stammt z.B. von Cauchy.

$f = 1,\ e = 3,\ k = 2$ (nur 2 zählen, eine doppelt)
$\rightsquigarrow \quad z_0 = e - k + f = 3 - 2 + 1 = 2 = 2 - 2p,\ p = 0 \rightsquigarrow \quad e - k + f = 2 - 2p \quad \text{mit} \quad p = 0.$

10.1.3 Platonische Körper

Definition und Anzahl

Definition: Ein Polyeder heisst **regulär**, wenn alle Seitenflächen kongruente regelmässige n–Ecke sind.

Die regulären Polyeder nennt man auch **platonische Körper**[20]

(Alle Kanten gleich lang, alle Winkel gleich gross.)

Euklid hat es unternommen, mit den damaligen Mitteln und Begriffen die Geometrie weitgehend axiomatisch exakt aufzubauen (die „Elemente“, dreizehn Bücher), um dann im 13. Buch zu beweisen, dass es nur 5 platonische Körper gibt. Man muss sich vor Augen halten, was das bedeutet! Es geht hier um einen Beweis, der unendlich viele Möglichkeiten ausschliessen muss! Es geht Euklid also nicht darum, für das spätere Mittelalter ein Geometrielehrbuch zu schreiben. Dazu hat Euklid die Geometrie streng logisch–deduktiv aufgebaut, ausgehend von einfachen Grundannahmen, Begriffen, Definitionen und Axiomen (offensichtliche elementare Sätze, die so einfach sind, dass sie nicht weiter bewiesen werden können). In der Geschichte der Wissenschaften ist das Werk Euklids das erste Beispiel eines solchen Unterfangens. Es ist das erste Beispiel oder Modell der rational–deduktiven axiomatischen Methode.

Der Beweis des Satzes von Euklid gelingt leicht auf Grund des Polyedersatzes. Man kann dabei die Tatsache benützen, dass in einem regelmässigen Körper in einer Ecke minimal $m = 3$ Flächen und maximal $m = 5$ regelmässige Flächen zusammenstossen können.

Schuld daran sind die Grössen der Innenwinkel der Flächen. Beim gleichseitigen Dreieck beträgt die Grösse eines Innenwinkels an einer Ecke $\alpha(3) = 60^o$, beim Quadrat $\alpha(4) = 90^o$, beim regelmässigen Fünfeck $\alpha(5) = 108^o$, beim regelmässigen Sechseck $\alpha(6) = 120^o$ und beim regelmässigen Siebeneck gerundet $\alpha(7) = 128.5^o$. Sechs regelmässige Flächen können daher höchstens nur in der Ebene zusammenstossen: Sechs regelmässige Dreiecke. Für einen endlichen Körper im Raum sind es somit höchstens fünf.

Stossen an einem Punkt n regelmässige Flächen mit dem Innenwinkel $\alpha(n)$ zusammen, so kann die Summe der Grössen der zusammenstossenden Winkel den vollen Winkel nicht übersteigen. Man hat daher im Raum die Bedingung $n \cdot \alpha(n) < 360^o$

Daher bleiben nur noch folgende fünf Möglichkeiten an einer Ecke eines regelmässigen Polyeders:

1. 3 Dreieck $\rightsquigarrow\ 3\alpha(3) = 180^o < 360^o$
   4 Dreiecke $\rightsquigarrow\ 4\alpha(3) = 240^o < 360^o$
   5 Dreiecke $\rightsquigarrow\ 5\alpha(3) = 320^o < 360^o$
   (6 Dreiecke $\rightsquigarrow\ 6\alpha(3) = 360^o \not< 360^o$)

[20] Nach Platon, griech Philosoph

2. 3 Quadrate $\rightsquigarrow\ 3\alpha(4) = 270^o < 360^o$
   (4 Quadrate $\rightsquigarrow\ 4\alpha(4) = 360^o \not< 360^o$)

3. 3 Fünfecke $\rightsquigarrow\ 3\alpha(5) = 324^o < 360^o$
   (4 Fünfecke $\rightsquigarrow\ 4\alpha(5) = 432^o \not< 360^o$)
   (3 Secksecke $\rightsquigarrow\ 3\alpha(6) = 360^o \not< 360^o$)

Somit gilt das Lemma:

Lemma: Es gibt maximal 5 regelmässige Polyeder.

Jetzt muss man noch zeigen, dass auch minimal 5 solche existieren, indem man ihre Konstruktion angibt. Für das Tetraeder, das Hexaeder und das Oktaeder gewinnt man problemlos die Einsicht der Existenz aus der Anschauung, was einem die Konstruktion möglich macht. Schwieriger ist es für die restlichen zwei Fälle. Hier hilft der Polyedersatz weiter. Z.B. bei 3 regelmässigen Fünfecken gilt: $k = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{2}$ (Jede Fläche besitzt 5 Kanten und jede Kante wird bei zwei aneinanderstossenden Flächen gezählt, also doppelt.) Weiter sieht man auf analoge Weise: $e = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow\ 2 = e - k + f = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{3} - 5 \cdot f \cdot \frac{1}{2} + f\ \Rightarrow\ 2 \cdot 6 = 10f - 15f + 6f\ \Rightarrow\ f = 12$
$\rightsquigarrow$ Dodekaeder ... Die weiteren Ausführungen seien dem Leser überlassen.

Hinweis:
Seitenflächen regelmässige n–Ecke $\rightsquigarrow$

$$k = \frac{m \cdot e}{2} \quad \text{oder} \quad e = \frac{2 \cdot k}{m}$$
$$e = \frac{n \cdot f}{m} \quad \text{oder} \quad f = \frac{m \cdot e}{n}$$
$$k = \frac{n \cdot f}{2} \quad \text{oder} \quad f = \frac{2 \cdot k}{n}$$
$$3 - k + f = 2\ \Rightarrow\ 2 \cdot n \cdot (e-2) = m \cdot e \cdot (n-2),\ \ m = 3,4,5,\ \ n \geq 3$$

Satz: **Euklid**
Es gibt exakt 5 regelmässige Körper (platonische Körper): Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

(Tetraeder $\rightsquigarrow$ 4 Flächen, Tetra $\rightsquigarrow$ 4, Hexa $\rightsquigarrow$ 6, Okto $\rightsquigarrow$ 8, Dodeka $\rightsquigarrow$ 12, Ikosa $\rightsquigarrow$ 20)

Eigenschaften

Man stellt fest, dass immer zwei Polyeder dual sind. Dies in dem Sinne, dass der eine Körper in den andern einschreibbar ist, sodass Die Ecken des innern Körpers auf den Flächenmittelpunkten des äusseren Körpers liegen.

Über platonische Körper existiert eine ausgedehnte Literatur, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Hier sollen die folgenden Ausführungen zur Bedeutung genügen:

Die Literatur lehrt, dass schon Pythagoras[21] einige dieser Körper gekannt haben muss. Platos Freund Theätet[22] lehrte darüber. Plato[23] hat das Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder und Ikosaeder in seinem Dialog <Timaios> den Elementen Feuer, Erde, Luft und Wasser zugeordnet. Das Dodekaeder jedoch der Himmelmaterie. (Später sprach man auch von 'quinta Essenzia — die Quintessenz'.) Weiter haben sich auch u.a. Leonardo da Vinci[24], Albrecht Dürrer[25], Johannes Kepler[26] und Leonard Euler[27] mit der Sache beschäftigt. Wegen ihrer idealen Gestalt haben platonischen Körper vor allem in den bildenden Künsten Spuren hinterlassen. Sie hatten ihre Wirkung dort , wo die Raumgestaltung, die Meditation, die Idee, die Theorie, die Schönheit im Zentrum steht, die staunen lässt, also im Reich der Gefühle. Abgesehen von der Kristallographie, der Chemie (Gitterstrukturen) sowie bei Verpackungsproblemen, haben sie in praktischer Naturwissenschaft und Technik bis heute keinen beherrschenden Einfluss gehabt — was nicht ausschliesst, dass das in Zukunft noch ändern kann. Doch eines ist sicher:

An den platonischen Körpern finden wir ein sehr reiches Auftreten von geometrischen Zusammenhängen. Es ist nicht überheblich zu behaupten, dass von ihnen die meisten Anregungen des geometrischen Denkens ausgehen.

Bekannte Anektoten erzählen uns, dass das Problem des von Euklid abgewiesenen „Königsweges zur Geometrie“ und des praktischen Nutzens dieser Wissenschaft schon in der Antike zu reden gab. Wie konnten diese Gschichten sonst die Zeit überdauern, wenn es nicht hier um grundlegende Fragen des Menschen gehen würde?
Diese Anektoten findet man unter:

http://www.rowicus.ch/Wir/ArtikelTexte/ArtikelTexte.html
⇝ Hopplaschnell.pdf (Publ. Version) oder
⇝ StudentHopplaschnellDoppel.pdf (Originalversion)

Weiter war es kein Geringerer als Platon, der ebenfalls die Nachwelt unterweist, dass die überragendste Bedeutung der Geometrie nicht auf ihrem praktischen Nutzen beruhe. Sie beruht darauf, dass sie mit obendrein sehr praktischem Erfolg „ewige und unwandelbare Gegenstände untersucht“ (geistige Realitäten wie Punkte, Geraden, Ebenen und ihre Beziehungen...) „und danach strebt, die Seele zur Wahrheit zu erheben...“.

Nachstehend ist eine Zusammenstellung der Bedeutungen sowie der Ecken– Kanten– und Flächenanzahlen wiedegegeben:

Körper	Antike Zugeordnung	e	k	f	Dualer Körper
Tetraeder	Feuer	4	6	4	Tetraeder
Hexaeder	Erde	8	12	6	Oktaeder
Oktaeder	Luft (Pneuma, Seele)	6	12	8	Hexaeder
Dodekaeder	Quinta Essenzia, Äther, Geist	20	30	12	Ikosaeder
Ikosaeder	Wasser	12	30	20	Dodekaeder

[21] Pyhtagoras 580–500 v.Chr.
[22] Theätet †369 v.Chr.
[23] Plato 427–374 v.Chr.
[24] Leonardo da Vinci 1452–1519
[25] Albrecht Dürrer 1471–1528
[26] Johannes Kepler 1571–1630
[27] Leonard Euler 1707–1783

Für die Berechnung einer fehlenden Grösse kann die vereinfachte eulersche Polyederformel benutzt werden:

$$e - k + f = 2$$

Nachstehend ist ein zum Stoff passender Abschnitt aus dem Kapitel „Graphentheorie“ (Skript „Diskrete Mathematik“ vom Autor dieses Skripts) eingefügt. Darin wird auf Kenntnisse der Graphentheorie aufgebaut. Die Resultate jedoch sind für die Architektur interessant.

10.2 Planare Graphen und Polyederkugeln

10.2.1 Ausbreitungsäquivalenz

Ein Polyeder kann man sich aus Gummi denken. Schneidet man ein Loch in eine Fläche, und schneidet man dann diese Fläche, so wie beim nebenstehenden Würfel gezeigt, vom Loch her diagonal auf jede der angrenzenden Ecken zu ein, so kann man das Gummigebilde durch ziehen in die Ebene ausbreiten. Die angeschnittene Fläche soll in der Ebene mit der Aussenfläche des entstehenden Graphen identifiziert werden. Die Schnittkanten werden anschliessend weggelassen.

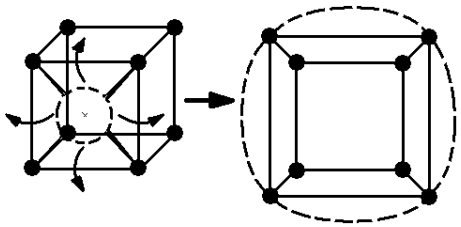


Abb. 207: Ausbreitung eines Würfels

Man sieht sofort, dass bei dieser Transformation in die Ebene keine Ecke, Kante oder Fläche verloren geht. Sogar die eingeschnittene Fläche ist in der Ebene als Aussenfläche wieder vorhanden. Die Polyederflächen gehen bei einer solchen elastischen Dehnung in Flächenstücke in der Ebene über. Die Anzahl Ecken, Kanten und Flächen bleibt demnach bei der **Ausbreitungstransformation** invariant. Da auf der Oberfläche des Polyeders keine Kanten anderswo als in den Ecken miteinander inzidierenden, finden wir ebenso bei den entstehenden Graphen in der Ebene. Jene können daher keine Brücken aufweisen. Sie sind somit einfach und planar. Auch die Rücktransformation existiert nach dem beschriebenen Verfahren bezüglich Ecken–, Kanten– und Flächenzahl eindeutig, denn bei der Ausbreitung haben nie zwei Elemente dasselbe Bild. Dieser Sachverhalt kann schrittweise beschrieben und in einer Induktion über die Anzahl Schritte verifiziert werden. Er ist aber auch unmittelbar evident.

Definition: Eine Transformation wie die eben beschriebene nennen wir **Ausbreitung**, die Rücktransformation nennen wir **Volumeneinschliessung**. Zwei **Polyeder** nennen wir **ausbreitungsäquivalent**, wenn sie durch elastische Dehnung ineinander übergeführt werden können, ohne dass sich die Ecken–, Kanten– und Flächenzahl ändert. Ein **Polyeder** nennen wir **ausbreitungsäquivalent** zu einem einfachen, planaren **Graphen**, wenn sich das Polyeder entsprechend in den Graphen durch Ausbreitung abbilden lässt.

Auch das folgende Lemma ist unmittelbar evident:

Lemma: Die ebenflächig begrenzten räumlichen Polyeder besitzen alle alle einen äquivalenten, einfachen, planaren Graphen.

Die Umkehrung ist nicht richtig, wie man sofort an Trivialbeispielen sieht. Fassen wir z.B. ein beliebiges n–Eck als Graphen mit n Ecken, n Kanten und einer Fläche auf, so ist evident, dass daraus niemals ein volumenumschliessendes Gebilde mit ebenen Flächen werden kann. Man hat hier maximal nur eine ebene n–Eckfläche. Zwar kann man die Aussenfläche eines n–Echs im Raum immer so zurücktransformieren, dass ein Volumen eingeschlossen wird. Doch entweder muss dann die eine der beiden Begrenzungsflächen krumm sein, oder die beiden Begrenzungsflächen fallen zusammen, was ein degeneriertes Volumen (d.h. hier nur eine einzige Fläche) ergibt. Das Resultat einer solchen nicht–degenerierten Rücktransformation nenen wir **Kissen**.
Die Anzahl der Flächen des Polyeders mit der kleinsten Anzahl ebener Flächen ist 4 (Tetraeder). Ähnlich wie beim n–Eck verhält es sich daher mit Graphen mit zwei oder drei Flächen. Oder mit aneinandergereiten Quadraten wie bei einer Zeile auf einem karierten Blatt Papier. Hier ändert die Sache

jedoch, wenn wir (wie vorhin) wieder im Raum **krumme Flächen** zulassen. Z.B. mit einem Kreis und seiner Aussenfläche in der Ebene können wir im Raum ein **Kissen** bilden.

Wenn nun die Ecken–, Kanten– und Flächenanzahl bei der Transformation nicht ändern, so können wir folgern:

Satz: Wird die eulersche Polyederformel für Graphen bewiesen, so gilt sie automatisch auch für die äquivalenten Polyeder und damit für alle Polyeder. Wird sie für Polyeder beweisen, so gilt sie für die äquivalenten Graphen.

10.2.2 Andocken

Das Prinzip

Reguläre Polyeder (platonische Körper), semireguläre Polyeder (archimedische Körper), Prismen, Antiprismen und Johnsonkörper sind besonders interessant, weil man aus ihnen leicht unendlich viele weitere Körper zusammensetzen kann. Im nebenstehenden Beispiel sieht man, wie sich ein Polyeder an ein anderes Polyeder anfügen lässt, wenn die beiden Polyeder ein kongruentes Flächenpaar aufweisen, zu welchem jeder der beiden Körper eine Fläche beisteuert.

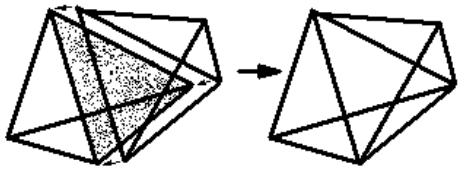


Abb. 208: Andockvorgang

Definition: Die eben gezeigte Zusammensetzungsart nennen wir **andocken**.

Beim Andocken eines Polyeders an ein anderes (durch zusammenfügen zweier Flächen mit je m Ecken) gilt nun wegen der eulerschen Formel $|E_1| - |K_1| + |F_1| = 2$ (beim ersten Polynom) und $|E_2| - |K_2| + |F_2| = 2$ (beim zweiten). $\rightsquigarrow$ $(|E_1| + |E_2|) - m + m - (|K_1| + |K_2|) + |F_1| + |F_2| = 2 + 2 \Rightarrow$ $\underbrace{(|E_1| + |E_2| - m)}_{|E_3|} - \underbrace{(|K_1| + |K_2| - m)}_{|K_3|} + \underbrace{(|F_1| + |F_2| - 2)}_{|F_3|} = 2$ (eulersche Formel erfüllt!).

Folgerung: Beim Andocken zweier Polyeder mit den Ecken–, Kanten– und Flächenzahlen $|E_1|, |K_1|, |F_1|$ sowie $|E_2|, |K_2|, |F_2|$ an einer Fläche mit m Ecken und Kanten entsteht ein Polyeder mit
$|E_3| = |E_1| + |E_2| - m$ Ecken,
$|K_1| + |K_2| - m = |K_3|$ Kanten und
$|F_3| = |F_1| + |F_2| - 2$ Flächen.

Wenn bei einem solchen Andockprozess sich die Polynome durchdrigen, lassen wir die störenden Anteile einfach so weit schrumpfen, bis das Andocken ohne Durchdringung möglich ist. Damit wird die Anzahl der Andockmöglichkeiten grösser. Weil auch Kettenbildungen möglich sind, ist die Anzahl der möglichen Polynome und der dazu äquivalenten Graphen unbegrenzt.

Satz: Die Polyeder sind äquivalent zu einer Teilmenge G_P der einfachen, planaren Graphen mit der Mächtigkeit $|G_P| = \infty$.

Definition: Blasen wir die elastisch gedachten Polyeder derart auf, dass sie Kugelgestalt annehmen, so sprechen wir von **zu den Polyedern äquivalenten Polyederkugeln**.

Polyederkugeln oder Näherungen von solchen, bei denen Flächen in kongruente oder „beinahe kongruente“ Klassen eingeteilt werden können, sind in den Naturwissenschaften und auch z.B. in der Gestaltung (z.B. Architektur) von Interesse.

Korollar: Es gibt unendlich viele verschiedenen Polyederkugeln.

Konsequenzen für die Ecken, Kanten und Flächen

Hier wollen wir uns kurz überlegen, wie ein Andockvorgang die Zahlen $|E|, |K|$ und $|F|$ verändert. Dabei wollen wir auch noch den degenerierten Fall $n = 2$ einschliessen.

Nebenstehend ist links ein Zweieck skizziert. Rechts sieht man, was der in die Fläche übertragene mehrmalige Andockvorgang bewirkt. Es entsteht ein Graph mit 2 Ecken, n Kanten und n Flächen (inklusive der Aussenfläche). Die Eulersche Formel $|E| - |K| + |F| = 2$ ist immer erfüllt. Beim Übergang vom n–ten zum $n + 1$–ten Graphen gilt:

$$|E_{n+1}| = |E_n| = 2, \;\; |K_{n+1}| = |K_n| + 1, \;\; |F_{n+1}| = |F_n| + 1$$

Abb. 209: Zweieck

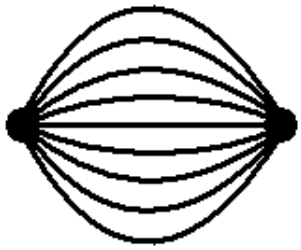


Abb. 210: Andocken von Zweiecken

Um aus den planaren Graphen (hier nicht einfache solche, mit parallelen Kanten) ein räumliches Gebilde erhalten zu können, brauchen wir minimal nur eine Fläche. Damit können wir wegen der Aussenfläche ein Kissen bilden mit mindestens einer krummen Fläche. Im Falle der rechten obigen Skizze mit der Anzahl Kanten $n \geq 2$ mag es z.B. eintreffen, dass das rücktransformierte und dann aufgeblasene Gebilde eine Kugel ist, auf der die vormaligen Kanten mit den Grosskreisen zusammenfallen. Was aber passiert, wenn wir die Forderung stellen, dass nur Polyeder mit äquivalenten ebenen Flächen in Form von regulären n–Ecken zulässig sind? Zwangsläufig müssen wir beim Studium dieser Frage von den kleinsten solchen Gebilden ausgehen, d.h. von den platonischen Körpern. Dazu brauchen wir erst einige Feststellungen:

1. **Andock–Erweiterungen des Tetraeders:**

   Ein Körper mit einer dreieckigen Seitenfläche lässt sich nach einer etwaigen Dehnung durch Andocken eines Tetraeders erweitern (vgl. Bild unten). Diese Andockung hat nach der Ausbreitung in die Ebene denselben Effekt wie eine Triangulation eines Seitendreiecks. Bei einer solchen Triangulation führen wir im Innern eines Dreiecks einen neuen Punkt ein und verbinden diesen mit den umliegenden drei Ecken. So entstehen drei neue Dreiecke an der Stelle eines alten.

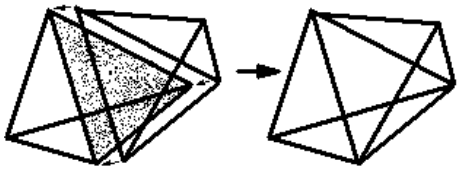


Abb. 211: Andockvorgang

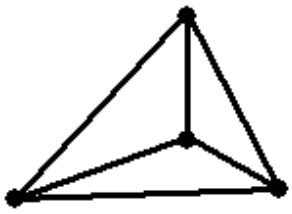


Abb. 212: Triangulation

Für die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen gilt beim Übergang vom n–ten zum $n+1$–ten Graphen:

$$|E_{n+1}| = |E_n| + 1 = |E_1| + (n-1) = 4 + (n-1),$$

$$|K_{n+1}| = |K_n| + 3 = |K_1| + (n-1) \cdot 3 = 6 + (n-1) \cdot 3 = (n+1) \cdot 3,$$

$$|F_{n+1}| = |F_n| + (3-1) = |F_1| + (n-1) \cdot 2 = 4 + (n-1) \cdot 2 = (n+1) \cdot 2.$$

Daraus lassen sich schon Folgerungen ableiten:

Folgerung:

Dockt man, ausgehend von einem Tetraeder, immer wieder Tetraeder an, so nimmt beim Übergang vom n–ten zum $n+1$–ten Graphen die Anzahl der Ecken um 1 zu, die Anzahl der Kanten ist ein Vielfaches von 3 und die Anzahl der Flächen ist immer gerade.

2. **Andock–Erweiterungen des Hexaeders:**

Nun gehen wir zum Würfel (Hexaeder) über. Der Andockvorgang ist im nebenstehenden Bild gezeigt. Beim Übergang vom n–ten zum $n+1$–ten Graphen nimmt Anzahl der Ecken um 4 zu, die Anzahl der Kanten um 8 und die Anzahl der Flächen um $6-2=4$. Daher gelten die Beziehungen:

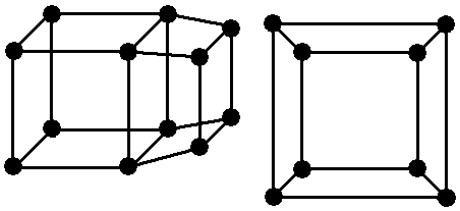


Abb. 213: Andockvorgang

$$|E_{n+1}| = |E_n| + 4 = |E_1| + (n-1) \cdot 4 = 8 + (n-1) \cdot 4 = (n+1) \cdot 4,$$

$$|K_{n+1}| = |K_n| + 8 = |K_1| + (n-1) \cdot 8 = 12 + (n-1) \cdot 8 = 4 + n \cdot 8,$$

$$|F_{n+1}| = |F_n| + 4 = |F_1| + (n-1) \cdot 4 = 6 + (n-1) \cdot 4 = 2 + n \cdot 4.$$

Folgerung:

Dockt man, ausgehend von einem Würfel, immer wieder Würfel an, so ist die Anzahl der Ecken ein Vielfaches von 4, die Anzahl der Kanten ein ungerades Vielfaches von 4 und die Anzahl der Flächen eine ungerades Vielfaches von 2.

Das Oktaeder ist dual zum Hexaeder (Würfel). Ersetzt man daher im Oktaeder „Flächen“ durch “Ecken“, so gewinnt man die Aussagen für den dualen Körper. Ob das auch nach dem Andocken so bleibt? Wir wollen es später untersuchen!

3. **Andock–Erweiterungen des Oktaeders:**

Gegeben sei also ein Oktaeder mit $|E_1| = 6$, $|K_1| = 12$ und $|F_1| = 8$. Beim Andocken (Übergang vom n–ten zum $n+1$–ten Graphen) nimmt die Anzahl der Ecken um $6-3=3$ zu, die Anzahl der Kanten um $12-3=9$ und die Anzahl der Flächen um $8-2=6$. Daher gelten die Beziehungen:

$$|E_{n+1}| = |E_n| + 3 = |E_1| + (n-1)\cdot 3 = 6 + (n-1)\cdot 3 = (n+1)\cdot 3,$$
$$|K_{n+1}| = |K_n| + 9 = |K_1| + (n-1)\cdot 9 = 12 + (n-1)\cdot 9 = 3 + n\cdot 9,$$
$$|F_{n+1}| = |F_n| + 6 = |F_1| + (n-1)\cdot 6 = 8 + (n-1)\cdot 6 = 2 + n\cdot 6.$$

Folgerung:

Dockt man, ausgehend von einem Oktaeder, immer wieder Oktaeder an, so ist die Anzahl der Ecken ein Vielfaches von 3, die Anzahl der Kanten ebenso ein Vielfaches von 3 und die Anzahl der Flächen ist gerade.

Konsequenz: Die Dualität zu den Andock–Erweiterungen des Würfels bleibt bei den Erweiterungen des Oktaeders nicht erhalten.

4. **Andock–Erweiterungen des Dodekaeders:**

Beim Andocken eines Dodekaeders an einen „Klumpen“ schon angedockter Dodekaeder lesen wir die folgenden Beziehung ab:

$|E_1| = 20$, $|K_1| = 30$ und $|F_1| = 12$. Beim Andocken (Übergang vom n–ten zum $n+1$–ten Graphen) nimmt Anzahl der Ecken um $20-5=15$ zu, die Anzahl der Kanten um $30-5=25$ und die Anzahl der Flächen um $12-2=10$. Daher gelten die Beziehungen:

$$|E_{n+1}| = |E_n| + 15 = |E_1| + (n-1)\cdot 15 = 20 + (n-1)\cdot 15 = 5 + n\cdot 15,$$
$$|K_{n+1}| = |K_n| + 25 = |K_1| + (n-1)\cdot 25 = 30 + (n-1)\cdot 25 = 5 + n\cdot 25,$$
$$|F_{n+1}| = |F_n| + 10 = |F_1| + (n-1)\cdot 10 = 12 + (n-1)\cdot 10 = 2 + n\cdot 10.$$

Folgerung:

Dockt man ausgehend von einem Dodekaeder immer wieder Dodekaeder an, so ist die Anzahl der Ecken ein Vielfaches von 5, die Anzahl der Kanten ebenso Vielfaches von 5 und die Anzahl der Flächen ist gerade.

5. **Andock–Erweiterungen des Ikosaeders:**

Beim Andocken eines Ikosaeders an einen „Klumpen“ schon angedockter Ikosaeder lesen wir wegen der Dualität zum Dodekaeder die Beziehung ab:

$|E_1| = 12$, $|K_1| = 30$ und $|F_1| = 20$. Beim Andocken (Übergang vom n–ten zum $n+1$–ten Graphen) nimmt Anzahl der Ecken um $12-3=9$ zu, die Anzahl der Kanten um $30-3=27$ und die Anzahl der Flächen um $20-2=18$. Daher gelten die Beziehungen:

$$|E_{n+1}| = |E_n| + 9 = |E_1| + (n-1) \cdot 9 = 12 + (n-1) \cdot 9 = 3 + n \cdot 9,$$

$$|K_{n+1}| = |K_n| + 27 = |K_1| + (n-1) \cdot 27 = 30 + (n-1) \cdot 27 = 3 + n \cdot 27,$$

$$|F_{n+1}| = |F_n| + 18 = |F_1| + (n-1) \cdot 18 = 20 + (n-1) \cdot 18 = 2 + n \cdot 18.$$

Folgerung:

Dockt man, ausgehend von einem Ikosaeder, immer wieder Ikosaeder an, so ist die Anzahl der Ecken ein Vielfaches von 3, die Anzahl der Kanten ebenso ein Vielfaches von 3 und die Anzahl der Flächen ist gerade.

Hinweis: Wählt man immer den Mittelpunkt einer Kante eines platonischen Körpers als Ecke eines neuen Körpers, so entsteht wieder ein Körper mit regelmässigen n–Ecken als Seitenflächen. Diese Seitenflächen sind jedoch bei einem Körper nicht allgemein kongruent. Das sieht man schon daran, dass es nur 5 platonische Körper gibt und dass die vorkommenden Kantenzahlen 6 und 30 nicht unter den Eckenzahlen der platonischen Körper vertreten sind.

Konsequenz: Durch Andockerweiterungen von platonischen Körpern durch ebensolche Körper kann man nicht immer beliebige Ecken–, Kanten– und Flächenzahlen erreichen. Dockt man z.B. immer wieder Dodekaeder an Dodekaeder an, so entsteht niemals ein Körper mit 97 Ecken, Kanten oder Flächen. (Denn es gilt: $97 \in \mathbb{P}$, 97 ist kein Vielfaches von 5.)

10.2.3 Reguläre Polyederkugeln und ihre Derivate

Definition: Eine Polyederkungel, welche einen äquivalenten platonischen (regulären) Körper besitzt, nennen wir **regulär**. Ist sie zu einem archimedischen Körper äquivalent, so nennen wir sie **semiregulär**.

Platonische Körper bestehen aus lauter gleichseitigen Dreiecken, Quadraten oder gleichseitigen Fünfecken. Mittels andocken können wir damit Klumpen herstellen mit beliebig grosser Ecken–, Kanten oder Flächenzahl. Durch aufblasen entstehen Polyederkugeln mit lauter äquivalenten n–Ecken. Wir wollen jetzt der Frage nachgehen, ob es Polyederkugeln geben kann, deren Flächen aus n–Ecken mit $n > 5$ entstanden sind.

Wir wissen aus der Elementargeometrie, dass man eine Ebene lückenlos in gleichseitige Dreiecke, Quadrate und 6–Ecke aufteilen kann. Mit 5–Ecken geht das nicht. Das liegt an den auftretenden Winkeln:
Der Innenwinkel an einer Ecke beim 5–Eck beträgt 144^o. Zwei zusammenstossende 5–Ecke bilden daher an einer Ecke einen Winkel von 288^o, drei 5–Ecke einen Winkel von 432^o. Der volle Winkel von 360^o ist damit nicht erreichbar.

Teilt man eine Ebene in beliebige 6–Ecke auf, so kann an einer Ecke wohl ein Winkel kleiner als 120^o vorkommen (z.B. α oder δ). Dafür sind aber zwangsläufig andere Winkel grösser (in der Skizze β und γ).
In einem Polyeder sind bloss zwei an einer Ecke zusammenstossende Flächen unzulässig. Drei oder mehr zusammenstossende Flächen haben in der Ebene eine Winkelsumme von 360^o, im Raum jedoch wegen dem „einknicken“ eine solche Summe von weniger als 360^o. Andernfalls hätte dort das Polyeder keine Ecke.

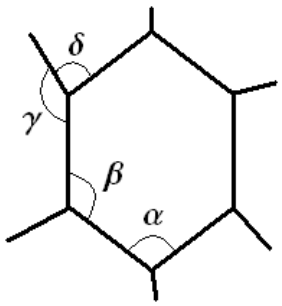


Abb. 214: Winkel beim 6–Eck

Nun besteht die Frage, ob man durch verkleinern der Winkel und vergrössern anderswo in einem n–Eck nicht doch eine Situation erreichen kann, sodass ein unregelmässiges Polyeder aus n-Ecken mit $n \geq 6$ herauskommt.

Es gilt der Satz: Jeder einfache, zusammenhängende, planare Graph besitzt eine Ecke v, für welche gilt: $d(v) \leq 5$. Da in jeder Ecke gleichviele Kanten zusammenkommen, und da wir hier eine reguläre Polyederkugel betrachten, und weil in einer Ecke mindestens drei Kanten zusammenstossen, stehen für die mit einer Ecke inzidierenden Kanten nur noch die Anzahlen 3, 4 und 5 zur Auswahl. Sei m diese Anzahl, so gilt: $|K| = m \cdot |E| \cdot \frac{1}{2}$. Denn jede Kante gehört zu zwei Ecken.
Weiter sei u die Anzahl Kanten einer Fläche. Wir gehen hier nun von der Annahme aus, dass es ein Polyeder gibt, dessen Seitenflächen alle n–Ecke mit $n \geq 6$ sind. Daher muss $u \geq 6$ sein. Da wiederum jede Kante des Polyeders zu zwei Flächen gehört, gilt jetzt: $|K| = u \cdot |F| \cdot \frac{1}{2}$. Somit folgt: $m \cdot |E| = u \cdot |F|$

Setzen wir die nun gewonnenen Beziehungen in den eulerschen Polyedersatz $|E| - |K| + |F| = 2$ ein, so kann man wie folgt schliessen:

$$|E| - |K| + |F| = 2 \;\Rightarrow\; |E| - m \cdot |E| \cdot \frac{1}{2} + \frac{m \cdot |E|}{u} = 2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot u \cdot |E| - u \cdot m \cdot |E| + 2 \cdot m \cdot |E| = 2 \cdot 2 \cdot u = 4 \cdot u.$$

Daher gilt: $|E| \cdot (2 \cdot u - u \cdot m + 2 \cdot m) = 4 \cdot u \;\Rightarrow\; |E| = \frac{Z}{N} = \frac{4 \cdot u}{2 \cdot u - u \cdot m + 2 \cdot m}, \;\; u \geq 6, \;\; m \in \{3, 4, 5\}.$
Der Zähler $Z = 4 \cdot u$, $u \geq 6$, ist hier immer positiv. Wie verhält es sich dagegen mit dem Nenner $N = 2 \cdot u - u \cdot m + 2 \cdot m$?

Wir gehen die drei Fälle $m = 3, 4, 5$ nacheinander durch.

1. Der Fall $m = 3$: Hier ist $N = 2 \cdot u - u \cdot 3 + 2 \cdot 3 = -u + 6, \;\; u \geq 6 \;\Rightarrow\; N \leq 0$. Der Nenner ist also entweder 0, was nicht sein kann, oder er ist negativ, was bei einem positiven Zähler zu einer negativen Eckenanzahl führen würde. Dies wiederum kann auch nicht sein. Der Fall $m = 3$ ist daher ausgeschlossen.

2. Der Fall $m = 4$: Hier ist $N = 2 \cdot u - u \cdot 4 + 2 \cdot 4 = -2 \cdot u + 8, \;\; u \geq 6 \;\Rightarrow\; N \leq -2 \cdot 6 + 8 = -12 + 8 = -4$. Damit wäre hier der Nenner wiederum negativ, während der Zähler positiv ist, was wiederum nicht sein kann. Der Fall $m = 4$ ist daher ausgeschlossen.

3. Der Fall $m = 5$: Hier ist $N = 2 \cdot u - u \cdot 5 + 2 \cdot 5 = -3 \cdot u + 10, \;\; u \geq 6 \;\Rightarrow\; N \leq -3 \cdot 6 + 10 = -18 + 10 = -6$. Damit wäre hier der Nenner ebenfalls wiederum negativ, während der Zähler positiv ist, was nicht sein kann. Der Fall $m = 5$ ist daher ausgeschlossen.

Damit haben wir alle Fälle ausgeschlossen, die bei einer reguläre Polyederkugel mit n–Eck–Seitenflächen für $n \geq 6$ noch geblieben sind. Daher gilt der Satz:

Satz: Reguläre Polyederkugel existieren nur für n–Eck–Seitenflächen mit $n \in \{3, 4, 5\}$. Ihre Anzahl ist jeweils unendlich. Entsprechendes gilt für die äquivalenten planaren und einfachen Graphen.

Die letzte Aussage formulieren wir in etwas anderer Art noch als Korollar:

Korollar:

Vor.:

Gegeben sei ein planarer einfacher Graph, dessen Flächen inklusive der Aussenfläche jede von exakt n Kanten eingeschlossene wird.

Beh.:

$n \in \{3, 4, 5\}$.
Für jedes dieser n ist die Anzahl der möglichen Graphen unendlich.

Kapitel 11

Etwas Harmonielehre, Proportionen, goldener Schnitt

11.1 Etwas Harmonielehre für Architekten

11.1.1 Über Proportionen

Gegenstände des dreidimensionalen Raumes können grundsätzlich bezüglich Längen (Abmessungen), Flächeninhalten (z.B. auch Oberflächeninhalten) und Volumeninhalten proportioniert werden. Rational proportionierte Längen führen dann zu entsprechend rational proportionierten Flächeninhalten und Volumeninhalten, aber nicht umgekehrt! Z.B $L_1 : L_2 = 1 : 2 \Rightarrow A_1 : A_2 = 1 : 2^2$, $V_1 : V_2 = 1 : 2^3$. Jedoch $V_1 : V_2 = 1 : 2 \Rightarrow L_1 : L_2 = 1 : \sqrt[3]{2}$, $A_1 : A_2 = 1 : \sqrt[3]{2^2}$. Die letzteren Verhältnisse sind irrational, die damit gemessenen Strecken also inkommensurabel, während rationale Verhältnisse kommensurable Strecken bedeuten. Kommensurable Strecken sind immer Vielfache eines gemeinsamen Grundmasses. (Dieses wird gegeben durch den Stammbruch mit dem gemeinsamen Nenner der bei den Verhältnissen verwendeten Brüche.)

Interessanterweise klingen auch Töne mit rationalen Frequenzverhältnissen schöner als solche mit nicht rationalen Verhältnissen. Woran mag das liegen? — In den folgenden Abschnitten wollen wir dieser Sache und ihrer physikalischen Bedingungen etwas auf den Grund gehen.

11.1.2 Zur Physik der Töne

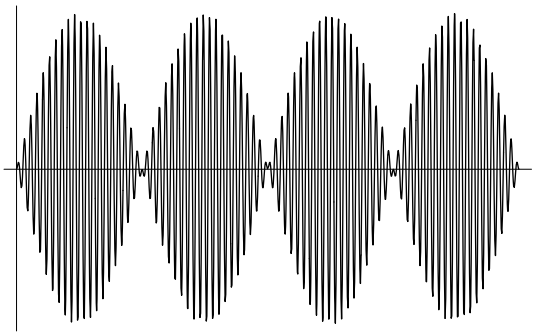
Schall und Töne

Unter **Schallwellen** verstehen wir mechanische Wellen im Frequenzbereich des menschlichen Hörens. Der Mensch vermag Frequenzen zwischen 16 Hz und 20'000 bis 30'000 Hz wahrzunehmen (1 Hertz oder Hz ist eine Schwingung pro Sekunde). Bei Höheren Frequenzen spricht man von **Ultraschall**, bei tieferen von **Infraschall**. Schallwellen sind den üblichen Wellengesetzen unterworfen (wie Reflexions- und Brechungsgesetz, Gesetze der Interferenz, der Beugung, des Dopplereffekts, der Resonanz). Zur übertragung zum Ohr sind schallleitende Körper notwendig, z.B. Luft oder ein Resonanzkörper.

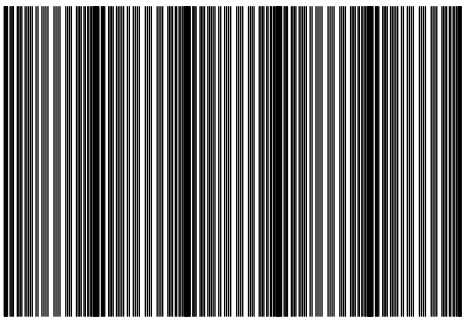
Regelmässige Schwingungen bezeichnen wir als **Töne**, unregelmässige als **Geräusche** oder **Knalle** oder **Gleitsequenzen**. Mehrere Töne ergeben **Klänge**. Bei uns im Westen besteht die traditionelle **Musik** mindestens, wie berichtet wird, seit Pythagoras aus Tönen, Klängen und deren Sequenzen. Verstehbar zurückverfolgen lässt sich unsere Musik allerdings nur bis in die Gregorianik (Gregor der Grosse, Frühmittelalter).

Schallgesetze, Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls

Schallwellen können je nach Situation auftreten als **Transversalwellen**, die quer zur Ausbreitungsrichtung schwingen, oder auch als **Longitudinalwellen**, die parallel zur Ausbreitungsrichtung schwingen.



Transversalwelle



Longitudinalwelle

Nachstehend eine Übersicht bezüglich diversen Medien:

1. Sei c = Schallgeschwindigkeit, λ = Wellenlänge, ν = Frequenz, T = Schwingungsdauer einer Schwingung. Dann gilt für alle Wellen:

$$c = \nu \cdot \lambda = \frac{\lambda}{T}$$

2. Querwellen (Transversalwellen) kommen nur in Saiten (Drähte, Sehnen, ...) vor. Sei σ = Spannung (Kraft pro Flächeneinheit) und ϱ = Dichte (Masse pro Volumen). Dann gilt:

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}$$

   In Saiten hängt die Schallgeschwindigkeit daher von der Spannung ab. Da die Wellenlänge durch die Saitenlänge gegeben ist (vgl Bild unten), so hängt damit die Frequenz auch von der Spannung ab (Stimmen der Geige, Gitarre u.s.w.!).

3. Sei α = Dehnungsgrösse (abhängig vom Aggregatszustand). Dann haben Längswellen (Longitudinalwellen) in einem elastischen Körper die Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\alpha \cdot \varrho}}$$

   Je nach Aggregatszustand gilt:

   (a) In Stäben (festen Körpern) ist $\alpha = \frac{1}{E}$, E = Elastizitätsmodul. $\rightsquigarrow$ $c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$.
   In Stäben hängt die Schallgeschwindigkeit daher vom Elasitzitätsmodul ab.

   (b) In Flüssigkeiten ist $\alpha = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}$, p = Druck. $\rightsquigarrow$ $c = \sqrt{\frac{V}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dV}}$.
   In Flüssigkeiten hängt die Schallgeschwindigkeit daher von der Druckänderung pro Volumen ab.

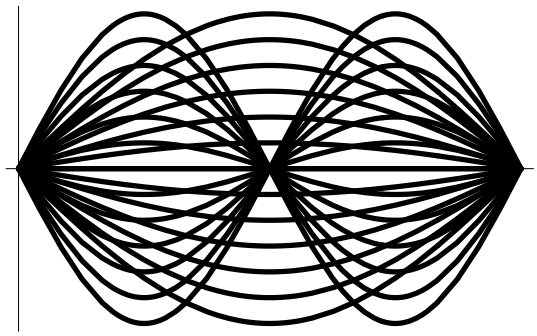
   (c) In Gasen ist $\alpha = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} = \frac{1}{\kappa \cdot p}$ mit $\kappa = \frac{c_p}{c_V}$. $\rightsquigarrow$ $c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\varrho}}$.
   Wenn R die Gaskonstante, ϑ die Temperatur und m die Gasmasse bedeuten, so kann man mit Hilfe der Gasgleichung umformen: $c = \sqrt{\kappa \frac{R}{m} \cdot \vartheta}$.

Die Schallgeschwindigkeit in Gasen ist daher temperaturabhängig.
Bei Normalbedingungen ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls in der Luft ca. 333 m/s. $\rightsquigarrow$ $c = \nu \cdot \lambda = const.$ (Luft im Labor, fixer Ort auf der Erde).

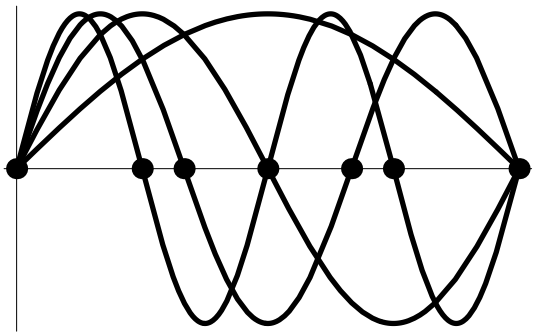
11.1.3 Mit Saiten, Pfeifen oder Rohren erzeugte Töne

Bedingungen an der Saite

Eine homogene schwingende Saite hat von ihren Freiheiten her an den Enden nur die Möglichkeit, einen **Knoten** zu bilden. (Im Knoten findet keine Bewegung statt.) eine Saite kann also so schwingen, dass in der Mitte ain Bauch entsteht (**Grundschwingung**). Aus Symmetriegründen kann dann die Saite noch so schwingen, dass sich genau in der Mitte ein Knoten bildet, total vier Knoten in gleichen Abständen also. Es besteht aber auch die Freiheit, dass sich fünf, sechs, sieben u.s.w. Knoten in gleichen Abständen bilden können u.s.w. (**Oberschwingungen**) — aber nie $\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}$ oder π Knoten. Denn die Knotenanzahl ist eine natürliche Zahl.
Eine Saite schwingt bezüglich Auslenkung (Weg) sinusförmig. Auch zeitlich gesehen schwingt sie aus Gründen der Zusammenhänge zwischen Auslenkung, Spannung, rücktreibender Kraft und daher Beschleunigung ungefähr harmonisch (auch sinus– oder cosinusförmig). Die möglichen Wellenlängen stehen wegen den Knotenpositionen in **rationalen Zahlenverhältnissen**. Damit ergeben sich bei konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit infolge von $c = \lambda \cdot \nu$ auch für die möglichen Frequenzen ν rationale Zahlenverhältnisse. (Bei einem Musikinstrument mit Saiten wird die schwingung meist durch einen Resonanzkörper verstärkt und gefällig im Raum ausgebreitet.)

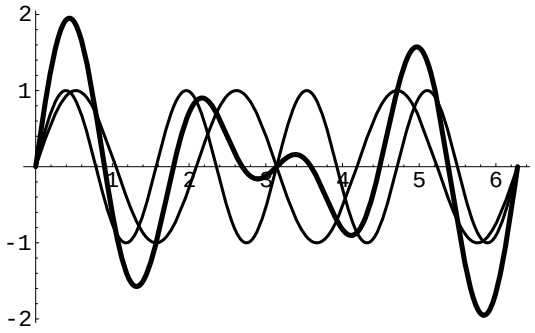


Saitenschwinung, zwei Arten

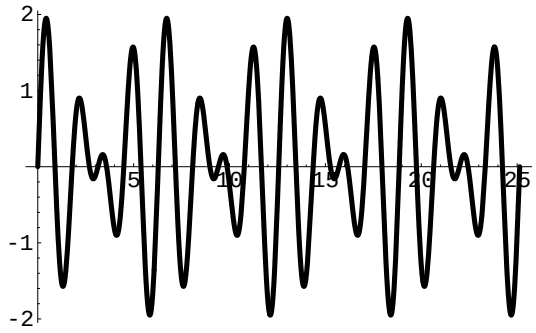


Knoten auf x–Achse

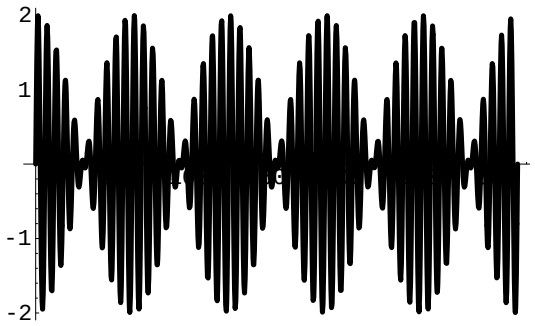
Rationale Zahlen können immer durch Brüche mit gleichem Nenner wiedergegeben werden. Sie sind also immer Vielfache einer gemeinsamen Einheit, was bei nicht–rationalen Zahlen nie der Fall sein kann.
Schwingen veschiedene Körper mit Frequenzen in rationalen Zahlenverhältnissen (z.B. $\nu_1 : \nu_2 = 3 : 4$), senden sie Wellen aus, die sich in periodisch im selben Muster verstärken (bei gleicher Schwingungsrichtung) oder abschwächen (entgegengesetzte Schwingungsrichtung). Es entsteht ein sich wiederholendes, gefälliges und durch die Konstanz der Wiederholung vertrautes, freundliches Muster. Ganz anders ist es bei nichtrationalen Frequenzverhältnissen (z.B. $\nu_1 : \nu_2 = \sqrt{2} : 4$ oder $1 : \pi$), wo durch die Nichtexistenz einer kleinsten gemeinsamen Einheit keine gemeinsame Periodizität entstehen kann (vgl. Bilder unten).



Addition von Schwingungen

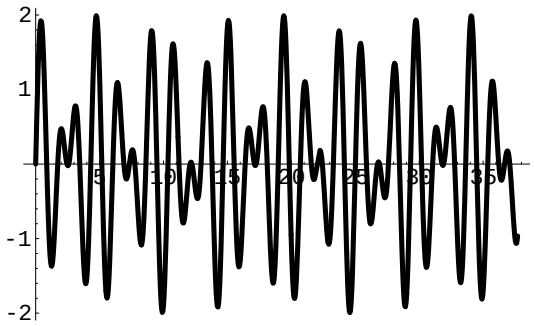


Mögliches Schwingungsbild

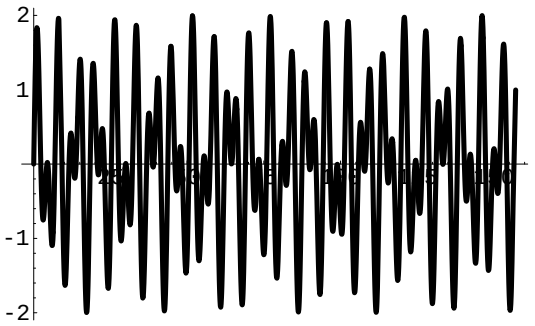


Mögliches Schwingungsbild

Mögliches Schwingungsbild



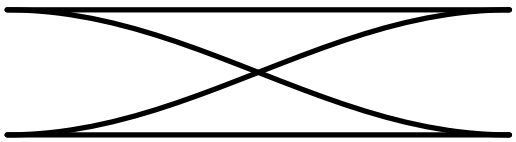
Rationale Frequensverhältnisse



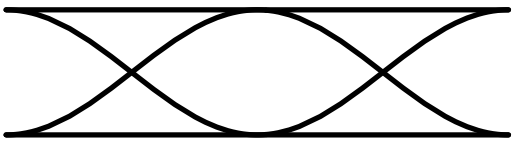
Irrationale Frequensverhältnisse

Bedingungen an der Pfeife oder am Rohr

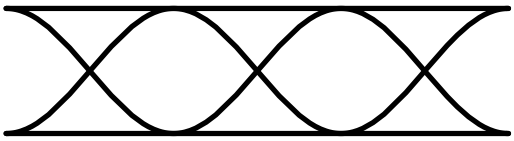
An einem einseitig oder beidseitig offenen Rohr sind die Bedingungen so, dass sich an der Öffnung nach aussen nur ein Bauch und an einem Deckel aus festem Material nur ein Knoten bilden kann. Daher stehen die Wellenlängen zur Rohrlänge wieder in rationalen Zahlenverhältnissen, was damit wegen $c = const. = \nu \cdot \lambda$ auch für die Frequenzen ν gilt. Die folgenden Bilder sprechen für sich:



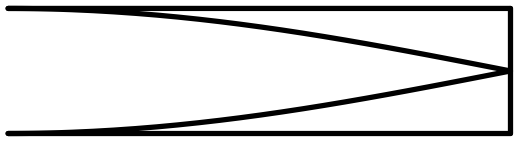
Beidseitig offenes Rohr, Grundschwingung



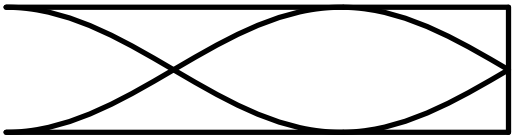
Beidseitig offenes Rohr, 1. Oberschwinung



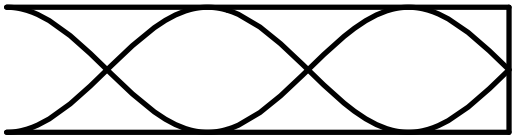
Beidseitig offenes Rohr, 2. Oberschwinung



Einseitig offenes Rohr, Grundschwingung



Einseitig offenes Rohr, 1. Oberschwinung



Einseitig offenes Rohr, 2. Oberschwinung

11.1.4 Steingewordene Musik

Goethe nannte das strassburger Münster „steingewordene Musik“ — so gross muss auf ihn die zur Meisterschaft gebrachte Proportionierung der Bauelemente in ihrem Zusammenspiel, ihrer Erhabenheit und ihrer Einzigkeit gewirkt haben. Denn die Musik bei uns im Westen lebt ja bekanntlich von den „die Sinne erquickenden“ oder auch „die Sinne betäubenden“ Proportionen von zeitlichen Abfolgen und Tonhöhen. Dazu gibt es also Parallelen an Bauwerken, die als Kunstwerke eingestuft werden dürfen, Kunst so wie die Musik. Jedenfalls gilt das von den Höhen unserer Kultur aus gesehen unbestritten für die klassische Musik des Abendlandes.

Dabei ist das Wesen der Musik einerseits ein zeitliches, in den **Rhythmen**, der **Rhythmik** und ihrem Verhältnis zur **Metrik**, zu den **Takten** also — oder zu den **Tonlängen**, der **Betonung** — und auch dem **Tempo**. Dieses zeitliche Geschehen, das einen geordneten Verlauf der Musik garantiert, ihre Organisation und dadurch unsere Sicherheit, bietet aber nicht annähernd die Variationsmöglichkeiten des andern Wesens der Musik, dem der **Tonhöhen** und **Klänge**, des zusammen Klingens also, das quasi auf dem Zeitlichen so daherreitet, ihm somit aufgepfropft ist. Rhythmik, Metrik u.s.w. folgen in der Tradition wieder weitgehend einfachen rationalen Zahlenverhältnissen. Wer kennt sich nicht aus in der Metrik, dem Zweiachteltakt, Zweivierteltakt, dem Dreivierteltakt (Walzer), dem Viervierteltakt (Marschmusik), dem Vierachteltakt, dem Sechsachteltakt, dem Zweizweiteltakt, dem Vierzweiteltakt? — Er dürfte sich ja nicht auf das Tanzparkett wagen... Weiter kennt man den Gebrauch von $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{18}{16}$, u.s.w..

Die **Takte** sind die kleinsten höheren Einheiten, in denen die elementaren Zählzeiteneinheiten durch eine Betonung organisiert sind. Unter **Metrik** wird dagegen oft die Lehre von den **Takten** verstanden. Dagegen ist die **Rhythmik** die Lehre vom **Rhythmus**, d. h. von der unterschiedlichen Bedeutung der Dauer der Töne innerhalb der metrischen Einheiten. Rhythmus im Sinne der Musik hat vieles gemeinsam mit Rhythmus in der Poesie, wo man eine grosse Anzahl von verschiedenen Versmassen benützt. Die Versmasse der Poesie werden in diversen Abwandlungen oder Modifikationen der Grundformen auch in der Musik verwendet. Historisch gesehen haben sich diese Dinge in ihren Epochen entwickelt oder ihre Wertung durch die kulturtragenden Schichten hat sich gewandelt.
Der Eifachheit halber stellen wir hier kurz metrieche Grundmuster der Poesie vor (Versfüsse). Auf diesen Formen bauen dann die bekannten Versmasse wie Hexameter, Pentameter und Alexandriner auf. Dabei bedeutet „$\cup$“ beim Sprechen „kurz“und „$\smile$“ bedeutet „lang“.

„Steigend“		„Fallend“	
Jambus	∪ ⏜	Trochäus	⏜ ∪
Anapäst	∪∪ ⏜	Daktylus	⏜ ∪∪
Anapäst et		Adonion	⏜ ∪∪ ⏜ ∪
Jonicus a minore	∪∪ ⏜ ∪∪ ⏜ ⏜	Chorjambus	⏜ ∪∪ ⏜
Anakreonteion	∪∪ ⏜ ∪ ⏜ ∪ ⏜ ⏜		
Amphibacchis	∪ ⏜ ∪	Creticus (Kretikus)	⏜ ∪ ⏜
Palimbacchis	∪ ⏜ ⏜	Bacchus (Bacchius)	⏜ ⏜ ∪
Antipast	∪ ⏜ ⏜ ∪		
Jonicus a minore	∪∪ ⏜ ⏜ ∪	Jonicus a majore	⏜ ⏜ ∪∪
Epitrit I	∪ ⏜ ⏜ ⏜	Phäon I	⏜ ∪ ∪ ∪
Epitrit II	⏜ ∪ ⏜ ⏜	Phäon II	∪ ⏜ ∪∪
Epitrit III	⏜ ⏜ ∪ ⏜	Phäon III	∪∪ ⏜ ∪
Epitrit IV	⏜ ⏜ ⏜ ∪	Phäon IV	∪ ∪ ∪ ⏜
Spondeus	⏜ ⏜	Tribrachys	∪ ∪ ∪
Molossus	⏜ ⏜ ⏜	Proceleusmaticus	∪ ∪ ∪∪
...	...	...	...

Dazu gibt es noch Wechselrhythmen.

⇝ Wie wäre es mit einer „anakreontischen“ Fassade an einem öffentlichen Gebäude?

Bemerkung: Für ein tieferes Eindringen in das Gebiet der Rhythmik und der Metrik fehlt hier der notwendige Raum. Es ist daher Sache eines Vertiefungsstudiums (Rhythmik, Muskiwissenschaft u.s.w.).

Um als „musikalischer Informationsträger“ Gefallen zu finden bedarf „akustisches Material“ der Selektion und ordnender Leitplanken.

11.1.5 Tonintervalle, Tonleitern, Klänge

Der Musikkosmos

Um als „musikalischer Informationsträger“ Gefallen zu finden bedarf „akustisches Material“ der Selektion und ordnender Leitlinien. Je nach Epoche oder Kulturraum haben sich unterschiedliche Tonsysteme etabliert. Unsere abendländische Tradition führen wir auf **Pythagoras** zurück. Wir arbeiten in diesem Sinne mit **Tonleitern** zu **zwölf** (resp. vierundzwanzig[28]) **Halbtonschritten**, dreizehn Töne jeweils zusammen mit dem Endton (dem „Musik–Kosmos“), aus denen wir für eine **Tonleiter** (Oktave) **sieben** Intervalle oder **Tonschritte** („die Schöpfung“) auswählen (Töne acht mit dem Endton). Eine solche Wahl besteht aus **fünf Ganztonschritten** („der Mensch“) und **zwei Halbtonschritten** („die Polarität“), je im Abstand von zwei oder drei Ganztonschritten. Wir reden von **Heptatonik** oder auch **Diatonik**. In der **Pentatonik** dagegen gehen wir von fünf Ganz- und Anderthalbtonschritten aus. (Viele Kinderlieder sind pentatonisch — daher sind sie einfacher).
Dazu kennen wir heute noch zwölf **Tongeschlechter** (die **Kirchentonarten**). Ursprünglich im Mittelalter waren es nach vermutlich griechischem Vorbild (und vermutlich auch Missverständnissen) **vier Haupttonarten** (dorisch, lydisch, phrygisch und mixolydisch) mit den **Nebentonarten** (hypodorisch, hypolydisch, hypophrygisch und hypomixolydisch). Später (bekannt im 16. Jhdt.) kamen noch die Haupttonarten jonisch (dur) und äolisch (moll) dazu (mit den Nebentonarten hypojonisch und hypoäolisch). Eine siebte Tonart, das Lokrische, ist wieder in Vergessenheit geraten. Man kann daher — so man so will – von vier, fünf, sechs, sieben, zwölf — oder auch **dreizehn** wichtigen Tonarten ausgehen.
Bemerkung: Die Kirchentonarten sind geprägt durch die einstimmige Melodik des **Chorals**. D.h. durch

[28] Zur Erzeugung aller Schlusstöne aller ersten dur– oder moll–Tonleitern

den **Ambitus** (Umfang), dem Schluss- oder Grundton (**Finalis**), den Rezitationston (**Tenor, Tuba**, meist eine Quinte über der Finalis) und den charakteristischen **Initial**-, **Kadenz**- und **Melodieformeln**.

Die bestimmenden Parameter eines Tonsystems sind die **Tonhöhe** (Frequenz), die **Dauer** (Zeit), die **Stärke** (Intensität, Leistung) und die **Farbe** (charakteristische Vermischung mit Obertönen). Im Weiteren wollen wir uns vor allem mit der Tonhöhe beschäftigen. Die Dauer (und auch die Betonung, also die Stärke) kam im Zusammenhang mit Rhythmik und Metrik zur Sprache. Die Intensität ist heute (vermutlich wieder einmal...) Gegenstand des Generationenkonflikts. Überlassen wir es den Besserwissern. Die Farbe gehört zu den Instrumenten. Dafür reicht hier der Platz nicht.

Zu erwähnen sind noch die chromatischen Tonleitern, die durch Teilung der fünf Ganztonschritte in je zwei Halbtonschritte entstehen. (Sie werden mit Hilfe der diatonischen Nachbartöne mittels Kreuze (♯) bei einer Erhöhung oder mittels dem „be“ (♭) bei der Erniedrigung geschrieben, ♮ ist das Auflösungszeichen.) Eine Folge von zwölf Halbtönen heisst **chromatische Tonleiter**.
Daneben gibt es noch die **Ganztonleiter** mit sechs Ganztonschritten und die **temperierte Stimmung**, wo auf die rationalen Frequenzverhältnisse und damit den reinen Hörgenuss zu Gunsten von andern, technischen Vorteilen verzichtet wird. (Transponierbarkeit ohne neues Stimmen der Instrumente u.s.w..)

Die Oktave mit den zwölf Halbtönen nennen wir auch die **Materialtonleiter** (unser Tonmaterial). Dieses System ist, wie wir von der Bedeutung der Zahlen her wissen, aus dem kulturellen Urgrund des Abendlandes erwachsen. Abgesehen von der Bedingtheit durch das kulturelle Umfeld hat es aber eher einen zufälligen Charakter. Daher ist es nicht erstaunlich, dass sich z.b. in Indien ein Tonsystem mit 22 **Srutis** etabliert hat. 22 ist ja zwei mal die „babylonische Elf“, die ursprünliche Tierkreiszahl — an deren Stelle wir unserere zwölf setzen.

Unser Hörsinn

Die vom Menschen mit dem Ohr empfundene Tonhöhe hängt wie folgt von der Frequenz ab: Je höher die Frequenz, desto höher der Ton. Das Ohr empfindet aber „logarithmisch“: Wir nehmen die Tonhöhe so wahr wie den Logarithmus der Frequenz, (Tonhöhe) $\sim \log_a(\nu)$.
Bekanntlich hören nicht alle hörenden Lebewesen im selben Frequenzbereich. Z.B. Elephanten können tiefere Töne wahrnehmen, z.B. Insekten oder z.B. Marder (Marderschutz am Auto) höhere Töne. Weiter ist das Ohr ein „Fourieranalysator“, im Gegensatz zum Auge. Das Ohr vermag aus einem Geräuschvorhang einzelne Töne herauszufiltern und z.B. die Stimme eines Angehörigen wahrzunehmen. Man hört aus dem Orchester die Flöte, die Geige — oder das Cello, je nachdem worauf man seine Aufmerksamkeit richtet. Mit den Farben eines Bildes ist so etwas nicht möglich. Die Übersetzung von der Hörsituation der Musik auf die Sehsituation der Architektur hat daher auch einen etwas problematischen Aspekt.

Pythagoräische Tonleitern

Bei der reinen Stimmung (rationale Frequenzverhältnisse) kennen wir nach dem dafür gehaltenen „pythagoräischen System“ (Diatonik) **grosse** und **kleine Ganz**– und **Halbtonschritte**. Hier die Übersicht der Frequenzverhältnisse (welche sich reziprok zu den Wellenlängen verhalten):

Grosser Ganztonschritt	kleiner Ganztonschritt	grosser Halbtonschritt	kleiner Halbtonschritt
9 : 8	10:9	16:15	25:24
9 : 8	10:9	16:15	25:24

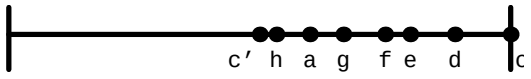
In einer Tonleiter, man denke z.B. an die c–dur, können auch Halbtöne verwendet werden. Verwendet man 12 Halbtonschritte, so reden wir von der **chromatischen Tonleiter**. Bei der reinen Stimmung ist es nun so, dass ein Halbtonschritt nach oben nicht unbedingt einem Halbtonschritt nach unten vom

nächsthöheren Ton entsprechen muss.
Wir gehen z.b. vom f aus einen Halbtonschritt nach oben und betrachten z.B. den Ton fis. Dazu gehen wir vom g aus einen Halbtonschritt nach unten und betrachten den Ton ges. Bei einem grossen Halbtonschritt nach oben gelangen wir zu $fis_g : c = \frac{fis_g}{c} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{64}{45} = 64 : 45$. Bei einem kleinen Halbtonschritt nach oben gelangen wir zu $fis_k : c = \frac{fis_k}{c} = \frac{3}{4} \cdot \frac{25}{24} = \frac{25}{18} = 25 : 18$. Kommen wir dagegen von oben, so wird beim grossen Halbtonschritt $ges_g : c = \frac{ges_g}{c} = \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{16} = \frac{45}{32} = 45 : 32$. Beim kleinen Halbtonschritt gibt es $ges_k : c = \frac{ges_k}{c} = \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{36}{25} = 36 : 25$. Konsequenz: fis kann also in keinem Fall gleich ges sein.

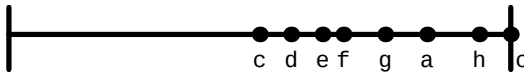
Hinweis: Interessant ist, dass die Schritte so eingerichtet sind, dass das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner (8, 9, 15, 24) gerade 360 ist, also die Zahl der Tage zwischen dem Sonnen– und dem Mondjahr. Man kann also die Tonschritte alle mit gemeinsamem Nenner in Dreihundertsechzigstel angeben.
Weiter gibt eine Folge von einem grossen und einem kleinen Halbtonschritt einen kleinen Ganztonschritt $(\frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} = \frac{10}{9})$

Geht man aber z.B. immer nur kleine Halbtonschritte weiter, so gelangt man zu immer neuen rationalen Zahlen. In n Schritten entsteht so ein Verhältnis $(\frac{25}{24})^n = \frac{25^n}{24^n}$. Bei $n = 10$ ergibt das $\frac{95367431640625}{63403380965376}$.

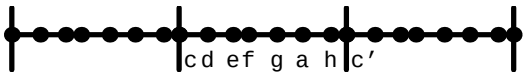
Trägt man die Tonschritte der Diatonik vom c weg in einer Graphik unverfälscht auf, so ergibt das das folgende Bild:



Wellenlängenverhältnisse d. Tonschritte



Frequenzverhältnisse d. Tonschritte



Frequenzverh., Skala logarithmisch

Eine Tonleiter (Oktave) besteht aus Tönen, die wie folgt benannt werden:

c, d, e, f, g, a, h, c' oder
do, re, si, fa, so, la, si, do'

Schreibt man mehrere Oktaven von unten nach oben (von den tieferen zu den höheren Tönen), so sieht das wie folgt aus:

$\ldots,\ {}_2f,\ {}_2g,\ {}_2a,\ {}_2h,\ {}_2c,\ {}_2c,\ {}_2d,\ {}_2e,\ {}_1f,\ {}_1g,\ {}_1a,\ {}_1h,\ {}_1c,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ a,\ h,$
$c^1,\ d^1,\ e^1,\ f^1,\ g^1,\ a^1,\ h^1,\ c^2,\ d^2,\ e^2,\ \ldots$ oder auch
$\ldots,\ \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{C}},\ \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{D}},\ \ldots, \underline{\underline{h}} = \underline{\underline{H}},\ \underline{c} = C,\ \ldots, \underline{h} = H,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ a,\ h,\ \overline{c},\ \ldots, \overline{h},\ \overline{\overline{c}},\ \overline{\overline{d}},\ \ldots$

Geht man dann z.B. von c aus einen Halbtonschritt höher, so heisst der entstehende neue Ton cis. Geht man von einen d aus einen Halbtonschritt tiefer, so heisst der entstehende neue Ton des. Nach dieser Kompositionsregel werden auch die andern Namen gebildet $\rightsquigarrow$ $dis,\ fis,\ gis,\ \ldots,\ es,\ ges \ldots$

Bemerkung zur Normierung der Frequenzen: Unsere Tonleitern werden am **Kammerton** $\overline{a}$ normiert. Die nebenstehende Tabelle gibt Aufschluss über die Schwankungen während den Vergangenen Jahrhunderten:

1788	Pariser Stimmung	409 Hz
?	Ältere Mozartstimmung	421 Hz
1850	Wiener Stimmung	442 Hz
1858	Pariser Kommission	435 Hz
1885	Stimmtonkonferenz	435 Hz
1935	Internationale Vereinbarung	440 Hz

Intervalle

Nebenan: Übersicht über die Intervalle (Verhältnisse der Frequenzen der Töne in einer Tonleiter zur Frequenz des Grundtons):

Wenn solche Töne miteinander gespielt werden, entstehen **Klänge**. Spielt man sie nacheinander, so entsteht eine **Melodie**.

Prime	rein	1 : 1
Sekunde	klein	16 : 15
”	gross	9 : 8
Terz	klein	6 : 5
”	gross	5 : 4
Quarte	rein	4 : 3
Quinte	rein	3 : 2
Sexte	klein	8 : 5
”	gross	5 : 3
Septime	klein	9 : 5
(Septe)	gross	15 : 8
Oktave	rein	2 : 1

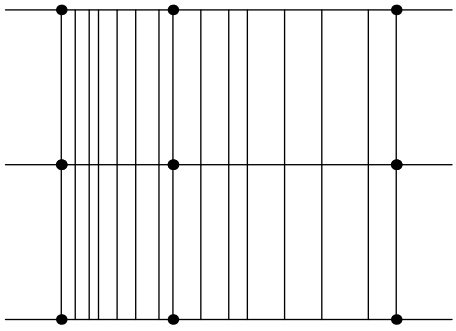
Die relativen Frequenzverhältnisse der reinen diatonischen Dur–Tonleiter (jonisch) sind nun:

$c : c = 1 : 1$	reine Prime	$c : c = 1 : 1$	kein Tonschritt
$d : c = 9 : 8$	grosse Sekunde	$d : c = 9 : 8$	grosser Ganztonschritt
$e : c = 5 : 4$	grosse Terz	$e : d = 10 : 9$	kleiner Ganztonschritt
$f : c = 4 : 3$	reine Quarte	$f : e = 16 : 15$	grosser Halbtonschritt
$g : c = 3 : 2$	reine Quinte	$g : f = 9 : 8$	grosser Ganztonschritt
$a : c = 5 : 3$	grosse Sexte	$a : g = 10 : 9$	kleiner Ganztonschritt
$h : c = 15 : 8$	grosse Septime	$h : a = 9 : 8$	grosser Ganztonschritt
$\overline{c} : c = 2 : 1$	reine Oktave	$\overline{c} : h = 16 : 15$	grosser Halbtonschritt

Die relativen Frequenzverhältnisse der reinen diatonischen Moll–Tonleiter (äolisch) sind nun:

$c : c = 1 : 1$	reine Prime	$c : c = 1 : 1$	kein Tonschritt
$d : c = 9 : 8$	grosse Sekunde	$d : c = 9 : 8$	grosser Ganztonschritt
$es : c = 6 : 5$	kleine Terz	$es : d = 16 : 5$	grosser Halbtonschritt
$f : c = 4 : 3$	reine Quarte	$f : es = 10 : 9$	kleiner Ganztonschritt
$g : c = 3 : 2$	reine Quinte	$g : f = 9 : 8$	grosser Ganztonschritt
$as : c = 8 : 5$	kleine Sexte	$as : g = 16 : 15$	grosser Halbtonschritt
$b : c = 9 : 5$	kleine Septime	$b : as = 9 : 8$	grosser Ganztonschritt
$\overline{c} : c = 2 : 1$	reine Oktave	$\overline{c} : b = 10 : 9$	kleiner Ganztonschritt

Trägt man die Tonverhältnisszahlen horizontal auf, so verdoppeln sich die absoluten Abstände von Oktave zu Oktave. Denn Verhältnisse geben relative, auf die jeweils betrachteten beiden Frequenzen bezogene und nicht absolute, auf eine Grundfrequenz bezogenen Abstände. Das Bild wird daher etwas unanschaulich.

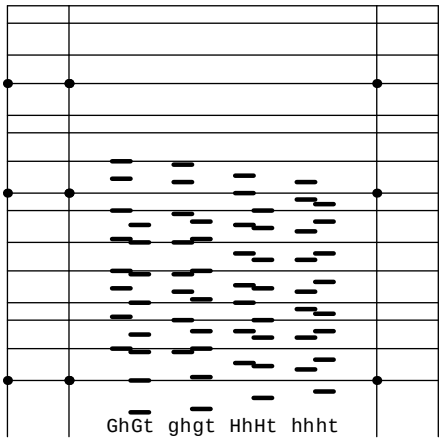


Wir tragen daher in den folgenden Skizzen die logarithmischen Werte der Verhältnisse jetzt neu vertikal auf. Die Oktaven sind bei dieser Darstellung alle gleich lang. Weiter sind mit kurzen Strichen links die grossen Ganztonschritte nach oben und rechts daneben nach unten aufgetragen. Weiter rechts daneben sind dann die kleinen Ganztonschritte (linksseitig nach oben und rechtsseitig nach unten) dargestellt. Dann folgen genau so die grossen Halbtonschritte nach oben und nach unten. Und anschliessend dann die kleinen Halbtonachritte nach oben und nach unten.
Wir können an den Skizzen ablesen, dass die Frequenzen von Tonleitern, welche mit verschiedenen Grundtönen beginnen, in den meisten Fällen nicht zur Deckung kommen. Will man also dann ein Musickstück statt in c–dur neu un f–dur spielen, das Stück also **transponieren**, so müssen dazu die Instrumente neu auf andere Frequenzen gestimmt werden!

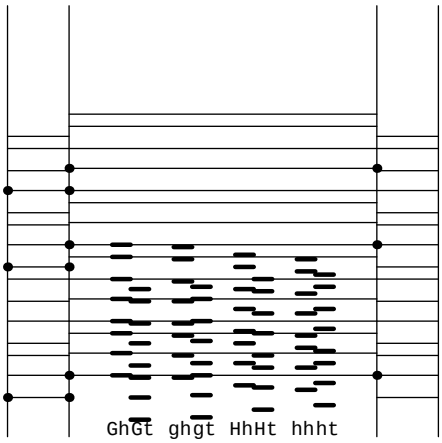
Bemerkung: In den Skizzen ist links und rechts aussen jeweils z.B. die c–dur aufgeführt. In der Mitte sind dazu in aufsteigender Reihenfolge erst die c–Dur mit den erwähnten Ganz- und Halbtönen, dann die d–Dur mit den erwähnten Ganz- und Halbtönen, dann die e–Dur u.s.w. gezeigt.

In den nachfolgenden Skizzen werden die folgende Zeichen mit den angegebenen Bedeutungen verwendet:

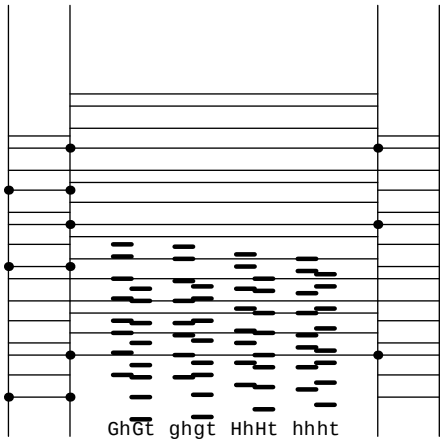
„Gh“:	Grosser Ganztonschritt hoch (nach oben)	„Hh“:	Grosser Halbtonschritt hoch (nach oben)
„Gt“:	Grosser Ganztonschritt tief (nach unten)	„Ht“:	Grosser Halbtonschritt tief (nach unten)
„gh“:	Kleiner Ganztonschritt hoch	„hh“:	Kleiner Halbtonschritt hoch
„gt“:	Kleiner Ganztonschritt tief	„ht“:	Kleiner Halbtonschritt tief



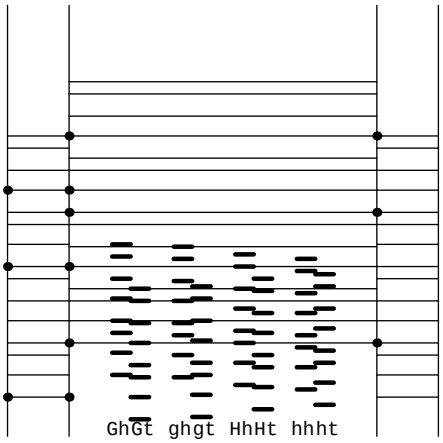
c–Dur



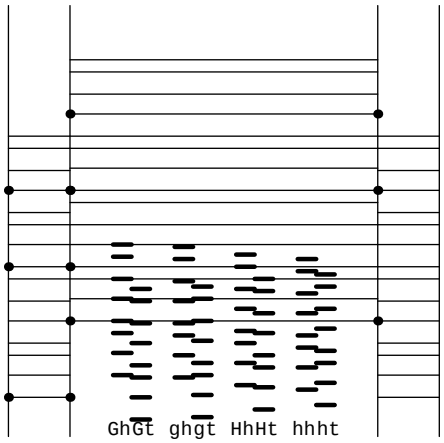
d–Dur



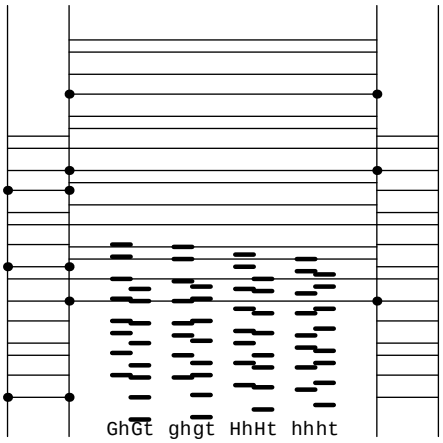
e–Dur



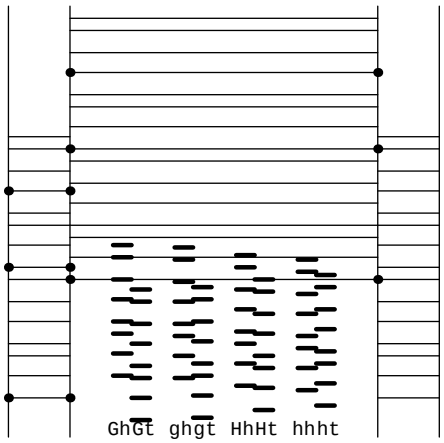
f–Dur



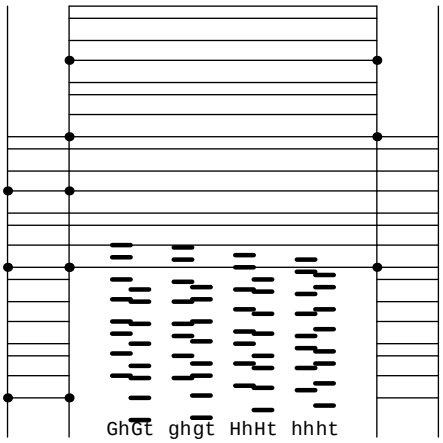
g–Dur



a–Dur



h–Dur



c–Dur

Wie man aus den Diagrammen sieht, müssen beim Transponieren die Innstrumente neu gestimmt werden. Z.B. die Töne der d–dur fallen nicht mit den Tönen der c–dur zusammen. Die Abweichung kann in verschiedenen Fällen verschieden gross sein. Innerhalb einer Oktave entstehen aus den 7 Haupttönen

durch die Verschiebung des Grundtons von c auf $d,\ e,\ f,\ g,\ a,\ h$ dann neue Töne, die nicht alle auf die Töne der c–dur–Tonleiter fallen. Geht man z.B. vom d aus einen kleinen Ganztonschritt nach unten, so entsteht ein Ton d_{gt}, dessen Frequenz sich zu der Frequenz von d verhält wie $9 : 10$. Die Frequenz von d verhält sich zu der von c wie $9 : 8$. Dann gilt für die Frequenzen:

$$d_{gt} : c = \frac{d_{gt}}{c} = \frac{d_{gt} \cdot d}{c \cdot d} = \frac{d_{ht}}{d} \cdot \frac{d}{c} = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{80} = 81 : 80$$

Erhöht man also von c aus die Frequenzen so, dass für den entstehenden Ton d_{gt} ein Verhältnis $d_{gt} : c = 81 : 80$ entsteht, so gelangt man zu einem Ton, der in der gegebene Tonleiter bisher nicht vorhanden war. Interessant ist, dass man mit den je 7 ersten dur– und moll-Tonleitern nicht mehr Töne neu erzeugen kann als mit den grossen und kleinen Halb- und Ganztonschritten von der c–dur aus. Jedoch umgekehrt kann man mit solchen Halb- und Ganztonschritten z.B. die Verhältnisse

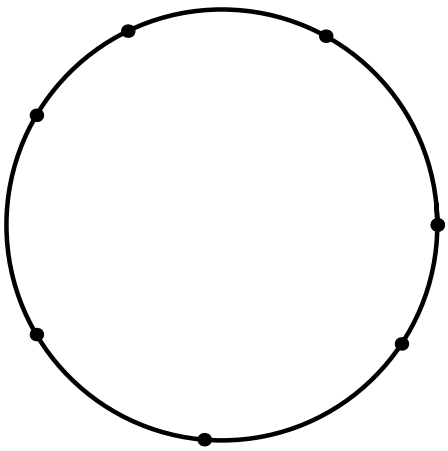
$$27 : 25,\ \ 32 : 27,\ \ 32 : 25,\ \ 125 : 96,\ \ 64 : 45,\ \ 36 : 25,\ \ 40 : 27,\ \ 125 : 72,\ \ 50 : 27,\ \ 48 : 25,\ \ 125 : 64$$

erzeugen, die in den ersten dur– und moll-Tonleitern nicht vorhanden sind. Geht man z.B. vom d aus einen kleinen Halbtonschritt nach oben zu e_{hh}, so gilt:

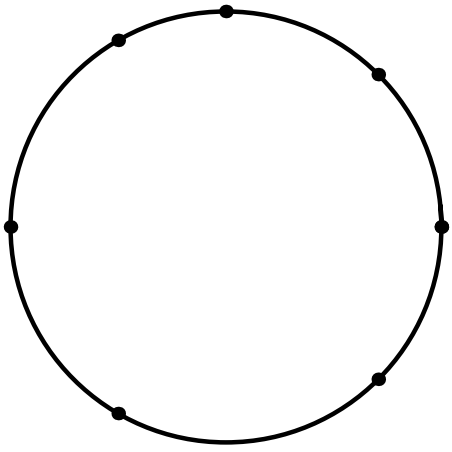
$$e_{hh} : c = \frac{e_{hh}}{c} = \frac{d}{c} \cdot hh = \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{27}{25} = 27 : 25$$

Dieses Verhältnis findet man nicht in einer sofort mit dem Computer erzeugten Tabelle der Frequenzverhältnisse von dur und moll.
Also fallen die durch grosse und kleine Halbtonschritte von den gegebenen Tönen einer Tonleiter aus nach oben und unten erzeugten Töne nicht wieder alle mit den schon vorhandenen Tönen der Tonleiter zusammen. Aus den 7 Tönen von c bis h entstehen dann bei dieser Erzeugungsart 35 teils neue Töne. Bei den Verschiebungen der Tonleitern (dur und moll) entstehen nur 24 Töne. Total möglich wären so 64 Töne wenn nie ein alter auf einen neuen Ton fallen würde. Verfährt man mit diesen 35 wieder so, d.h. erzeugt man von diesen neuen Ausgangstönen mit Hilfe der grossen und kleinen Halb- und Ganztonschritte wieder neue Töne, so entstehen in dieser zweiten Vermehrung 83 von 512 möglichen, dann 151 von 4096 möglichen, dann 239 von 32768 möglichen, dann 347 von 262144 möglichen, dann 475 von 2097152 möglichen und so fort.

Nachstehend sind Diagramme gezeigt, die die Tonabstände der dur-Tonleiter in Winkeln zeigen.



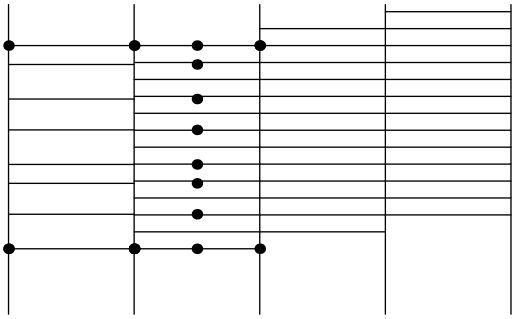
Dur–Geschlecht auf Kreis, logarithmisch



Dur–Geschlecht auf Kreis, gewöhnlich

Temperierte Stimmung

Vermutlich auch um im Orchester nicht dauernd Instrumente umstimmen zu müssen (man denke z.B. ans Klavier!) schlug Werkmeister um 1695 eine Stimmung vor, bei der die Tonintervalle der Ganz– und auch der Halbtöne in einer Tonleiter immer die selben Frequenzverhältnisse aufweisen: **Die „wohltemperierte Stimung“**. Die Konstruktion ist trivial.
Sind für die Töne X_1, X_2, X_3 mit den Frequenzen x_1, x_2, x_3 die Frequenzverhältnisse $x_2 : x_1 = \frac{x_2}{x_1} = y_1$ und $x_3 : x_2 = \frac{x_3}{x_2} = y_2$ gegeben, so gilt: $x_3 : x_1 = \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_3 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_3}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = y_2 \cdot y_1$. Die Frequenzverhältnisse multiplizieren sich also, wenn man auf der Tonleiter vorwärtsschreitet. Daher muss für die Oktave gelten: $\overline{c} : c = 2 : 1 = 2 = x^{12}$, wenn x das Frequenzverhältniss bei einem gleichbleibenden Halbtonschritt ist. x selbst wird dann $x = \sqrt[12]{2}$. Zum **Halbtonschritt** in der **temperierten Stimmung** gehört daher das **irrationale** Frequenzverhältniss $x = \sqrt[12]{2}$ und zum **Ganztonschritt** somit das irrationale Verhältnis $x^2 = (\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$). Verschiedene Halb– und Ganztonschritte existieren hier keine mehr. Alles passt, auch beim Wechsel der dur– und moll–Tonarten. Was man verliert, ist die reine Stimmung. Und oft ist hier das Argument zu hören, dass das ja sowieso niemand merke, denn der Mensch höre das nicht. Ja vielleicht hört das derjenige wirklich nicht, der das behauptet...



Rechts in der Skizze ist die reine Stimmung gezeigt, z.B. von c nach oben zum $\overline{c}$. Links daneben sieht man die angepasste, gleichmässig temperiert Stimmung. Die Tonabstände auf der hier verwendeten logarithmischen Skala sind alle gleich. Weiter daneben sieht man die Tonleiter, die einen Halbton höher beginnt. Und daneben zeigt das Bild nochmals eine Tonleiter, die nochmals einen Halbton höher beginnt.

Hinweis: Da nun alle Halbtonschritte identisch ist, kann es nicht mehr zu Abweichungen wie $fis \neq ges$ kommen. Eine Tonskala, bei der Töne gleichbehandelt werden, deren Frequenzverhältnisse und auch die mit ihnen verbundene akustische Intention verschieden sind, nennen wir **enharmonisch**. Problematisch bei solchen Skalen ist auch die Tatsache, dass mit den Tönen auch die Obertöne nicht mehr rein zueinander klingen.
Obertöne entstehen z.B. bei einer Saite durch Schwingungen mit mehreren Knoten. Die Wellenlängen werden rational unterteilt und damit auch die Frequenz rational vermehrt. Z.B. $\lambda_1 : \lambda_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \nu_1 : \nu_2 = \frac{2}{1} = 2$ oder $\lambda_1 : \lambda_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow \nu_1 : \nu_2 = \frac{3}{1} = 3$. Das Spektrum der Obertöne macht die Klangfarbe der Saite aus. Bei einer gedeckten Pfeife hingegen muss an einem Ende immer ein Knoten, am andern dagegen immer ein Bauch vorhanden sein. Dort z.B. ist dann $\lambda_1 : \lambda_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \nu_1 : \nu_2 = \frac{3}{1} = 3 = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}$. $\rightsquigarrow$ Das bedeutet: Zuerst die Oktave $(2 : 1)$, dann die Quinte $(3 : 2)$ — oder umgekehrt, total aber 11 Tonschritte (erst z.B. 7, dann nochmals 4). Obertöne treten also keineswegs nur im Verhältnis der Oktaven zum Grundton auf...
Z.B. bei Saiteninstrumenten regen die Obertöne infolge Resonanz die Nachbarsaiten an, die dann mitschwingen und wieder neue Obertöne erzeugen. Resonanz entsteht jedoch nur dann in idealer Weise, wenn die Schwingungen rein sind. Die temperierte Stimmung verwandelt daher vielleicht in manchen Ohren die als schöne geplante Musik in Dissonanz oder gar in „Lärm“ — Jedoch stellen wir fest (wie früher schon erwähnt): Die meisten Menschen akzeptieren das...

Bemerkung zu den moll–Tonarten: Vermutlich weil die natürlich sich ergebenden moll–Tonleitern der temperierten Stimmung (**natürliches Moll**) doch nicht das sind, was wünschbar wäre, gebraucht man zwei weitere moll–Arten: Das **harmonische Moll**, das sich durch die Erhöhung der 7. Stufe um einen

Halbton ergibt — und das **melodische Moll**, bei dem die 6. und die 7. Stufe je um einen Halbton erhöht werden, um einen Anderthalbtonschritt zwischen der 6. und der 7. Stufe zu vermeiden.

Bemerkung zu den **Quintenzirkeln**: In der temperierten Stimmung ist es nun so, dass man durch Einfügung neuer Halbtöne und Weglassung alter Töne in einem **geschlossenen Zirkelschritt** zu neuen Tonleitern gelangen kann. Durch eine Erhöhung (♯) entsteht aus der c–dur die g–dur, durch zwei Erhöhungen (♯♯) die d–dur, durch drei Erhöhungen (♯♯♯) die a–dur, durch vier Erhöhungen (♯♯♯♯) die e–dur, durch fünf Erhöhungen (♯♯♯♯♯) die h–dur, durch sechs Erhöhungen (♯♯♯♯♯♯) die fis–dur. Infolge einer Herabsetzung (♭) entsteht die f–dur, infolge zweier Herabsetzungen (♭♭) die b–dur, infolge dreier (♭♭♭) die es–dur, durch vier Herabsetzungen (♭♭♭♭) gelangt man zur as–dur, durch fünf Herabsetzungen (♭♭♭♭♭) zur des–dur und durch sechs Herabsetzungen (♭♭♭♭♭♭) zur ges–dur. Nun ist der Zirkel geschlossen: Es gilt in der temperierten Stimmung $ges = fis$. Ähnliches gilt für moll. (Bei diatonischen, nicht enharmonischen Tonleitern gelangt man so zu Spiralen.) Weiter kennt man Grossterzzirkel und Kleinterzzirkel. . .

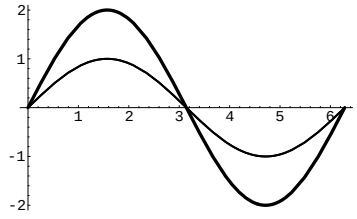
Zur heute üblichen Harmonielehre

In unserer Zeit behandelt die Harmonielehre vor allem die Klangbeziehungen der dur–moll–tonalen Musik (weniger also der Zwölftonmusik z.b. von Schönberg). Zentral ist dabei der **Dreiklang**, der aus Grundton, Terz und Quinte besteht — oder aus zwei Terzen, die in vier Kombinationen erscheinen können. Beispiele:

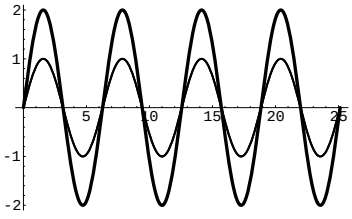
- ⊘ **Intervall** ⇝ Tonschritt wie Prime, Sekunde, Terz u.s.w.. In Musikstücken häufig auftretende Intervalle charakterisieren oft Komponisten oder Musikstücke und deren „seeliche Stimmung“. Beispiele: Mozart und die Terz, Beethoven und die Quarte, Quintenstimmung in der Gregorianik oder bei Kinderliedern, die Septime in der Romantik. . .
- ⊘ **Klang** ⇝ Zusammenklingen von Tönen, auch eines einzelnen Tons.
- ⊘ **Durdreiklang** ⇝ unten grosse Terz, oben kleine Terz
- ⊘ **Molldreiklang** ⇝ unten kleine Terz, grosse Terz oben
- ⊘ **Verminderter Dreiklang** ⇝ zwei kleine Terzen, (verminderte Quinte)
- ⊘ **Übermässiger Dreiklang** ⇝ zwei grosse Terz, (übermässige Quinte)
- ⊘ **Akkord** (von accordare, (corde, Saite, Kordel)) ⇝ Zusammenklang von drei oder mehreren Tönen, vorhanden in diversen Varianten weiterer Dreiklänge, Vierklänge u.s.w.
- ⊘ Umkehrakkorde ⇝ vgl. Fachliteratur . . .

Schwingungsbilder von Wellen bei Intervallen

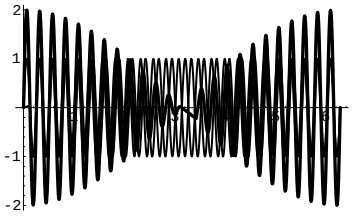
Nachstehend sehen wir die Schwingungsbilder der Intervalle und Schritte von der Prime bis zur Dodezime. Gezeigt sind jeweils die Bilder der beteiligten Schwingungen sowie die Summe der Auslenkungen resp. der Amplituden im speziellen Falle von **harmonischen Schwingungen** (Sinus– oder Cosinusschwingungen):



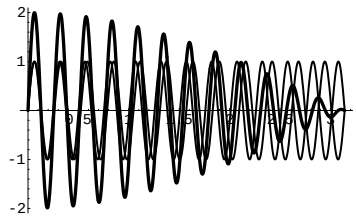
Prime



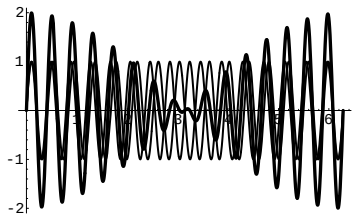
Prime (mehrere Perioden)



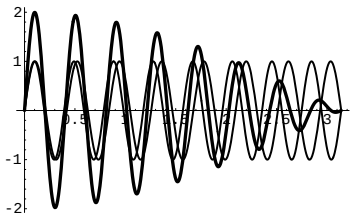
Kleiner Halbton



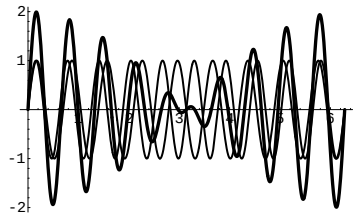
Kleiner Halbton, halbe Periode



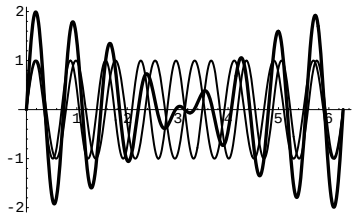
Kleine Sekunde, grosser Halbton



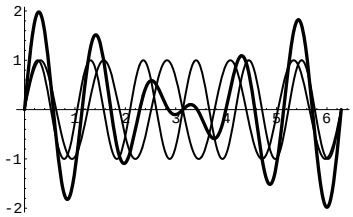
Kleine Sekunde, grosser Halbton



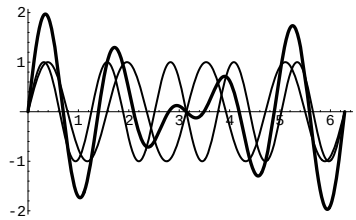
Kleiner Ganzton



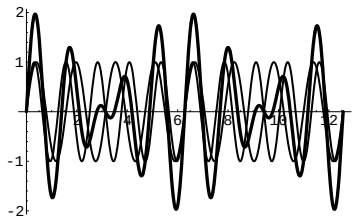
Grosse Sekunde, grosser Ganzton



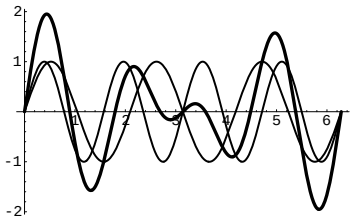
Kleine Terz



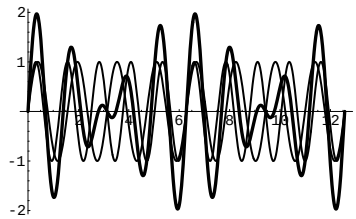
Grosse Terz



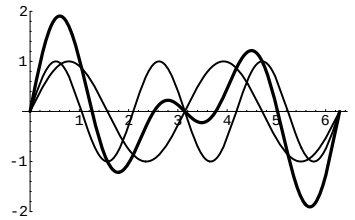
Grosse Terz



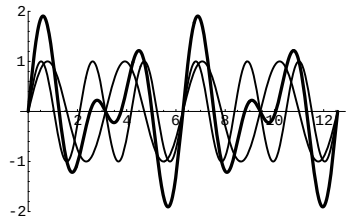
Quarte



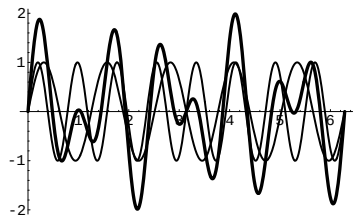
Quarte



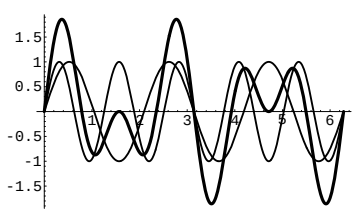
Quinte



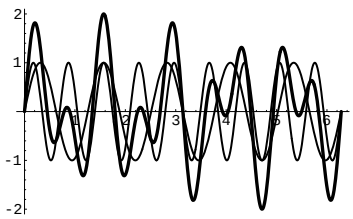
Quinte



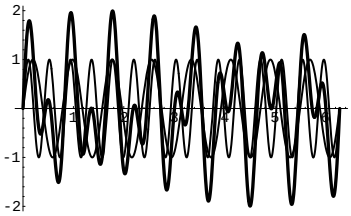
Kleine Sexte

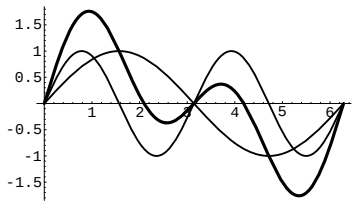


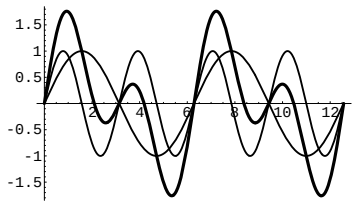
Grosse Sexte

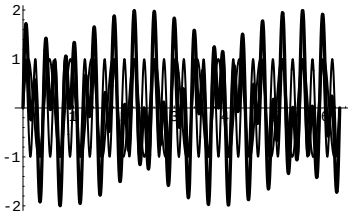


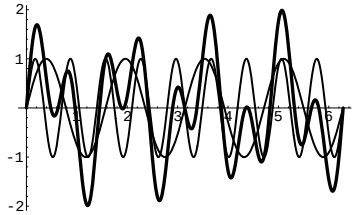
Kleine Septime

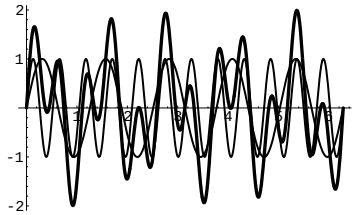

Grosse Septime

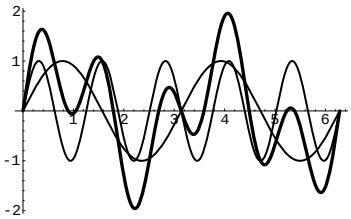

Oktave

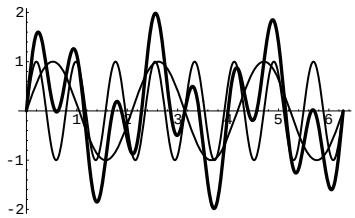

Oktave

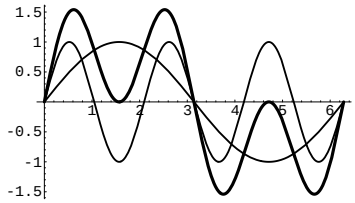

Kleine None


Grosse None


Kleine Dezime

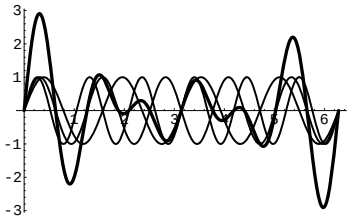

Grosse Dezime

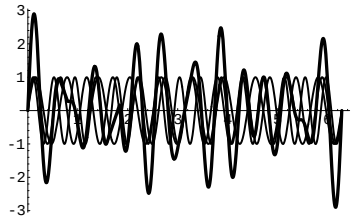

Undezime

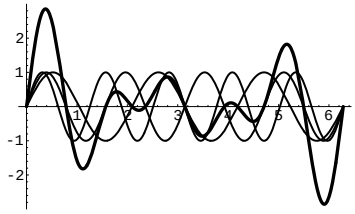

Dodezime

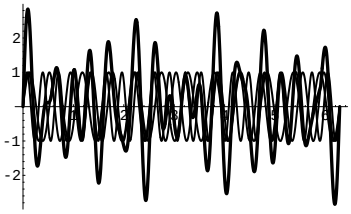
Schwingungsbilder von Wellen bei Akkorden

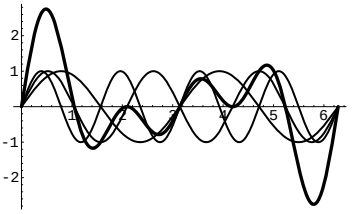
Nachstehend sehen wir die Schwingungsbilder einer Auswahl von Klängen. Gezeigt sind jeweils die Bilder der beteiligten Schwingungen sowie die Summe der Auslenkungen resp. der Amplituden im speziellen Falle von **harmonischen Schwingungen** (Sinus– oder Cosinusschwingungen):

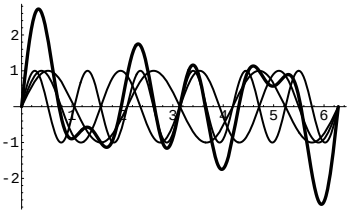

Dur–Dreiklang


Moll–Dreiklang


Grossterz–Quart–Akkord


Quart–Grossterz–Akkord


Quart–Quinte–Akkord

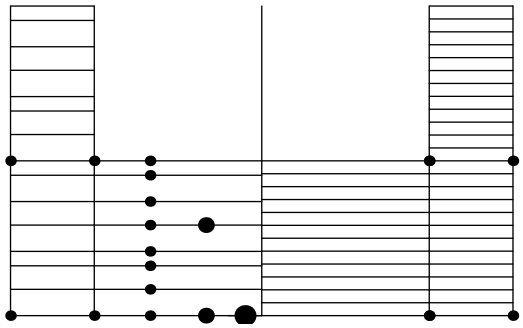

Quart und Quinte ab Grundton

Bemerkung: Die Diagramme in diesem Kapitel sind alle mit *Mathematica* generiert worden. Es ist dem

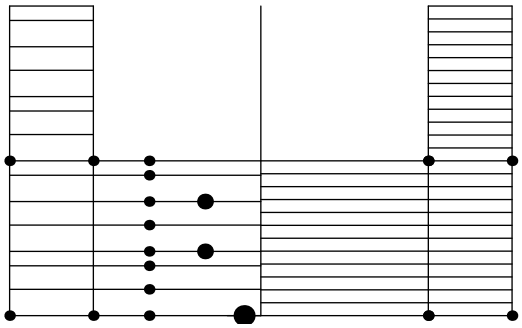
Leser überlassen, selbst weitere solche Diagramme zu generieren. Dabei wird ersichtlich, dass einfachere Intervallproportionen zu einfacher aussehenden Diagrammen und auch zu als einfacher empfundenen Klängen führen, kompliziertere Proportionen zu komplizierter aussehenden Intervallen und auch Klängen. Das Wohlempfinden solcher Klänge ist beim Menschen oft eine Angelegenheit des Alters und der Entwicklung. So gehört zur Quinte hier ein sehr einfaches Bild — und die Kinder lieben sie, die Quinte...

Die Kirchentonarten

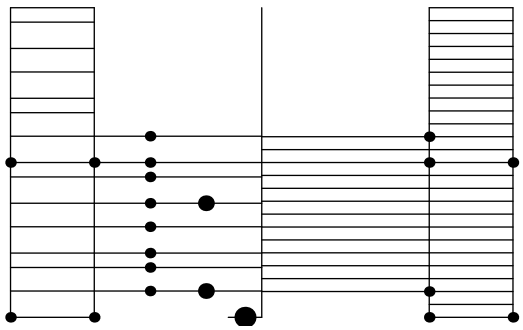
Nachstehend finden sich die Skizzen der Kirchentonarten. Eingezeichnet ist der **Hauptton** (**Finalis**, der Anfangs– und Endton der Skala) sowie der zweitwichtigste Ton, der **Repercussionston** (auf dem das Psalmodieren resp. Rezitieren stattfindet). Die **Nebentonarten** (**Hypo**–Tonarten) gewinnt man aus den **Haupttonarten**, indem man den oberen Tetrachord (die vier obersten Töne) nach unten versetzt. Man studiere dazu die nachfolgenden Skizzen. Ganz fett gedruckt: *c*.



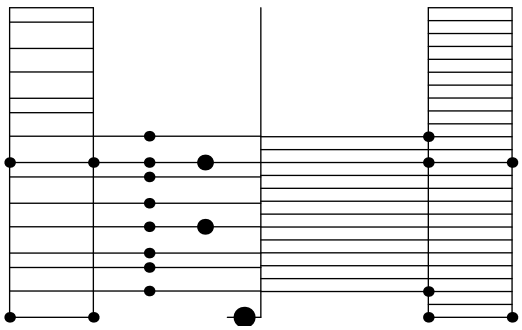
Jonisch (dur)



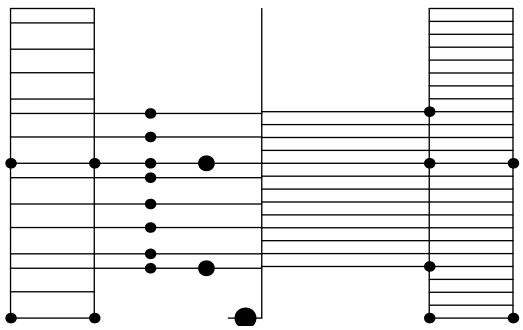
Hypolydisch



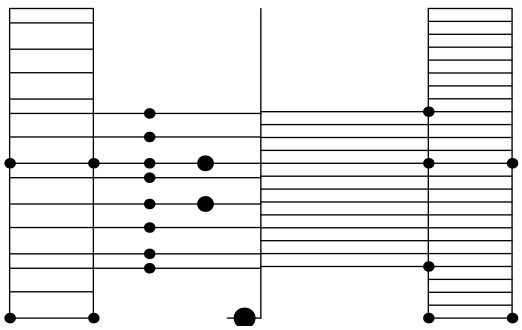
Dorisch



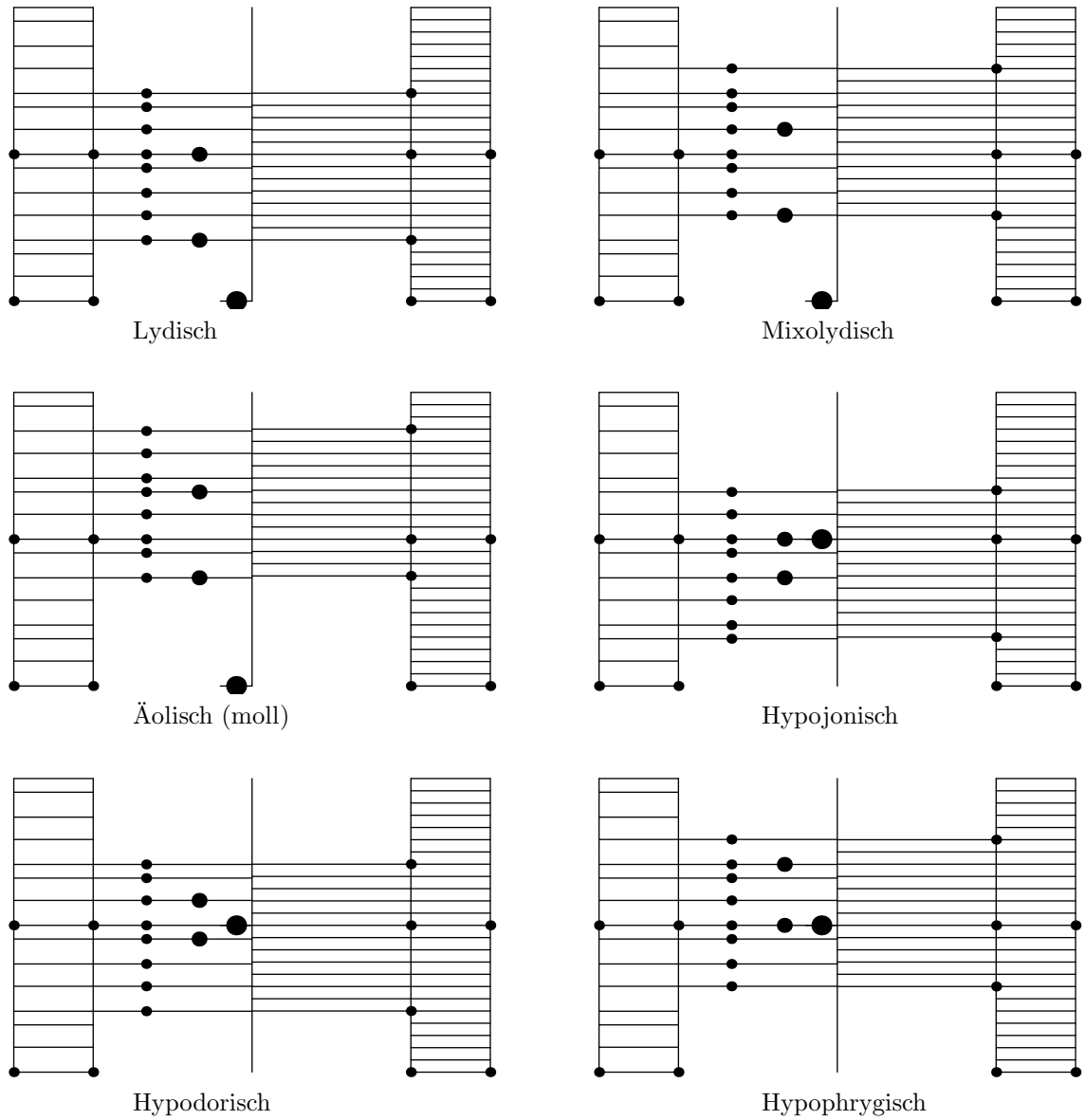
Hypomixolydisch



Phrygisch



Hypoäolisch



Zu den Auswahlmöglichkeiten von 7 aus 12

Um im Sinne der Pythagoräer auch bei der temperierten Stimmung eine Tonleiter zu bekommen, wählt man aus den pro Oktave vorhandenen 12 Halbtonschritten 7 Tonschritte aus. So ist die geltende Grundregel. Man kann sich nun fragen, welche Abfolgemuster von Halb– und Ganztönen möglich sind, wenn man nur Halb– und Ganztonintervalle haben will, jedoch keine Eineinhalbtonintervalle oder grössere Intervalle.

Wir wollen mit einem ersten Ton beginnen, der beliebig liegen kann. Hilfreich ist es dabei, an die Klaviertasten zu denken. Man kann sich die 12 Töne auch auf einem Kreis angeordnet denken. Z.B. beginnend mit c und endend mit h. Mit c' beginnt dann die folgende Oktave. Da bei einem Vorrat von 12 Tönen bei einer Verwendung von nur Ganztonschritten genau 6 solche möglich sind, gibt es bei diesem Vorrat keine Tonleiter aus 7 Tönen mit nur Ganztonschritten. Man muss daher mindestens einen der 6 Ganztonschritte in 2 Halbtonschritte teilen. Damit bleiben daneben noch 5 Ganztonschritte.

Dazu kommen die beiden jetzt erzeugten Halbtonschritte. Damit hat man $5 + 2 = 7$ Tonschritte. Teilt man einen weiteren Ganztonschritt in 2 Halbtonschritte, so entstehen $4 + 2 + 2 = 8$ Tonschritte. Das ist zuviel. Daher kommen nur Abfolgen von 5 Ganztonschritten und 2 Halbtonschritten in Frage, welche man jedoch in verschiedenen Sequenzen anordnen kann. Wieviele solche Anordnungen sind möglich?

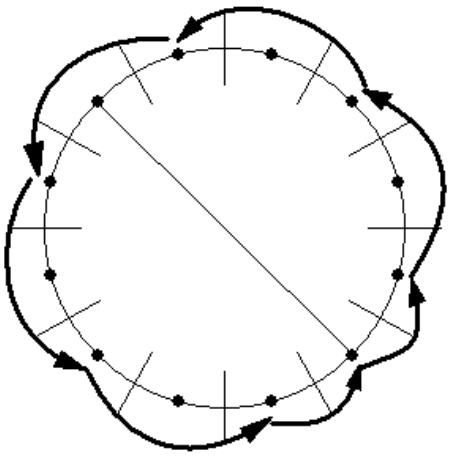
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Aussage dürfen wir beim Studium dieser Sache mit einem Halbtonschritt beginnen. Wir ordnen die 12 Halbtonschritte auf einem Kreis und fragen uns, wie wir die bleibenden 6 Tonschritte anordnen können, wobei noch genau ein weiterer Tonschritt ein Halbtonschritt sein muss. Dann sind die folgenden Arten möglich:

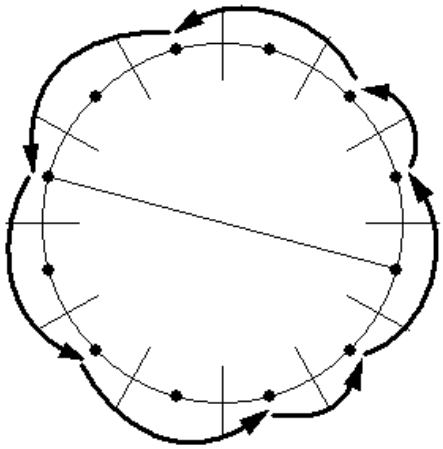
1. Zuerst lassen wir auf den beginnenden Halbtonschritt wieder einen Halbtonschritt folgen. Darauf kommen 5 Ganztonschritte. Diese erste Möglichkeit sucht man aber in der Geschichte vor dem zwanzigsten Jahrhundert vergebens.
2. Darauf lassen wir auf den beginnenden Halbtonschritt einen Ganztonschritte folgen und unmittelbar danach wieder einen Halbtonschritt. Darauf kommen noch 4 Ganztonschritte. Diese zweite Möglichkeit ist uns aus der Geschichte auch nicht sehr geläufig.
3. Nachher lassen wir auf den beginnenden Halbtonschritt zwei Ganztonschritte folgen und unmittelbar danach den notwendigen Halbtonschritt. Darauf kommen noch 3 Ganztonschritte. Diese dritte Möglichkeit kennen wir aus der Geschichte: Die Dur–Tonarten und auch manche Moll–Tonarten folgen diesem Muster.
4. Danach sieht man sofort, dass wegen der am Kreis geltenden Symmetrien kein neues Muster mehr möglich ist. Denn es müsste folgen: Halbton – drei Ganztonschritte – Halbton – zwei Ganztonschritte. Das deckt sich aber mit dem letzten, dem eben besprochenen Muster und so fort. Man hat somit:
5. Mögliche Modi, Tonleitern, Arten, Geschlechter usw. mit „7 aus 12“ unterstehen dem Gesetz: Es gibt total nur 3 Abfolgevarianten! Diese 3 heute in der temperierten Stimmung noch möglichen 3 Varianten bestehen aus Abfolgen von 5 Ganztönen (G) und 2 Halbtönen (H) aus 12 Halbtönen bei temperierter Stimmung:

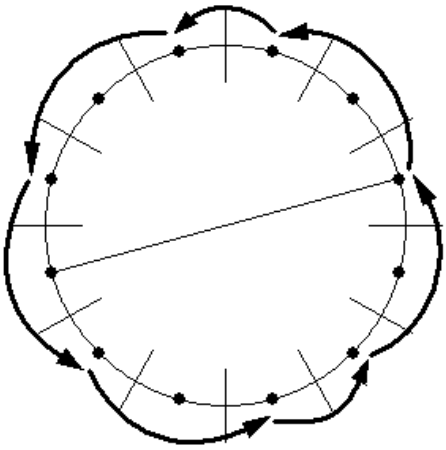
   (1) . . . – H – G – G – H – G – G – G – H – G – G – H – . . . (Dur– und einige Moll–Arten — ohne Halbtonschritte $\rightsquigarrow$ daraus auch die anhemitonische Pentatonik.)

   (2) . . . – H – G – H – G – G – G – G – H – G – H – G – . . .

   (3) . . . – H – H – G – G – G – G – G – H – H – G – G – . . .







Das ist die bekannte Dur–Situation oder oft auch die Moll–Situation:

– H – G – G – H – G – G – G – .

Lässt man die Halbtöne weg, so erhält man die anhemitonische Pentatonik.

11.1.6 Architektur, goldener Schnitt und Musik, Kalinkastrasse

Zum goldenen Schnitt

Die Frage, ob der goldene Schnitt in der Musik vorkäme, können wir sofort verneinen, denn das Verhältnis

$$\frac{1+\sqrt{5}2}{=}1+\sqrt{5}2:1\approx 1.61803$$

ist in unseren Tonsystemen nicht auszumachen. Eine Näherung wäre allerdings die reine kleine Sexte, deren zugehöriges Verhältnis aus Fibonacci–Zahlen besteht: $8:5=\frac{8}{5}=1.6$. In der temperierten Stimmung hat man in der Nähe ($\sqrt[12]{2}^8$) ≈ 1.5874 und ($\sqrt[12]{2}^9$) ≈ 1.68179.
Weitere Fibonaccizahlen finden wir bei der grossen Sexte $(5:3)$, bei der Quinte $(3:2)$ und bei der Oktave $(2:1)$ sowie bei der Prime $(1:1)$. Das ist nicht sehr ergiebig. Viel mehr lässt sich im Moment dazu aber nicht sagen.
Die Pythagoräer gingen ja von ganzzahligen Zahlenverhältnissen aus. Von Pythagoras soll angeblich der Ausspruch stammen: „Alles ist Zahl“. Gemeint wäre rational. Die Entdeckung des Irrationalen hat ja nach der Anektote bekanntlich demjenigen das Leben gekostet, der es ausgeplaudert haben soll. „In einen Sack eingenäht und im Meer ersäuft“ habe man ihn... Vermutlich suchen wir in der Musik daher den goldenen Schnitt vergeblich — denn er müsste an den Pythagoräern vorbei hineingeschmuggelt worden sein.

Ausblick Architektur und Intervalle, Fragen und die Kalinka–Strasse

Es ist der Umstände wegen jetzt zu vermuten, dass die rationalen Verhältnisse der Musik auch in der antiken Architektur dokumentierbar sind. Sehen wir uns z.B. die Säulenordnung von griechischen Tempeln an: Hephaistos–Tempel, Korfu. Vorne 8 Säulen, hinten auch, dazwischen längs je noch 15. $\rightsquigarrow$ Verhältnis $8:15$, die grosse Septime. Athena–Tempel auf der Akropolis zu Athen (Parthenon,): Ebenfalls die grosse Septime, das letzte Verhältnis vor dem Sprung, vor der Oktave. (Der Bau des Parthenon begann im Jahre 447 v. Chr. unter der Leitung der Architekten Iktinos und Kallikrates auf Veranlassung des Perikles.)
Dann der Aphaia–Tempel in Aegina: Vorne 6 Säulen, hinten auch, dazwischen längs je noch 10.
$\rightsquigarrow$ $6:10=3:5$, die grosse Sexte u.s.w.. Natürlich könnte es Zufall sein — Zufall lauert ja überall, wo die Erkenntnis endet. Dies der Blick in die Vergangenheit.

Beispiele von Seite 167:

Olympia Zeustempel, Säulen– und Massverhältnisse:
Stirnseite Abstände: $\frac{5}{3}$: Grosse Sexte. Stirnseite Säulen: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$: Quinte.
Rechteck Abstände: $\frac{12}{5}$: Kleine Terz mit Oktave.
(Zahl der Vollmonde, des Menschen sowie die vielbedeutende Drei, bei Zeus genealogisch bedeutsam.)
Rechteck Säulen: $\frac{11}{6}$: ?
Athen Parthenon, Athene, Säulen– und Massverhältnisse:
Stirnseite Abstände: $\frac{7}{5}$: Kein Grundverhältnis (Zahl der Planeten und des Menschen)
Stirnseite Säulen: $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$: Quarte.
Rechteck Abstände: $\frac{16}{7} = 2 \cdot \frac{8}{7}$: Kein Grundverhältnis (Zahl der Planeten und 2^4, doppelte Sphärenzahl, zweimal verdoppelter Kubus, $2 \cdot 2^3$).
Relativ später Tempel. Entfernt man längsseitig die mittleren Säulen, so entstehen zwei Quadrate (7×7)
Rechteck Säulen: $\frac{15}{8}$: Grosse Septe.
Paestum Athene, Grundriss:
Längsseite: $\frac{96}{72} = \frac{4}{3}$: Quarte. Breitseite: $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$: Grosse Sexte.
Die vorkommenden Zahlen $8, 24, 40, 44, 72, 96, 100$ sind alle Vielfache von 4. Das führt zum Verhältnis $1 : 2 : 6 : 10 : 11 : 18 : 24 : 25$. Darin liegt vieles verborgen. Z.B. $\frac{96}{8} = \frac{24}{4}$ = Zahl der Vollmonde.
Paestum Athene, Aufriss:
$3.75 : 7.5 : 15 : 18.75 : 30 = 1 : 2 : 4 : 5 : 8$. Darin stecken z.B.: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4}$: Oktave.
$\frac{5}{4}$: Grosse Terz. $\frac{8}{5}$: Kleine Sexte

Jetzt aber zum Blick in die Gegenwart und in die Zukunft: Sollte diese Verhältnis–Angelegenheit aus der Musik so wie auch der goldene Schnitt (nicht etwa „goldener Schitt“) in Zukunft wieder vermehrt beachtet werden? Zu welchem Nutzen? Zu welchem Zweck? Mit welchem Ziel? Fragen, auf die wir Antworten suchen sollten, denn die kulturelle Kraft des „Kosmos der Musik“ ist ungebrochen überwältigend (Kosmos als Ordnung, im Gegensatz zum Chaos)...
Vielleicht könnte man sich etwa eine Häuserfront wie folgt vorstellen: Die Hauslängen entsprechen den Tonlängen des Liedes „Kalinka“, die Haushöhen den Tonhöhen, die Lautstärken den Akzentuierungen der entsprechenden Gebäude u.s.w.. Wie fühlte man sich wohl in einer solchen Strasse? — Würde einem dann heimlich unsagbar leise, jedoch sehr eindringlich, ohne dass man nur eine blinde Ahnung vom Standort der Tonquelle auch hätte, trotz des Inhalts das Lied in den Ohren klingen? Machen wir uns an die Planung der Kalinka–Strasse und suchen wir eine Umsetzung des Vorhabes — um zur Frage eine Antwort zu erhalten. Dann werden wir es wissen...

☺

11.2 Rund um den goldenen Schnitt

In die Akademie soll keiner eintreten, der nicht durch die Geometrie gegangen ist... (nach Platon)

... denn die Geometrie ist nicht nur nützlich zur Erdmessung oder für eine erhabenere Architektur. Sie hilft auch zur Lösung von Erkenntnisfragen ...

11.2.1 Goldener Schnitt und Fibonaccizahlen

Wir teilen eine Strecke a in zwei Teile b und $c = a-b$ mit $b > c$. Bekanntlich spricht man beim entstehenden Teilungsverhältnis vom *goldenen Schnitt*, wenn sich die ganze Strecke a zur grösseren Strecke b so verhält wie die grössere Strecke b zur kleineren Strecke c. Oder reziprok:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1$$

Sei $\frac{b}{a} = k \rightsquigarrow\ k = \frac{1}{k} - 1\ \Rightarrow\ k^2 = 1 - k\ \Rightarrow\ k^2 + k - 1 = 0\ \Rightarrow\ k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
(Die negative Lösung fällt weg, da das Teilverhältnis positiv ist.)

k kann man interessanterweise ebenso als Kettenbruch erhalten:

$$x = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$$

Denn es gilt hier: $x = \frac{1}{1+x}\ \Rightarrow\ x^2 + x = -1\ \Rightarrow\ x^2 + x - 1 = 0\ \Rightarrow\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = k$
(Die negative Lösung fällt ebenfalls weg, da x positiv ist.)

Weiter sieht man sofort, dass auch das Verhältnis zweier benachbarter Fibonaccizahlen gegen das gefundene Verhältnis k des goldenen Schnitts konvergiert. Die *Fibonaccifolge* definieren wir hier allgemeiner wie folgt:

$$a_0 := 0,\ \ a_1 := k > 0,\ \ a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$$

Zuerst stellen wir fest, dass die Folge $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ beschränkt ist, denn es gilt:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} > a_n\ \Rightarrow\ 0 < b_n < 1$$

Wir betrachten nun
$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n^2}{(a_n + a_{n-1}) \cdot a_{n-1}} = \frac{a_n^2}{a_n \cdot a_{n-1} + a_{n-1}^2} = \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_n} + (\frac{a_{n-1}}{a_n})^2} = \frac{1}{b_{n-1} + (b_{n-1})^2}$
$\rightsquigarrow\ b_n = \frac{b_{n-1}}{b_{n-1} + b_{n-1}^2} = \frac{1}{1 + b_{n-1}}\ \Rightarrow\ b_n = \frac{1}{1 + b_{n-1}}$.
Diese Formel lässt sich iterieren: $\rightsquigarrow\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+b_{n-2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+b_{n-3}}}} \ldots$.

Für $n \to \infty$ erhält man daher den Kettenbruch $b_\infty = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$, dessen Wert wir kennen:

$b_\infty = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Damit haben wir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

(Die negative Lösung fällt ebenfalls weg, da x positiv ist.)

Satz: Für die Glieder der Fibonaccifolge gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Das ist das Verhältnis des goldenen Schnitts.

Bemerkung:

Der goldene Schnitt lässt sich bekanntlich am 10–Eck–Dreieck ablesen (vgl. Bilder Seite 156 ff sowie im Abschnitt weiter unten). Dort kann man sehen:

$$a = b + c, \;\; \frac{a}{b} = \frac{b+c}{b} = \frac{b}{c}$$

$$1 + \frac{c}{b} = \frac{b}{c} = \frac{1}{x}, \;\; x = \frac{c}{b} \;\Rightarrow\; 1 + x = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; x^2 + x = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \;\; x > 0$$

Es gilt: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618033988749894\ldots$ sowie $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618033988749895$

11.2.2 Ein Wachstumsmodell mit Fibonacchizahlen

Wir nehmen an, die Anzahl Einheiten (z.B. Zellen) in einem Organismus zum Zeitpunkt $t = 1$ sei $A_1 = 1$. Vor dem Beginn des Wachstumsprozesses war die „Zeugung“. Vorher also, zur Zeit $t = 0$, war der Organismus noch nicht vorhanden. Damit war $A_0 = 0$.
Die Einheiten (z.B. die Zellen) wachsen nun alle und teilen sich schliesslich später durch Abspaltung einer neuen Einheit. Z.B. eine Zelle zerfällt so nach einer Zeiteinheit immer in eine alte und in eine neu entstehende Zelle. Falls es sich um eine neu entstandene Einheiten resp. Zelle handelt, zerfällt diese immer erst nach 2 Zeiteinheiten. Sie muss erst „teilungsreif“ werden.
Damit haben wir: A_n = Anzahl vorhandene Zellen zum Zeitpunkt $t = n$, Z_n = Anzahl teilbare oder neu entstehende Einheiten (Zellen) zum Zeitpunkt $t = n$. Wegen der verzögerten Teilbarkeitsreife der neuen Einheiten oder Zellen gilt nun: $Z_n = A_{n-1}$. Nach obiger Beschreibung haben wir somit:

$$A_0 = 0, \;\; T_0 = 0, \;\; A_1 = 1, \;\; A_2 = A_1 + T_1 = A_1 + T_0 = 1 + 0 = 1,$$

$$A_3 = A_2 + T_2 = A_2 + A_1 = 1 + 1 = 1 = 2, \;\; A_4 = A_3 + T_3 = A_3 + A_2 = 2 + 1 = 1 = 3\ldots$$

$$\Rightarrow \;\; A_{n+1} = A_n + T_n = A_n + A_{n-1} \rightsquigarrow \text{ Fibonacchifolge!}$$

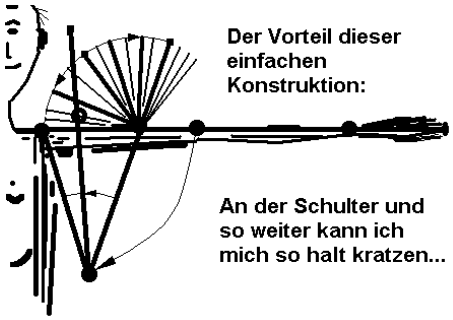
Würden sich alle Einheiten immer sofort wieder teilen, so hätten wir die Folge

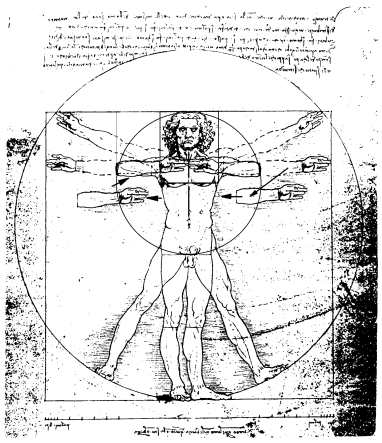
$$a_0 = 1 = 2^0, \;\; a_1 = 2 = 2^1, \;\; a_2 = 4 = 2^2, \;\; a_3 = 8 = 2^3, \;\; \ldots, \;\; a_n = 2^n, \ldots$$

Wir hätten hier also ein exponentielles Wachstum mit der Basis 2. Das Modell mit der Fibonacchifolge können wir daher auch so interpretieren, dass wir eigentlich ein solches exponentielles Wachstum hätten, jedoch immer einige Einheiten oder Zellen absterben. Daher gilt statt $a_{n+1} = 2\,a_n = a_n + a_n$ bloss $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Das bedeutet, dass bei jedem Schritt $s_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ Einheiten verloren gehen oder sterben. Die Anzahl der jeweils Sterbenden ist also hier gleich der Zunahme vom vorletzten zum letzten Wachstumsschritt. Dieser Zusammenhang scheint plausibel zu sein.

11.2.3 Goldener Schnitt und Mensch und Tier

Im Bildmaterial (siehe Seite 147 ff) ist dokumentiert, dass sich in den Proportionen von Mensch und Tier auf vielfache Weise der goldene Schnitt manifestiert. Das die Menschen das schon in der Antike wussten, erfahren wir aus der antiken Literatur (Vitruv, Polyklet u.s.w.) und auch durch die überdauerten Kustwerke. Der Autor selbst hat sich davon überzeugt durch Vermessung ganzer Klassen von Menschen im Alter von ca. zwanzig Jahren. Im Schnitt stimmt das Modell sehr gut.
Die Frage, wieso das so ist, wird aber durch die vorhandenen Dokumente kaum beantwortet. Man darf die Frage dennoch stellen, denn schliesslich führen meist nur Fragen zu Antworten.





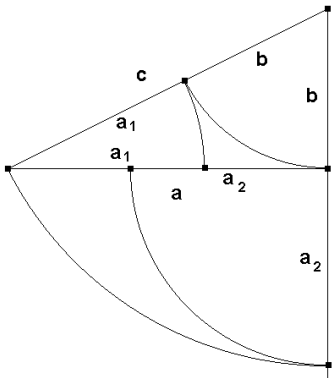
Es scheint mir nun, dass bei der Fage nach den Gründen des Auftretens des goldenen Schnitts die Evolutionslehre weiter helfen kann. Denn z.B. der goldene Schnitt in den Gliedern erweist sich zweifellos als vorteilhaftes Prinzip. Man muss sich einmal die Proportionen z.B. des menschlichen Arms einmal anders denken. Man sieht dann sofort, was in solch einer Situation passiert. Weniger vorteilhafte Prinzipen führen zu nachteilen und daher zu einer geringeren Wahrscheinlichkeit des Fortpflanzungserfolges. Ein besseres Bild bekommt man durch graphische Simmulationen der Bewegungsmöglichkeiten von Lebewesen mit abweichenden Proportionen...

11.2.4 Goldener Schnitt und Geometrie

Geometrische Konstruktionen

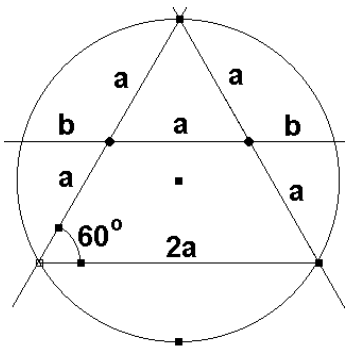
Der goldene Schnitt ist mutmasslich von Hippasos von Metapont entdeckt worden, einem Schüler von Pythagoras. Nach Iamblichos aus Chalkis (283 – 330) soll er angeblich dann als „gottloser“ im Meer umgekommen sein...

Für geometrische Konstruktionen benützen wir den Satz von Pythagoras und beachten dass gilt: $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.



Sei $a = 2\,b \;\Rightarrow\; c = \sqrt{2^2+1^2}\cdot b = \sqrt{5}\cdot b$
$\Rightarrow\; a_1 = c - b = \sqrt{5}\cdot b - b$
$\Rightarrow\; a_1 : a = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\,b}{2\,b} = \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2} = \Phi.$

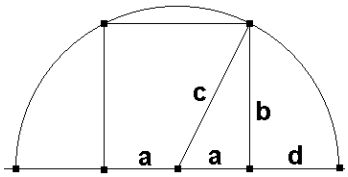
(Aus Gründen der Ähnlichkeit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 2$ und $b = 1$ setzen.)



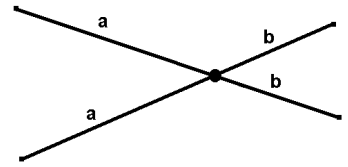
Sehnensatz: $a \cdot a = b \cdot (a+b)$
$\Rightarrow \ \dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b}{a} = 1 + \dfrac{b}{a}.$

Sei $\dfrac{b}{a} := x \ \Rightarrow \ \dfrac{1}{x} = 1 + x$
$\Rightarrow \ x^2 + x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = \dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$,
$1 > x > 0$ (Skizze) $\rightsquigarrow \ \dfrac{b}{a} = x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

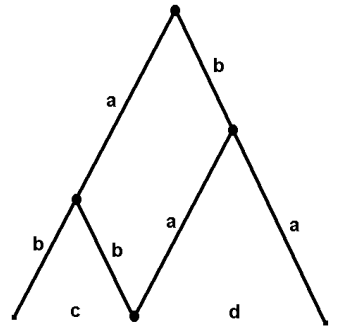
(Setze ohne Beschränkung der Allgemeinheit wegen der Ähnlichkeit $a = 1$.)



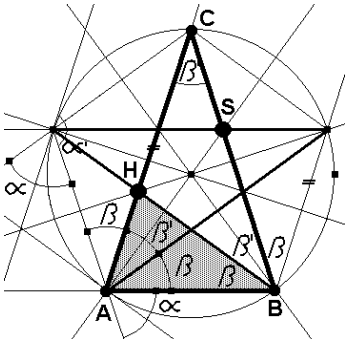
Sei $b = 2\,a \ \Rightarrow \ c = \sqrt{2^2+1^2} \cdot a = \sqrt{5}\,a$
$\Rightarrow \ d = c - a = \sqrt{5}\,a - a = (\sqrt{5}-1)\,a$
$\Rightarrow \ d : a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi.$



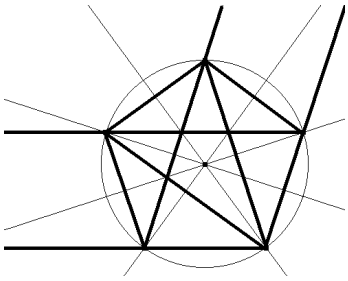
In der nebenstehenden Skizze ist ein **Proportionenzirkel** gezeigt. Wenn man den Zirkel so einstellt (d.h. den verschiebbaren Drehpunkt in der Mitte so fixiert), dass $a : b = \Phi$ gilt, so kann man ein abgegriffenes Mass auf der andern Seite des Zirkels im goldenen Schnitt abtragen. (Ähnlichkeit von Dreiecken oder Strahlensätze.)



In der nebenstehenden Skizze ist nochmals ein **Proportionenzirkel** gezeigt. An diesem Zirkel lassen sich die Proportionen infolge der fixen Länge der kleineren Zwischenstücke nicht verstellen. Die Drehpunkte sind fix. Es gilt wieder $a : b = \Phi$ infolge der fixen Einstellung $\rightsquigarrow \ d : c = \Phi$.



Die Summe der Aussenwinkel α ist in einem n–Eck 360^o. (Schreitet man das n–Eck aussen rum ab, so macht man insgesamt eine volle Drehung um die eigene Achse.) $\rightsquigarrow$ beim Fünfeck ist $\alpha = \dfrac{360^o}{5} = 72^o$.
$\Rightarrow \ \alpha' = 2\,\beta + \beta' = 180^o - 72^o = 108^o$. Wegen der Winkelsumme an Parallelen $2\,\beta' + 3\,\beta = 180^o$ folgt nun $(4\,\beta + 2\,\beta') - (2\,\beta' + 3\,\beta) = 2 \cdot 108^o - 180^o = 36^o = \beta = \beta', \ \beta + \beta' = 72^o$
$\rightsquigarrow$ Das Dreieck ABC ist daher ein goldenes Dreieck, und die Punkte S und H teilen die entsprechenden Seiten im Verhältnis des goldenen Schnitts. (Vgl. Seite 156 ff.)



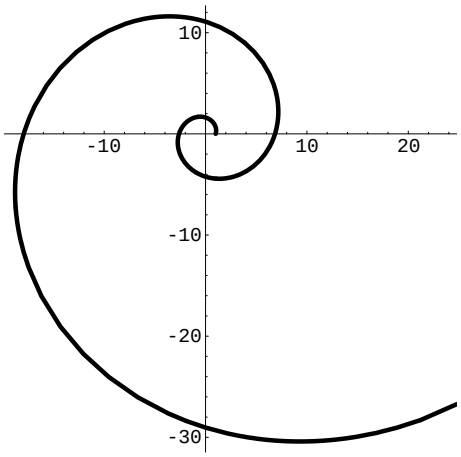
Knotet man einen Papierstreifen (vgl. nebenstehende Skizze), so entsteht ein Fünfeck. (Das Fünfeck trägt in sich den goldenen Schnitt.)

Unter den platonischen Körpern findet man den goldenen Schnitt infolge des Fünfecks im Zusammenhang mit dem Dodekaeder sowie dem dazu dualen Körper, dem Ikosaeder.

Nebenstehend ist die sogenannte **logarithmische Spirale** geziechnet. In Polarkoordinaten ist die Kurve gegeben durch

$$r_0 = \Phi^{-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}, \;\; r(\varphi) = r_0^{\frac{2\,\varphi}{\pi}}$$

Diese Kurve schneidet nach Definition aus jedem genügend grossen Rechteck mit einer Ecke im Ursprpung Seitenabschnitte im Verhältnis des goldenen Schnitts aus.



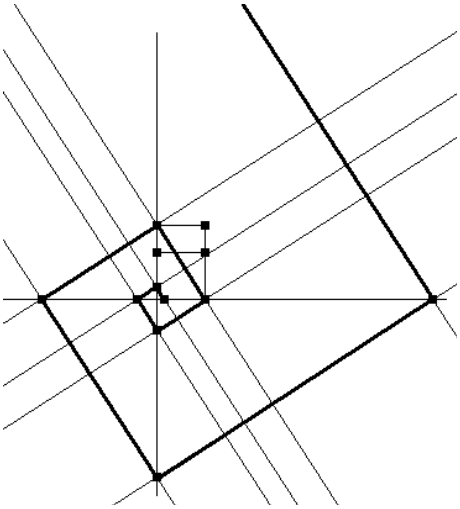
Es gilt nämlich:

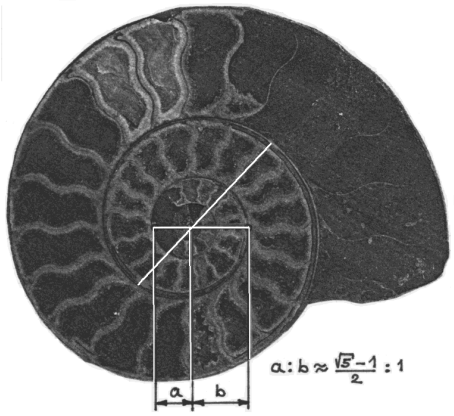
$$\frac{r(\varphi+\frac{\pi}{2})}{r(\varphi)} = \frac{r_0^{(\frac{2\,(\varphi+\frac{\pi}{2})}{\pi})}}{r_0^{\frac{2\,\varphi}{\pi}}} = r_0^{(\frac{2\,(\frac{\pi}{2})}{\pi})} = r_0^1 = r_0$$

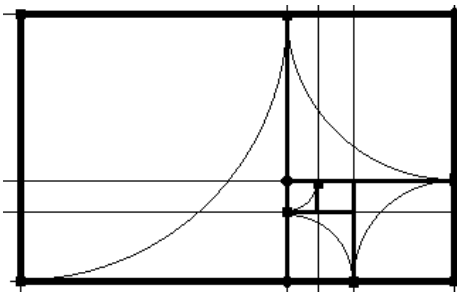
Logarithmische Spirale $\rightsquigarrow$ der Exponent = Logarithmus ist variabel.

Bemerkung: Statt mit einem Exponenten $\frac{2\,\varphi}{\pi}$ zu arbeiten, kann man auch mit $\frac{c\,2\,\varphi}{\pi}$, $c \in \mathbb{R}$ arbei-ten. Dann muss an die Stelle des erwähnten Rechtecks mit dem Eckenwinkel $\frac{\pi}{2}$ ein Dreieck mit dem Eckenwinkel $\frac{c\,\pi}{2}$ treten...

In der nachfolgenden linken Skizze sieht man die Konstruktion einer Spirale oder Schnecke mit Hilfe der Ähnlichkeit, ausgehend von zwei senkrecht aufeinanderstehenden Strecken, deren Längen im Verhältnis des goldenen Schnitt stehen. Rechts ist ein Bild einer aufgesägten Versteinerung eines Ammoniten wiedergegeben. Offensichtlich handelt es sich hier um eine logarithmische Spirale mit $r_0 = \Phi^{-1}$, wie aus der Vermessung geschlossen werden muss.

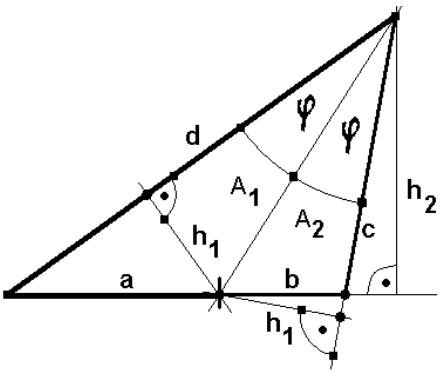






Fortlaufende Unterteilung einer goldenen Rechtecksfläche (Seiten im goldenen Schnitt) immer weiter im goldenen Schnitt...

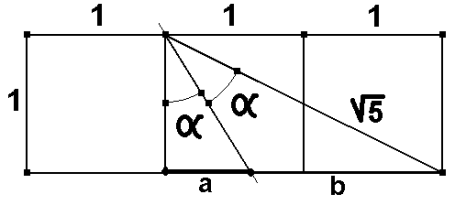
Weitere Konstruktionen



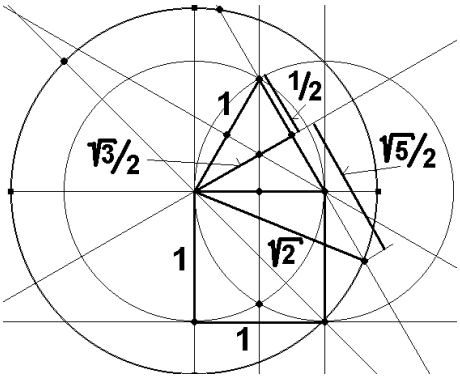
In Algebra–Script wird der Satz hergeleitet:

$$\frac{d}{a} = \frac{c}{b}$$

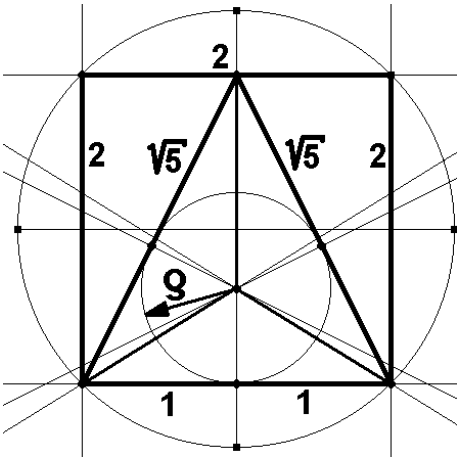
(Man berechne dazu A_1 und A_2 mit Hilfe von h_1 und mit Hilfe von h_2)



$$\frac{d}{a} = \frac{c}{b} \rightsquigarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5}}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2-a} \Rightarrow$$
$$b = 2 - a = a\sqrt{5} \Rightarrow a\,(\sqrt{5}+1) = 2$$
$$\Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

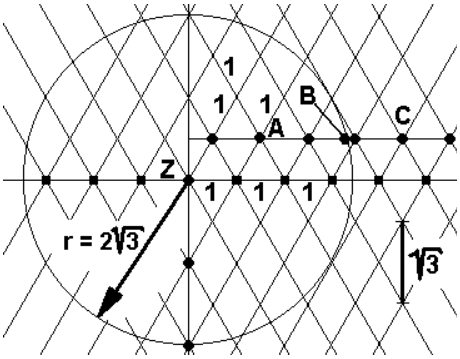


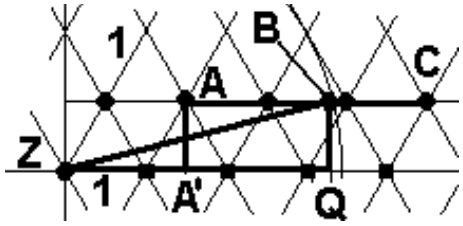
Im nebenstehenden Bild sieht man ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 und dazu die konstruierten Verhältnisse $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$



Die nebenstehend gezeigte Dreiecksfläche lässt sich wie folgt zerlegen:

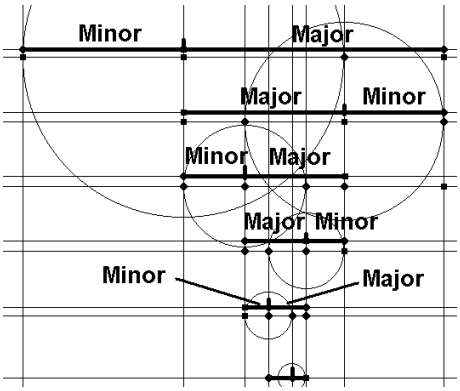
$$A_{\triangle} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2 = \frac{\rho\cdot 2}{2} + 2\cdot\frac{\rho\cdot\sqrt{5}}{2}$$
$$\Rightarrow\ 2 = 2\cdot\rho\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \Rightarrow\ 1 = \rho\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\Rightarrow\ \rho = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



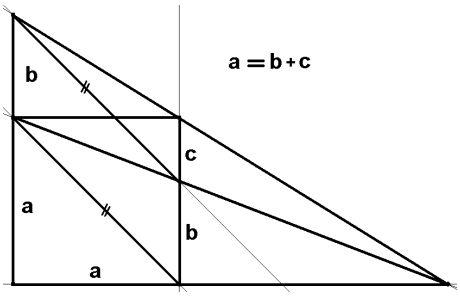


$|\overline{AC}| = 3,\ |\overline{ZB}| = r = 2\sqrt{3},\ |\overline{BQ}| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ |\overline{ZQ}| = \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$ (Pythagoras)

$$\rightsquigarrow\ |\overline{AB}| = |\overline{ZQ}| - |\overline{ZA'}| = \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)\ \Rightarrow\ \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)}{3} = \frac{3}{2\cdot 3}(\sqrt{5}-1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



Fortgesetzte Teilung im goldenen Schnitt. Bei einer Teilung nennen wir die grössere Strecke **Major**, die kleinere Strecke **Minor**.



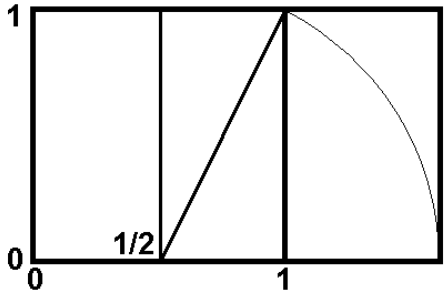
Ähnlichkeit (Strahlensätze):

$$\frac{b+c}{b}\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \;\Rightarrow\; 1+\frac{c}{b} = \frac{b}{c} := x$$

$$\Rightarrow\; 1+\frac{1}{x} = x \;\Rightarrow\; x^2 - x - 1 = 0$$

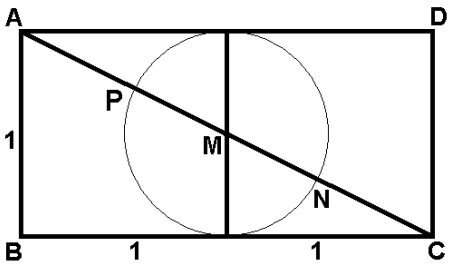
$$\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} > 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\rightsquigarrow$ Der Major lässt sich durch diese Konstruktion wieder im goldenen Schnitt teilen.



214: Goldenes Rechteck

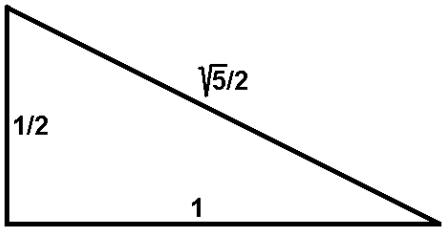
$$\rightsquigarrow\; 1 : (\frac{1}{2} + \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2}) = 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$



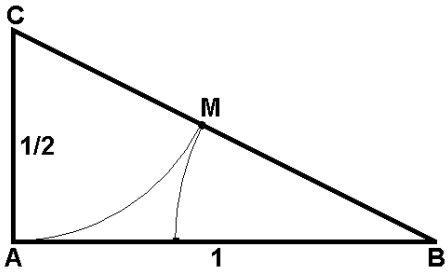
214: Goldener Schnitt

$$\rightsquigarrow\; |\overline{AP}| = |\overline{AM}| - |\overline{PM}| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2}) - \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow\; |\overline{AP}| = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\;\; |\overline{PC}| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

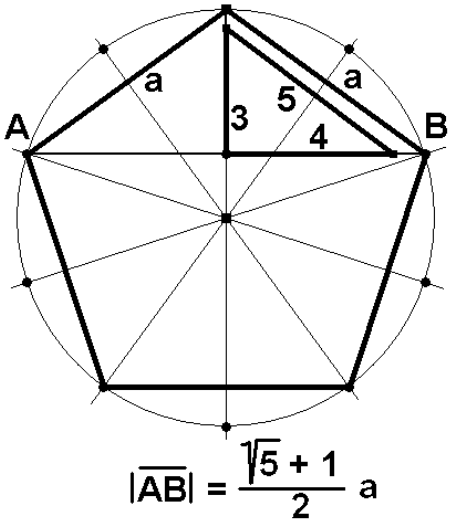


214: Konstruktion von $\frac{\sqrt{5}}{2}$



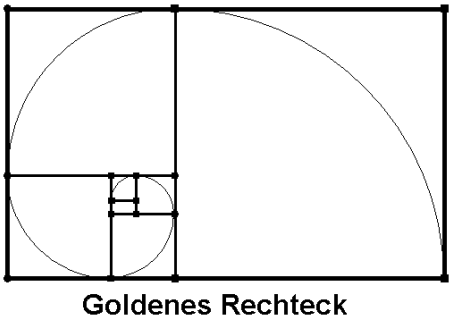
214: Goldener Schnitt

$$|\overline{MB}| = |\overline{CB}| - |\overline{CM}| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2)} - \frac{1}{2} \rightsquigarrow |\overline{MB}| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



214: Goldener Schnitt, Näherung

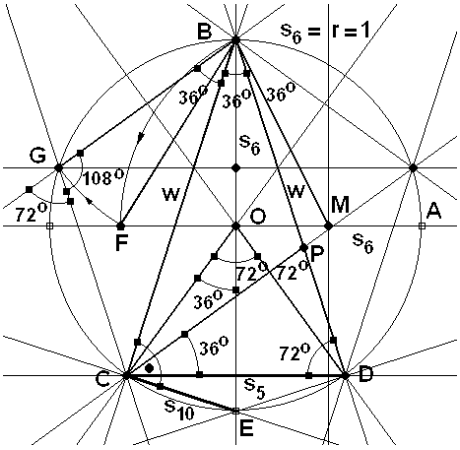
$a : 5 \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot a : 4$
$\rightsquigarrow 0.2 = \frac{1}{5} \approx \frac{\sqrt{5}+1}{2 \cdot 2} : 4 \approx \frac{1.61803}{2} : 4$
≈ 0.202254
$\rightsquigarrow$ Fehler: $(0.202254 - 0.2)/0.2 \cdot 100\%$
$\approx 1.127\% \rightsquigarrow$ gute Approximation.
($\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ wird hier durch die Fibonaccizahlen $8 = 2 \cdot 4$ und 5 approximiert: $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx \frac{8}{5}$.



214: Näherungsspirale

Die Näherungsspirale besteht hier aus Kreissegmenten. Sie behält die Form bei, wenn man einen nur ein ähnliches Teilrechteck herausnimmt.

Zur Fünfeckkonstruktion



In der nebenstehenden Figur ist ein regelmässiges Fünfeck gezeigt mit der Seitenlänge $s_5 = |\overline{CD}|$ und dem Innenwinkel $108^o = 3 \cdot 36^o$. Dabei ist das Dreieck CDB ein „goldenes Dreieck“ mit den Basiswinkeln 72^o. Soviel misst auch der zum Peripheriewinkel $\measuredangle CBD = 36^o$ bei B gehörende Zentriwinkel $\measuredangle COD$ im Mittelpunkt O. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OA}$. Entsprechendes gilt für F. $r = s_6$ ist der Radius $|\overline{OB}| = |\overline{OA}| = \ldots$. Und $s_{10} = |\overline{CE}|$ ist die Länge der Zehneckseite. Das goldene Dreieck hat die Seitenlänge w. Bekanntlich teilt P die Strecke $\overline{BD}$ im Verhältnis des goldenen Schnitts. $\measuredangle ECB = 90^o$ bei B (Thales).

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit der Betrachtungsweise können wir $r = s_6 = 1$ annehmen. Andernfalls müssten wir alle Streckenlängen mit $r \neq 1$ ähnlich vergrössern.

$$\triangle CDB \sim \triangle CEO \;\Rightarrow\; w : s_5 = 1 : s_{10} \;\Rightarrow\; \frac{w}{s_5} = \frac{1}{s_{10}} \qquad \boxed{\Rightarrow\; w = \frac{s_5}{s_{10}}}$$

$$\measuredangle ECB = 90^o \;\Rightarrow\; w^2 + s_{10}^2 = (1+1)^2 = 4 \;\Rightarrow\; \frac{s_5^2}{s_{10}^2} + s_{10}^2 = 4 \;\Rightarrow\; s_5^2 + s_{10}^4 = 4\, s_{10}^2 \qquad \boxed{\Rightarrow\; s_5 = s_{10}\sqrt{4 - s_{10}^2}}$$

$$\rightsquigarrow \qquad \boxed{\Rightarrow\; w = \sqrt{4 - s_{10}^2}}$$

$$\frac{w}{s_5} = \frac{s_5}{w - s_5} := \Phi \;\Rightarrow\; \Phi = \frac{1}{\Phi - 1} \;\Rightarrow\; \Phi^2 - \Phi = 1 \;\Rightarrow\; \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \Phi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} > 1$$

$$\rightsquigarrow \qquad \boxed{\Rightarrow\; \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$w = \frac{s_5}{s_{10}} \;\Rightarrow\; \Phi = \frac{w}{s_5} = \frac{s_5}{s_{10}} \cdot \frac{1}{s_5} = \frac{1}{s_{10}} \;\Rightarrow\; s_{10} = \frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad \boxed{\Rightarrow\; s_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \Phi^{-1}}$$

$$s_5 = s_{10}\sqrt{4 - s_{10}^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\sqrt{4 - (\frac{\sqrt{5} - 1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{4}(5 + 1 - 2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\sqrt{2 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)} \rightsquigarrow \qquad \boxed{\Rightarrow\; s_5 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\sqrt{2 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)}}$$

$$\Rightarrow\; s_5 = \frac{1}{\Phi}\sqrt{2 + \Phi} \;\Rightarrow\; s_5^2 = \frac{1}{\Phi^2}(2 + \Phi) = \frac{2 + \Phi}{\Phi^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\Rightarrow\; s_5^2 = \frac{1}{\Phi^2}(2 + \Phi) = \frac{2 + \Phi}{\Phi^2}}$$

$$\Rightarrow\; s_5^2 = \frac{2}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} = 2(\frac{\sqrt{5} - 1}{2})^2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5 + 1 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

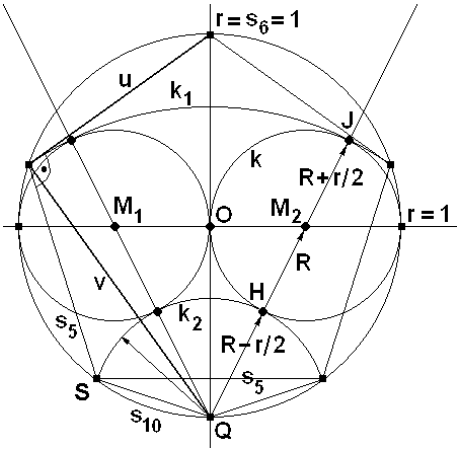
$$\rightsquigarrow \qquad \boxed{\Rightarrow\; s_5^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

Andererseits gilt aber: $s_{10}^2 + s_6^2 = (\frac{\sqrt{5} - 1}{2})^2 + 1 = \frac{5 + 1 - 2\sqrt{5} + 4}{4} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = s_5^2$

$\rightsquigarrow$ **Satz des Eudoxos (408 – 355 v. Chr.):** $s_{10}^2 + s_6^2 = s_5^2$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\Rightarrow\ s_{10}^2 + s_6^2 = s_5^2}$

Daraus ergibt sich die in der obigen Abbildung gezeigte Fünfeckkonstruktion mit Hilfe der Punkte $M,\ F,\ B$ und G.

Bemerkung: Weiter rechnet man mit $w = \sqrt{4 - s_{10}^2}$ und $s_5 = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$ sofort nach: $\rightsquigarrow$ $\boxed{\dfrac{w}{s_5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi}$



In der nebenstehenden Skizze ist eine einfachere Konstruktion gezeig. Es gilt:

$$R^2 = 1^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \ \Rightarrow\ R = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow\ v = R + \frac{r}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \ \Rightarrow\ u^2 + v^2 =$$

$$(1+1)^2 \ \Rightarrow\ u^2 = 4 - v^2 = 4 - (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2 =$$

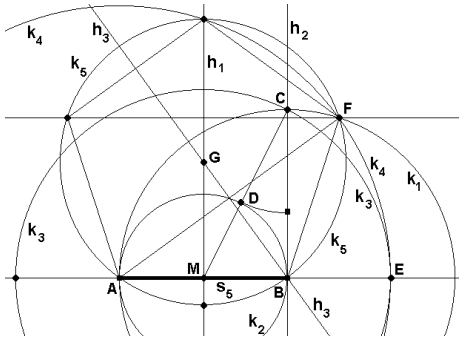
$$\frac{16-5-1+2\sqrt{5}}{4} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} = s_5^2 \quad \boxed{u = s_5}$$

Zudem ist:

$$|\overline{SQ}| = R - \frac{r}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = s_{10} \quad \boxed{|\overline{SQ}| = s_{10}}$$

☺

In der nebenstehenden Figur ist die Fünfeckkonstruktion gezeigt, wenn die Fünfeckseite s_5 gegeben ist. Die Konstruktionsschritte sind nachstehend aufgelistet.



1. $s_5 = \overline{AB}$
2. $M =$ Mittelpunkt von $\overline{AB}$
3. $k_1(M, s_5) =$ Kreis um M mit Radius s_5
4. Senkrechte h_1 in M, Senkrechte h_2 in $B \rightsquigarrow\ C$
5. $k_2(M, \frac{s_5}{2}) =$ Kreis um M mit Radius $\dfrac{s_5}{2} \rightsquigarrow\ D$
6. $\rightsquigarrow\ \overline{CD}$ ist der Major bei einer Teilung von $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt
7. $k_3(M, |\overline{CD}|) =$ Kreis um M mit Radius $|\overline{CD}| \rightsquigarrow\ E$

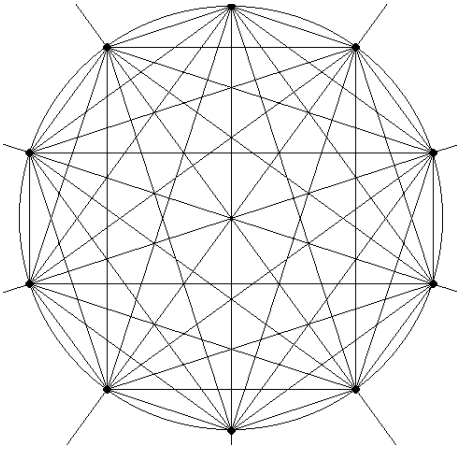
8. Falls $|\overline{AB}|$ der Major ist, dann ist $|\overline{CD}| = |\overline{BE}|$ der Minor und somit ist $|\overline{AE}|$ das Ganze, das im goldenen Schnitt durch B geteilt wird.

9. $k_4(M, |\overline{AE}|)$ = Kreis um A mit Radius $|\overline{AE}| \rightsquigarrow\ F = k_1 \cap k_4$

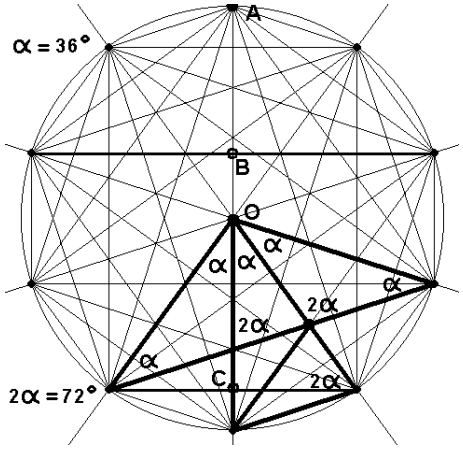
10. h_3 = Mittelsenkrechte durch $\overline{AF}$ (geht durch B) $\rightsquigarrow\ G$

11. $k_5(G, |\overline{GB}|)$ = Kreis um G mit Radius $|\overline{GB}| \rightsquigarrow$ Umkreis des Fünfecks

12. Trage s_5 von A oder F aus ab $\rightsquigarrow$ Eckpunkte des Fünfecks



Spiel mit Fünf– und Zehneck



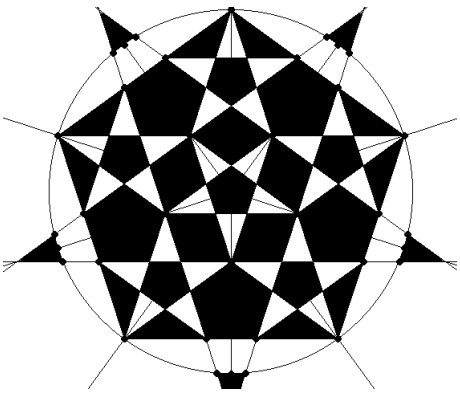
Goldener Schnitt am Fünf– und Zehneck

Mit $r_6 = 1,\ s_5 = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}},\ \dfrac{w}{s_5} = \Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ rechnet man sofort nach:

$|\overline{AB}| = \sqrt{s_5^2 - (\frac{w}{2})^2},\ \overline{OB} = 1 - |\overline{AB}|,\ |\overline{OC}| = \sqrt{1^2 - (\frac{s_5}{2})^2},\ |\overline{BC}| = |\overline{OC}| + |\overline{OB}| \rightsquigarrow$ $\boxed{\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \Phi}$

Weiter findet man damit: $\boxed{\dfrac{|\overline{AB}| + |\overline{BC}|}{2 \cdot r_6} = \dfrac{|\overline{AC}|}{d_{Umkreis}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$

Sowie: $\boxed{\dfrac{h_5}{s_5} = \dfrac{|\overline{AC}|}{s_5} = \dfrac{4 + \sqrt{2\ (3+\sqrt{5})}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}$

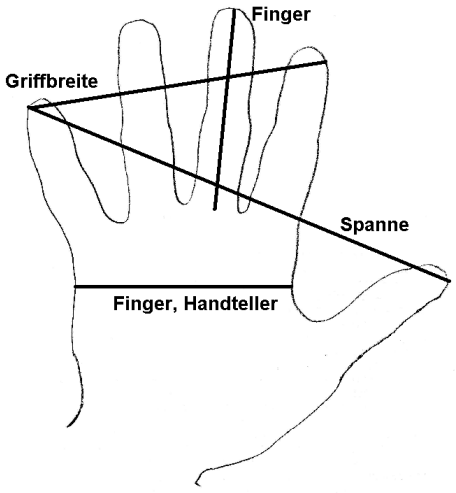


Spiel mit den Unterteilungs– und Einteilungsmöglichkeiten des Fünfecks oder des Pentagramms.

11.2.5 Alte Masse und goldener Schnitt

Ein Beispiel alter Masse

Im Mittelmeerraum und in Europa waren von der Antike bis ins 19. Jahrhundert Masse in Gebrauch, die dem menschlichen Körper und nicht der Erde entnommen waren. Darauf basierte eine Zeichen– und Konstruktionskunst mit Zirkel und Lineal, die einfachen Prinzipien folgte. Heute sind diese „menschlichen Masse“ aus dem Bewusstsein so gut wie verschwunden. Dennnoch fristen sie in alten Bauwerken, Skulpturen, Grundstückmassen, Massen von Gebrauchsgegenständen u.s.w. ein allgegenwärtiges Dasein.



214: Alte Masse an der Hand

Das Beispiel der Hand:
Die Länge des Zeigefingers ist etwa so gross wie die Breite des Handtellers. Die Handspanne oder Spanne wird bei ausgespreizten Fingern inklusive Daumen gemessen. Die Griffbreite der vorderen Finger ist bei normal gespreitzen Vorderfingern abgenommen (Vorderhandspreize).

Bis ins 19. Jahrhundert war auch das Problem der regionalen Verschiedenheit der dem Menschen entnommenen Masse ein recht grosses Ärgernis. Diese lokalen, lokalstaatlich legitimierten Abweichungen waren Sand im Getriebe von Industrie und Handel. Die Beseitigung dieser Hemmnisse hat auch die Entstehung grossflächiger staatlicher Strukturen begünstigt...

Sicherlich selbsterklärend erscheint uns der Begriff der Elle, mit der der Schneider — entweder mit seiner eigenen Elle resp. Unterarmlänge, oder mit dem neutralen Ellenstab — das Tuch gemessen hat.

Hier wollen wir uns im Folgenden auf die „königliche ägyptische Elle“ stützen, geschätzt auf 52.36 cm.

In der nachfolgenden Skizze ist ein Massstab abgebildet, dessen Masse in der untenstehenden Tabelle dargestellt werden:

214: Massstab

Als Basis für den Systemaufbau soll hier die „Line“ oder Linienbreite gelten. Eine Linie entspricht etwa der Grösse eines Orangenkerns: 1 $Linie \mathrel{\hat{=}} 0.2247\ cm$.

Nr.	Strecke	*cm*	*Linien*	Mass
1	$\lvert\overline{OA}\rvert$	7.64	34	1 Handballen
-	-	2.70	12	Daumen
2	$\lvert\overline{AB}\rvert$	12.36	55	1 Vorderhandspreize
3	$\lvert\overline{BC}\rvert$	20.00	89	1 Spanne
4	$\lvert\overline{CD}\rvert$	32.36	144	1 Fuss (= 12 Daumen)
5	$\lvert\overline{DE}\rvert$	52.36	233	1 Elle
-	-	194.16	864	1 Klafter (= 6 Fuss)

Zwischen den 5 Strecken auf dem Massstab sind bemerkenswert interessante rekursive Beziehungen abzulesen:

1 Elle	=	1 Fuss	+	1 Spanne
1 Fuss	=	1 Spanne	+	1 Vorderhandspreize
1 Spanne	=	1 Vorderhandspreize	+	1 Handballen

Man findet hier das Bildungsgesetz der Fibonaccifolge! Die nachfolgende Masseinheit erhält man durch Addition der beiden vorangehenden Einheiten: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Wir wissen, dass bei der Fibonaccifolge das Verhältnis $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen das Verhältnis $\varphi = \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ des goldenen Schnitts konvergiert.
($\rho = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, φ wegen dem grossen griechischen Bildhauer Phidias.) Daher gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \varphi, \;\; a_{n+1} \approx \varphi \cdot a_n \approx \varphi^2 \cdot a_{n-1} \approx \varphi^3 \cdot a_{n-2} \approx \ldots \approx \varphi^{n+1} \cdot a_1 = \varphi^{n+1}$$

$$\Rightarrow \; a_n \approx \varphi^n$$

Wir haben es also bei der Fibonaccifolge approximativ mit einer geometrischen Folge zu tun. Hier entspricht demnach die Addition von Zahlen (die Fibonaccifolge ist additiv rekursiv) der Multiplikation von Potenzen (geometrische Folge). Die Multiplikation kann daher hier mittels Ersetzung durch eine Addition vereinfacht werden! Das war wohl der „Trick“...

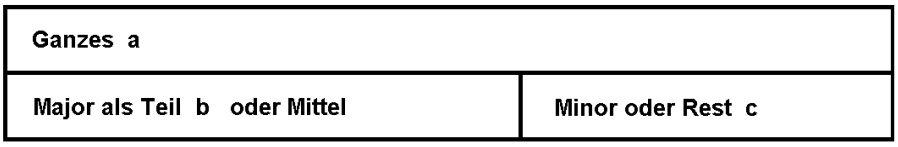
11.2.6 Beziehungen, Mittelwerte, Lucaszahlen

Beziehungen, Mittelwerte

Schon bei *Vitruv* in der Antike finden wir die Vorstellung des Gebäudes als äussere Hülle des Menschen: So wie die Teile des menschlichen Körpers aufeinander bezogen sind, so sollen es auch die Teile eines Gebäudes sein. Schon der grosse Philosoph *Platon* brachte Proportionen mit Schönheit in Verbindung: Zwei Teile können nur dann eine schöne Komposition bilden, wenn es ein Drittes gibt, nämlich die wahrnehmbare Beziehung. Diese erscheint im Falle des mit dem Massstab Messbaren in der Form des ausgezeichneten Verhältnisses. Diesbezüglich ist seit den alten Griechen der *Mittelwert* das Fundament der Theorie der Proportionen oder Verhältnisse. In den Anwendungen kommen vor allem drei Typen von einfachen Mittelwerten häufig vor:

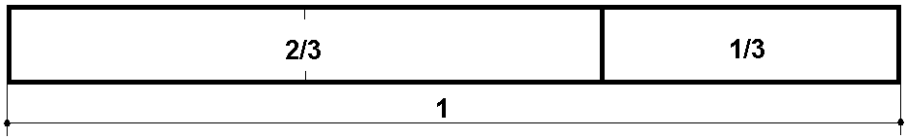
Mittelwert	Assoziation	Berechnung	Idee
arithmetisch	instinktiv	$m = \frac{a+b}{2}$	Streckenmitte mittlere Länge
geometrisch	gnostisch	$m = \sqrt{a \cdot b}$	Flächenmittel Quadrat zu geg. Rechteck
harmonisch	intuitiv	$m = \frac{2\,a\,b}{a+b}$	gewichtete Rechtecke $a \cdot m + b \cdot m = a \cdot b + a \cdot b$

Teilt man eine Strecke in zwei Teilen, so ist immer das Ganze auf die Teile bezogen. Es gibt also die Möglichkeit der Erfassung des Verhältnisses des Ganzen zum grösseren Teil (Major) im Vergleich zum Verhältniss des grösseren Teils zum kleineren Teil (Minor).

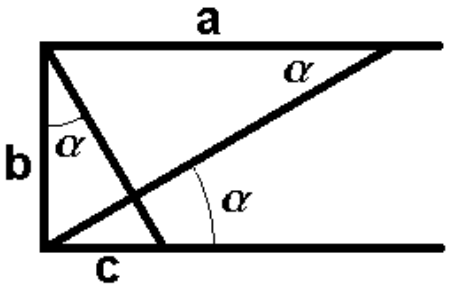


214: Im goldenen Schnitt geteilt

Z.B. beim goldenen Schnitt, den wir als das Mass des Menschen kennen, gilt: $\varphi = \dfrac{Ganzes}{Major} = \dfrac{Major}{Minor} \notin \mathbb{R}$.
Beim geometrischen Mittel dagegen ist $m = Major = \sqrt{Ganzes \cdot Minor}$. Ist das Ganze und der Minor hier rational, so kann auch der Major je nach Fall rational werden — oder eben auch nicht.
Eine Teilung des Ganzen in sich rational verhaltende Teile führt zu den pythagoräischen Grundlagen unserer abendländischen Musik (Tonleitern).

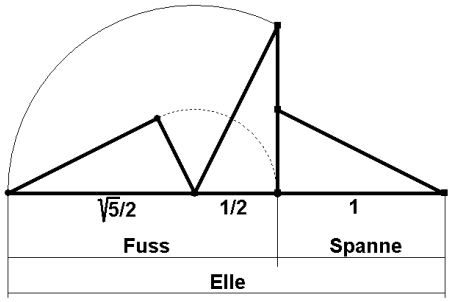


214: Beispiel einer rationale Teilung



214: $a : b = b : c$

$\rightsquigarrow$ Goldener Schnitt!



214: Spanne + Fuss = Elle

$\rightsquigarrow$ Goldener Schnitt rational angenähert!

Lucaszahlen

Wir wissen: $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618, \quad \rho = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618, \quad \rho + 1 = \varphi, \quad \varphi^2 = \varphi + 1.$

Weiter erhält man Approximationen für die Fibonaccizahlen mittels $a_n \approx \varphi^n, \ n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Ersetzt man nun die Werte φ^n durch ihre Rundung auf die nächstliegende natürliche Zahl, so erhält man die **Lucaszahlen** (nach Eduard Lucas, 19. Jhdt.). Damit erhlaten wir als schnell gerechnete Näherung für die Fibonaccizahlen: $\varphi = \varphi^1 \approx \dfrac{a_{n+1}}{a_n}, \ \varphi^k \approx \dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1-k}}, \ldots$

Die ersten Lucaszahlen:

φ^n	Näherungswert	Lucaszahl u_k	Abweichung $\lvert\varphi^k - u_k\rvert < 1\ \%$
φ^0	1	1	
φ^1	1.618	2	
φ^2	2.618	3	
φ^3	4.230	4	
φ^4	6.854	7	
φ^5	11.090	11	gut
φ^6	17.944	18	gut
φ^7	29.034	29	gut
φ^8	46.978	47	gut
φ^9	76.013	76	gut
φ^{10}	122.992	123	gut
φ^k	...	...	gut

Bsp.:

$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8,$
$a_2 3 = 46368 \approx a_5 \cdot \varphi^1 8 \approx a_5 \cdot \varphi^1 8 \approx a_5 \cdot u_{18} = 8 \cdot 5778 = 46224$
Differenz: $a_2 3 - a_5 \cdot u_{18} = 46368 - 46224 = 144 \mathrel{\hat{=}} 0.310559\%$

Kapitel 12

Polyederwerkstatt

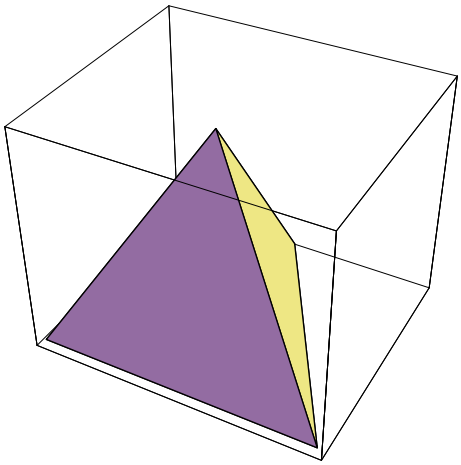
12.1 Graphiken generiert mit dem Mathematica–Package

Die nachfolgenden Graphiken sind mit dem *Mathematica*–Standardpackage „Polyhedra“ generiert worden. Das File mit den Programmbefehlen ist abrufbar über Internet via die Home–Page des Autors:

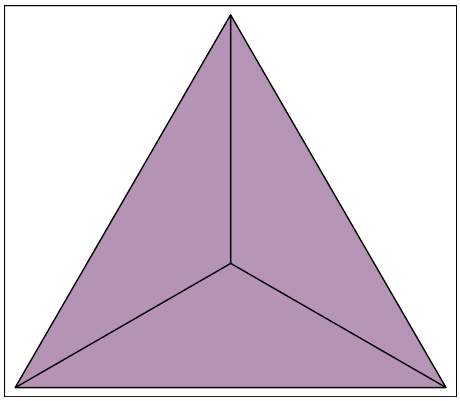
http://www.rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html

$\rightsquigarrow$ Packages, Projects ..... $\rightsquigarrow$ Polyeder-Werkstatt (unten auf der Seite)

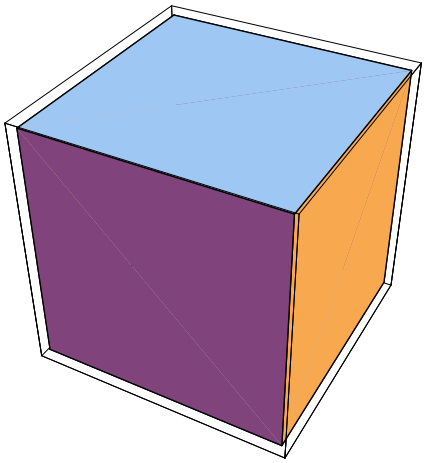
Nachfolgend sind einige mit dem File generierbaren Illustrationen gezeigt:



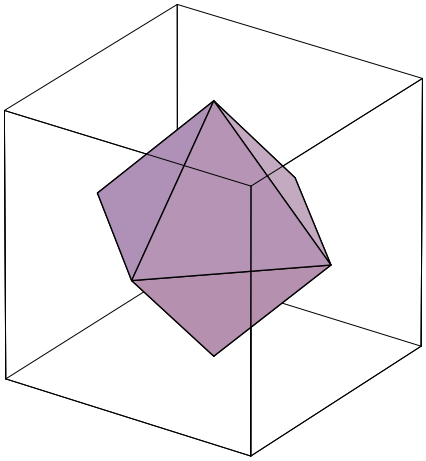
Tetraeder: Ansicht



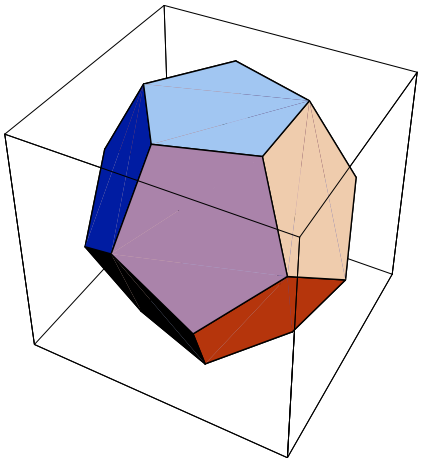
Tetraeder: Riss



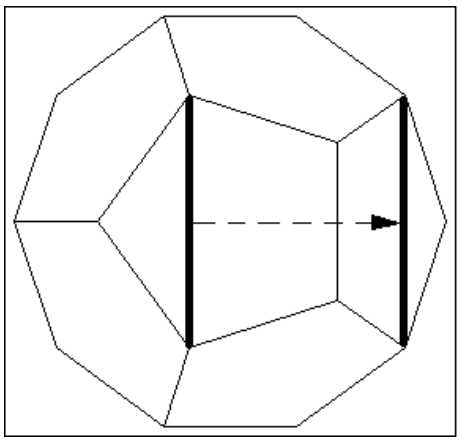
Würfel: Ansicht



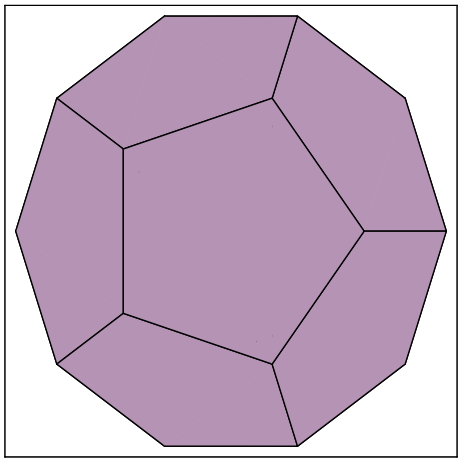
Oktaeder: Ansicht



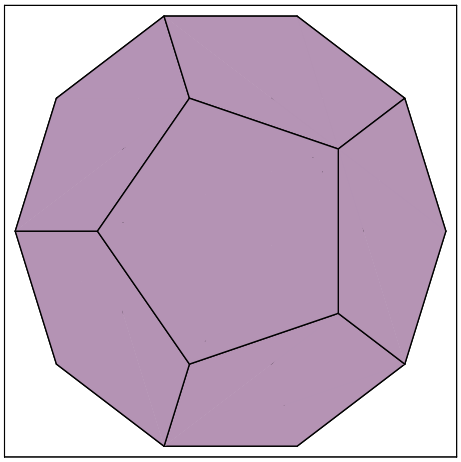
Dodekaeder: Ansicht



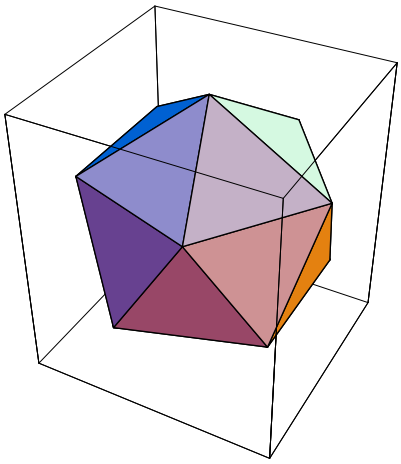
Aus den untenstehenden Rissen kann man unmittelbar geometrische Beziehungen ablesen. Die Sehne des innern Fünfecks erscheint aussen in der Projektion wieder als Sehne in ihrer wahren Länge. Aussen ist ein regulätes Zehneck sichtbar. Die Kantenlänge des zum Zehneck gehörenden Fünfecks ist daher im innern Fünfeck die Sehnenlänge und daher bekannt!



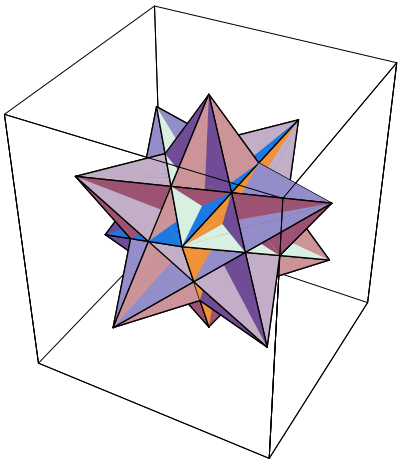
Dodekaeder: Riss



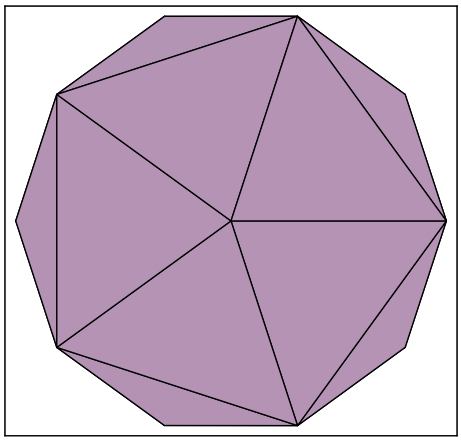
Dodekaeder: Riss



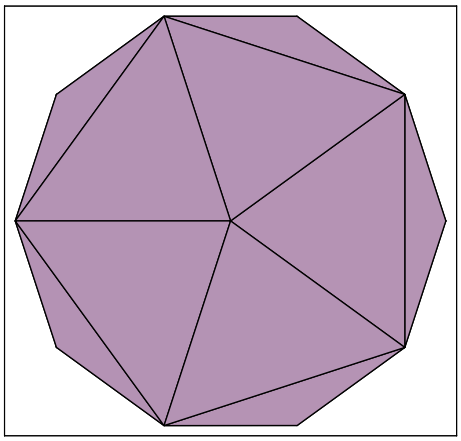
Ikosaaeder: Ansicht



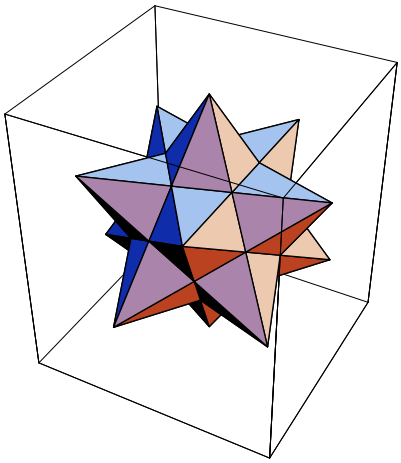
Poinsots Stern



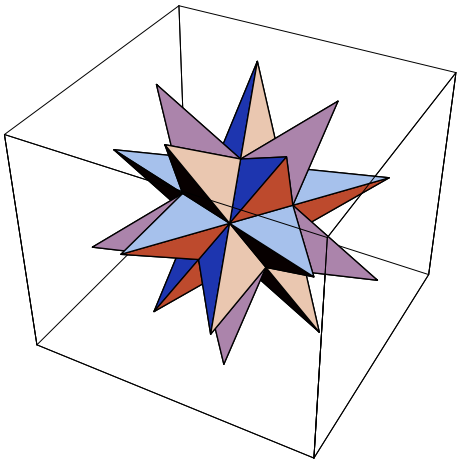
Ikosaaeder: Riss



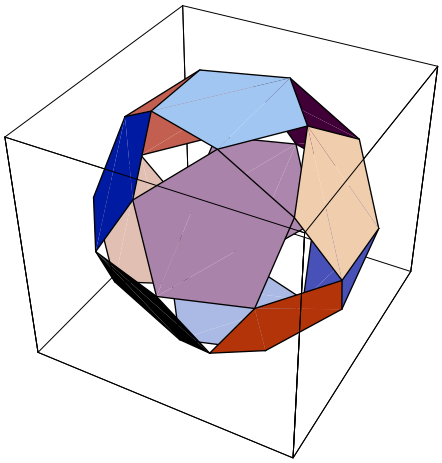
Ikosaaeder: Riss



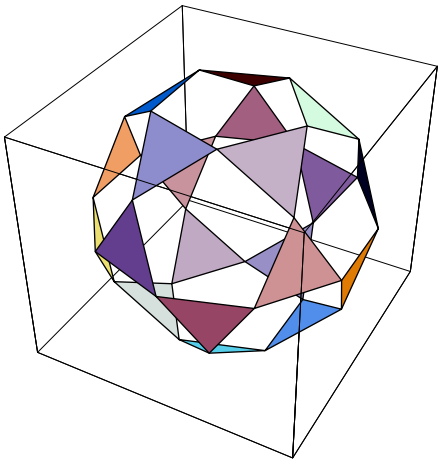
Keplerstern



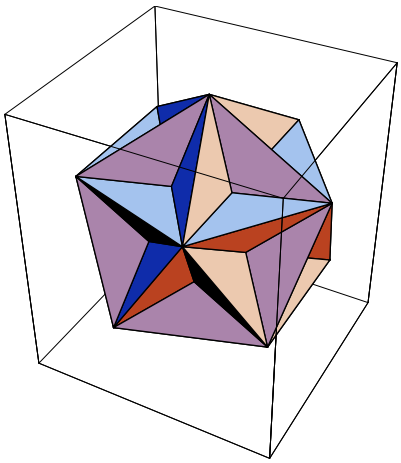
Ikosaaederstern



Ikosidodekaeder



Ikosidodekaeder



Umhüellender Stern

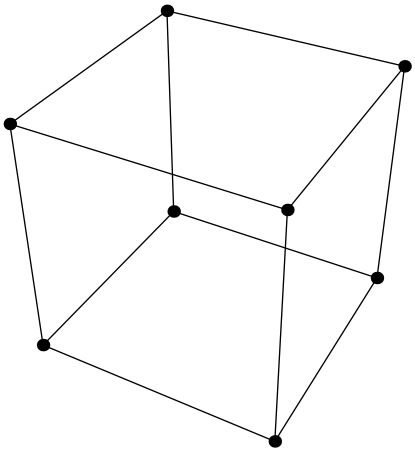
Für weitere in *Mathematica* vorprogrammierten Spezialitäten gehören z.B. Polytope (regelmässige n-Ecke) und Flächen sowie geodätische Abbildungen der Polyeder auf die Kugel.

Im nahfolgenden Abschnitt wollen wir aber einen andern Weg einschlagen. Es geht nun darum, die Möglichkeit der einfachen zeichnerischen Entwicklung oder Programmiserung der Polyeder und ihrer Verwandten zu studieren. Wir beginnen deshalb nochmals ganz von vorne!

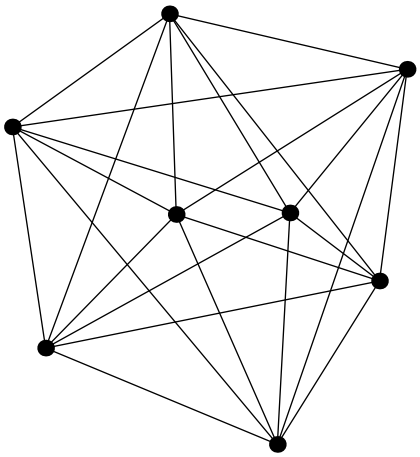
12.2 Studium der Körper um Graphiken selber einfach entwickeln zu können

12.2.1 Würfel, Tetraeder, Oktaeder

Ein einfacher Weg zur Gewinnung von Ansichten, Rissen und auch grössenmässiger Beziehung scheint mir die Ableitung aus dem Kubus oder Würfel zu sein. Dabei gehen wir von einem Würfel mit einfachsten, symmetrisch angeordneten Koordinaten aus:
$P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (-1,1,1)$, $P_3 = (-1,-1,1)$, $P_4 = (1,-1,1)$, $P_5 = (1,1,-1)$, $P_6 = (-1,1,-1)$, $P_7 = (-1,-1,-1)$, $P_8 = (1,-1,-1)$.
(Im eingangs erwähnten File sind diese Punkte noch zusätzlich automatisch generiert worden, um die Möglichkeiten der Programmierung zu zeigen.) Damit gewinnen wir den nebenstehend in 3D–Darstellung gezeigten Würfel.

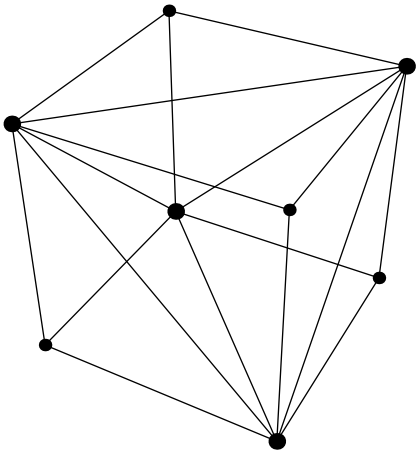


Würfel

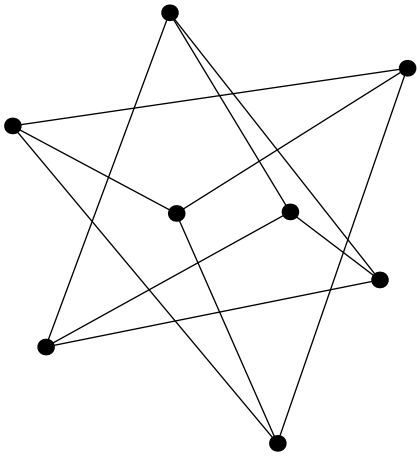


2 Tetraeder im Würfel

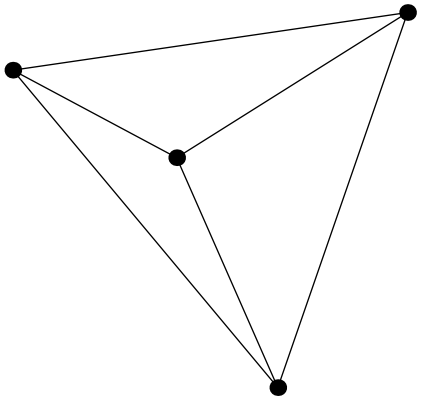
Durch Weglassen von Ecken erzeugen wir daraus das Tetraeder. Dabei gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, wie die Bilder zeigen.



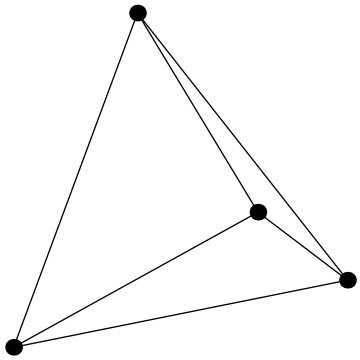
Tetraeder aus dem Würfel



2 Tetraeder aus dem Würfel

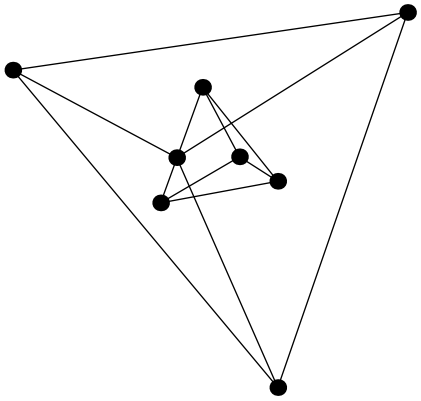


Tetraeder 1 einzeln

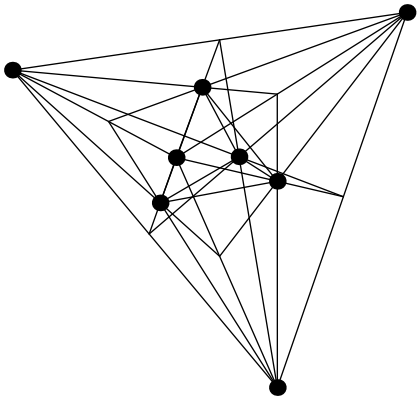


Tetraeder 2 einzeln

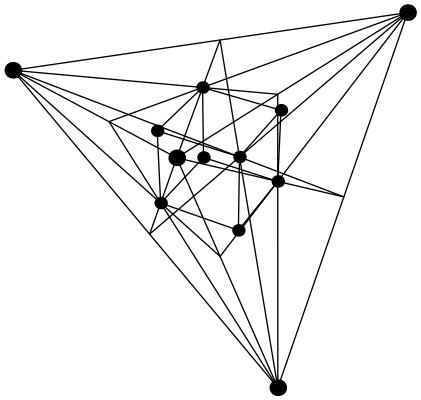
Tetraeder sind zu sich selbst dual: Die Flächenmittelpunkte bilden je wieder ein Tetraeder. Deise Mittelpunkte sind einfach berechenbar als arithmetische Mittel der Ortsvektoren der angrenzenden Ecken.



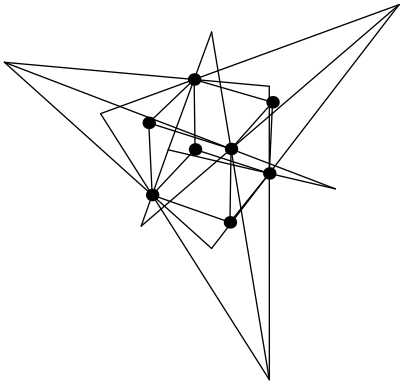
Tetraeder im Tetraeder



Tetraeder im Tetraeder mit Flächenhöhen

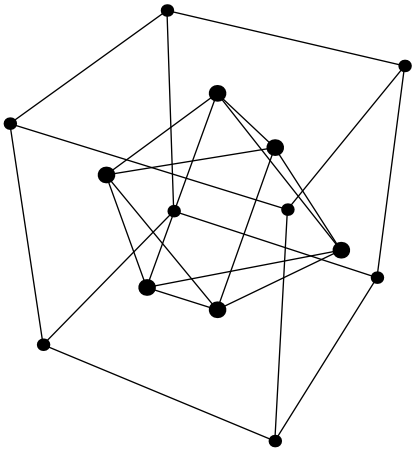


Würfel im Tetraeder

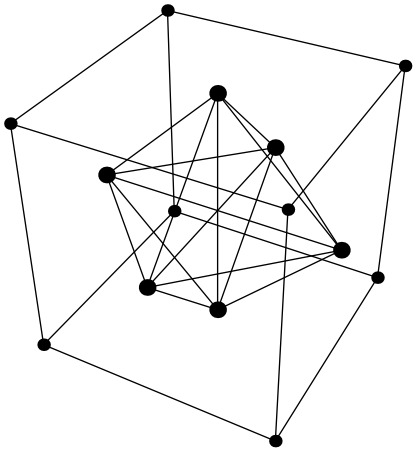


Würfel im Tetraeder

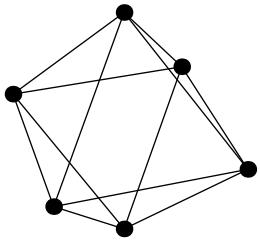
Den Würfel im Tetraeder können wir als „Umwürfel“des obigen Innentetraeders gewinnen. Das Oktaeder hingegen ergibt sich direkt aus den Flächenmittelpunkten des Würfels.



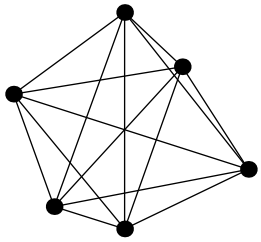
Würfel mit Oktaeder



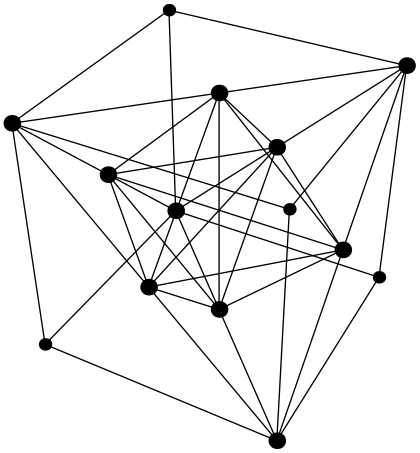
Raumachsen von Würfel und Oktaeder



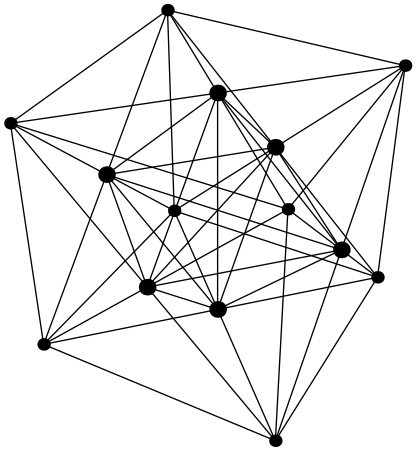
Oktaeder



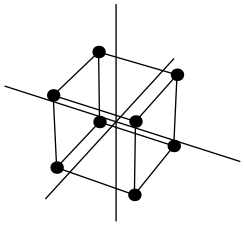
Oktaeder mit Raumachsen



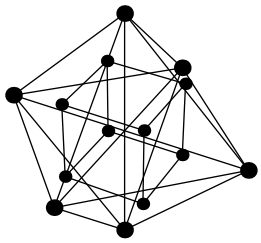
Oktaeder in Tetraeder in Würfel



Oktaeder in 2 Tetraeder in Würfel

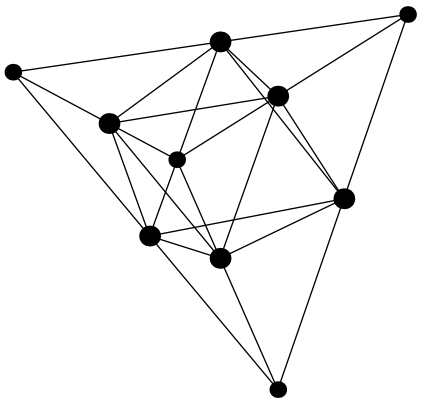


Innenwürfel zu einem Oktaeder



Oktaeder um den Innenwürfel

Der nächste Schritt wäre nun die Konstruktion des Dodekaeders und oder des Ikosaeders. Dies gelingt nicht einfach so aus der Anschauung heraus. Wir müssen erst einige Berechnungen anstellen und ein Konzept entwickeln. Vorerst stellen wir noch die einfach ablesbaren Gesetze zum Würfel, Tetraeder und Oktaeder zusammen, damit wir bei Bedarf darauf zurückgreifen können.



Oktaeder im Tetraeder

12.2.2 Gesetze zu Würfel, Tetraeder, Oktaeder

Berechnungen zum Würfel

Sei s_W = Kantenlänge des Würfels. (Eingangs ist hier der Wert von $s_W = 2$ gesetzt worden.) Wir finden dann:

Flächendiagonale	$d_{F,W} = \sqrt{2}\, s_W$
Körperdiagonale	$d_{V,W} = \sqrt{3}\, s_W$
Umkreisradius	$r_{U,W} = \dfrac{d_{V,W}}{2}$
Inkreisradius	$r_{I,W} = \dfrac{s_W}{2}$
Kantenmittelpunktskreisradius	$r_{K,W} = \dfrac{d_{V,W}}{2}$
Oberflächeninhalt	$A_W = 6\, s_W^2$
Volumeninhalt	$V_W = s_W^3$

Berechnungen zum Tetraeder

Sei s_T = Kantenlänge des Tetraeders. Wir finden dann:

Bezug zum Ausgangswürfel	$s_T = d_{F,W}$
Flächenhöhe	$h_{F,T} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, s_T$
„Flächendiagonale“	$d_{F,T} = h_{F,T}$
Körperhöhe	$h_{V,T} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, s_T$
Umkreisradius	$r_{U,T} = \frac{2}{3}\, h_{V,T}$
Inkreisradius	$r_{I,T} = \frac{1}{4}\, h_{V,T}$
Kantenmittelpunktskreisradius	$r_{K,T} = \sqrt{r_{I,T}^2 + (\frac{1}{3}\, h_{F,T})^2}$
Oberflächeninhalt	$A_T = 2\, s_T \cdot h_{F,T}$
Volumeninhalt bezüglich s_T	$V_T = \frac{s_T \cdot h_{F,T} \cdot h_{V,T}}{6}$
Volumeninhalt bezüglich s_W	$V_T = s_W^3 - 4 \cdot s_W \cdot \frac{s_W}{2} \cdot s_W \cdot s_W \cdot \frac{1}{3} = \frac{s_w^3}{3}$

Berechnungen zum Oktaeder

Sei s_O = Kantenlänge des Oktaeders. Wir finden dann:

Bezug zum Ausgangswürfel	$s_O = \frac{\sqrt{2}}{2}\, s_W$
Flächenhöhe	$h_{F,O} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, s_O$
„Flächendiagonale“	$d_{F,O} = h_{F,O}$
Körperhöhe resp. Körperdiagonale	$h_{V,O} = d_{V,O} = s_W$
Halbvolumenhöhe	$h_{V,O,h} = \frac{s_W}{2}$
Umkreisradius	$r_{U,O} = \frac{h_{V,O}}{2}$
Inkreisradius	$r_{I,O} = \sqrt{(\frac{s_O}{2})^2 - (\frac{h_{F,O}}{3})^2}$
Kantenmittelpunktskreisradius	$r_{K,O} = \frac{1}{2}\, s_O$
Oberflächeninhalt	$A_O = 8 \cdot s_O \cdot h_{F,O}$
Volumeninhalt bezüglich s_O	$V_O = \frac{2 \cdot s_0^2 \cdot h_{V,O,h}}{3}$

12.2.3 Modellbau

Falls der Leser noch keine Modelle der platonischen Körper besitzt, so ist es jetzt ratsam, sich rasch welche zu bauen. Dazu braucht es sehr wenig Vorkenntnisse. Man muss lediglich wissen, dass solche Körper existieren und wieviele Flächen welcher Art sie besitzen. Zudem überlege man sich, wieviele Flächen jeweils an einer Ecke zusammenstossen. Selbstverständlich müssen es mindestens drei n–Ecke sein, denn nur zwei geben keinen räumlichen Winkel. Man kann sich überlegen, dass nur entweder drei, vier oder fünf regelmässige Dreiecke an einer Ecke zusammenstossen können. Bei sechs Dreiecken ist die Winkelsumme schon gleich einem vollen Winkel, sodass nur noch eine Fläche und nie ein Körper entstehen

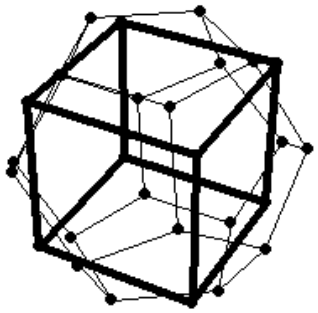
kann. Bei Quadraten geht es mit dreien. Vier Quadrate führen wieder zu einem vollen Winkel und daher zu einer Parkettierung der Ebene, also nicht zu nicht zu einem räumlichen Gebilde. Genauso verhält es sich mit Fünfecken. Und dann ist Schluss. Denn schon mit je drei zusammenstossenden Sechsecken kommen wir wieder zu einer Parkettierung der Ebene, also nicht zu einem räumlichen Gebilde. Und dann weiter: Sieben–, Achtecke u.s.w. führe zu zu grossen Winkeln beim Zusammenstossen. Daher sind die Möglichkeiten ausgeschöpft. Mit diesen Kenntnissen ist es jetzt sofort möglich, sich Modelle zu bauen, indem man sich Eckenmodelle anfertigt und diese dann zusammenfügt. Und wenn es nicht das erste Mal schon sauber gelingt: Ein wenig probieren macht dabei nur Spass. An den Flächenenden muss man dabei etwas Zusatzfläche fürs Kleben einplanen. Wir halten daher fest:

Körper	Flächentyp		Anzahl Anstossflächen in einer Ecke	Totale Anzahl Flächen
Tetraeder	Dreieck	3	3	4
Hexaeder	Quadrat	4	3	6
Oktaeder	Dreieck	3	4	8
Dodekaeder	Fünfeck	5	3	12
Ikosaeder	Dreieck	3	5	20

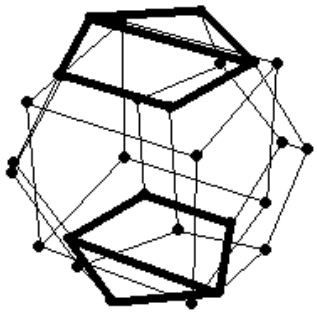
12.2.4 Das Dodekaeder

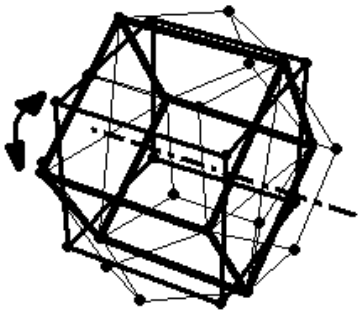
Konstruktionsideen

Wer jetzt ein Modell eines Dodekaeders in den Händen hält, kann sich davon überzeugen, dass es möglich ist, einen Würfel so ins Dodekaeder zu stellen, dass die Würfelecken immer auf Dodekaederecken fallen. Die Würfelseite ist gleich lang wie eine Flächensehne des Dodekaeders. Dreht man dienen solchen Würfel um die Körperachse zu einer Dodekaederfläche, die nun eine Würfelseite enthält, so erhält man mit 4 Drehungen 5 Positionen mit total $5 \cdot 8 = 40$ Punkten, d.h. jeder Dodekaedereckpunkt wird genau zwei mal durch den Würfel erzeugt. Um das durchführen zu können, müssen wir lediglich den Kippwinkel von der alten Position in achsenparalleler Lage zur neuen Postion des Würfels im Dodekaeder berechenen können. Das führen wir nun durch.



Das nebenstehende Bild zeigt den Würfel, aus dem das Dodekaeder erzeugt werden soll. Die Würfelkante ist gleich lang wie die Fünfeckdiagonale (Bild unten links). Im Bild unten rechts ist die Kippsituation gezeigt. Nach dem Kippen wird der Würfel in 5 Lagen um die senkrechte Raumdiagonale des Dodekaeders gedreht und erzeugt so die Eckpunkte des Dodekaeders.



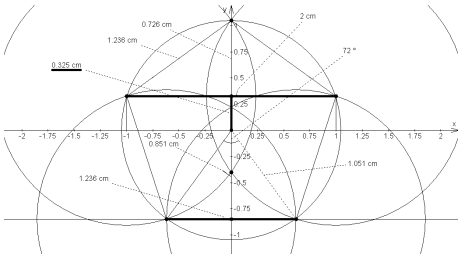


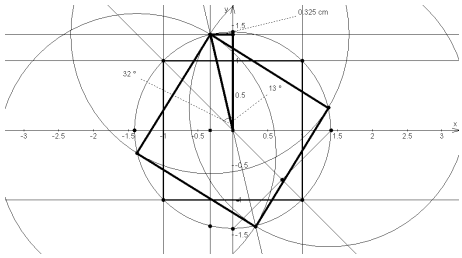
Bemerkung: Eine andere Methode wäre, mit Hilfe von Überlegungen mittels Proportionen, rechtwinkligen Dreiecken und dem goldenen Schnitt im Fünfeck einige Fünfeckpunkte zu berechnen um damit die Lage der sechs Raumdiagonalen des Dodekaeders bestimmen zu können (vgl. Bemerkung zu den Rissen Seite 264). Anschliessend müsste man wieder durch viermalige Drehung um diese Achsen die restlichen, fehlenden Punkte schrittweise bestimmen. Dieses Verfahren schien mir etwas aufwendiger.

Fazit: Die regulären Polyeder zerfallen in die *irdenen Reihe* (irden wegen dem Bezug zu den Mineralien) und die *goldene Reihe* (golden wegen dem Bezug zum goldenen Schnitt). Irden sind Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder. Golden sind Dodekaeder und Ikosaeder. Der Weg von der irdenen zur goldenen Reihe führt über die Drehung.

Berechnungen zum Dodekaeder aus dem Würfel

Im Folgenden benutzen wir die Figur zur Fünfeckkonstruktion auf der Basis der Fünfeckseite (vgl. Seite 256) sowie die beiden unten abgebildeten Figuren.

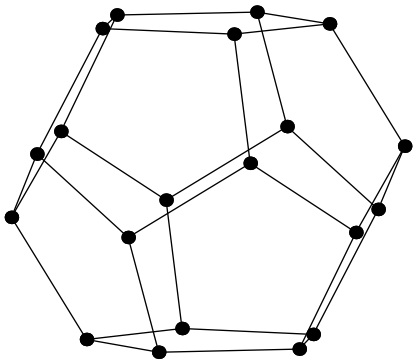




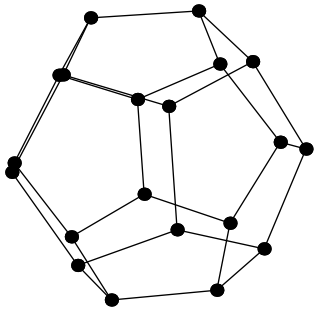
Sei s_D = Kantenlänge des Dodekaeders. Nun können wir die nachfolgenden Zusammenhänge ablesen resp. nachvollziehen aufgrund der Kenntnisse über den goldenen Schnitt am Fünf– und Zehneck, denn die Würfelseite ist ja die Fünfecksehne des Dodekaeders:

Bezug zum Ausgangswürfel	$s_D = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, s_W$
Umkehrung: Dodekaedersehne	$d_D = s_W = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, s_D$
Umkreisradius Fünfeck	$r_{U,F} = r_{6,F} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{5}-1)^2}}\, s_D$
Sechseckseite zu Fünfeck	$r_{6,F} = r_{U,F}$
Höhe Fünfeckseite – Fünfeckmittelpunkt	$h_{F,S,O} = \sqrt{r_{6,F}^2 - (\frac{s_D}{2})^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s_O$
Höhe Fünfeckeckpunkt – Fünfecksehne	$h_{F,E,O} = \sqrt{s_D^2 - (\frac{d_D}{2})^2}$
Kippdistanz Würfelkante Fünfeckmitte	$d_{Kipp,O} = r_{6,F} - h_{F,E,O}$
Drehwinkel Würfel alte–neue Lage	$\varphi = \frac{\Pi}{4} - \arcsin(\frac{d_{Kipp,O} \cdot 2}{d_{F,W}})$
φ in Grad	$\varphi = 45^o - \arcsin(\frac{d_{Kipp,O} \cdot 2}{d_{F,W}})^o$

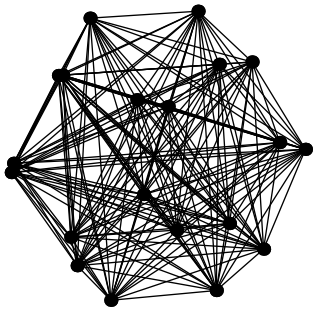
Die Berechnung der weiteren Grössen wie $V_D,\ O_D,\ r_{U,D}$ u.s.w. kann man auf einfache Weise mittles der Vektorrechnung durchführen, wenn erst einmal die Koordinaten der Eckpunkte bekannt sind.



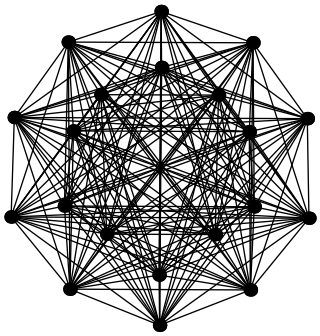
Dodekaeder



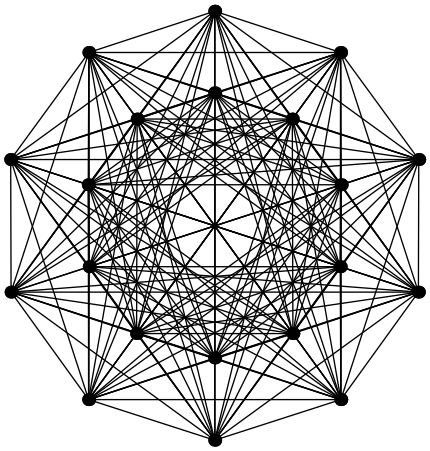
Dodekaeder, anderer Blickpunkt



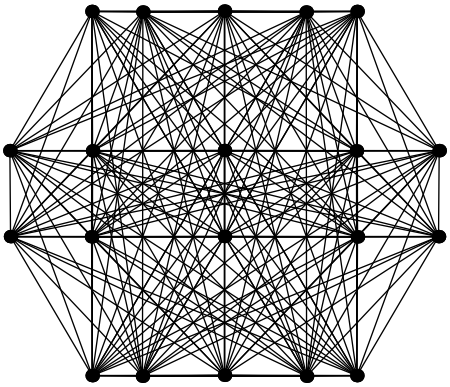
Dodekaeder mit allen Diagonalen



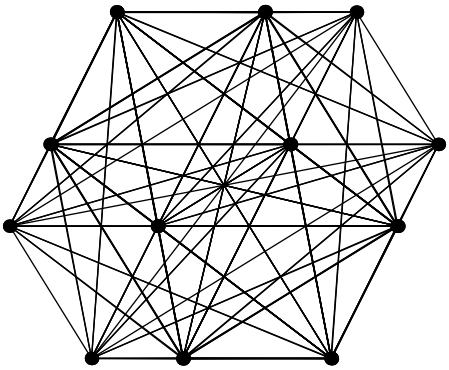
Dodekaeder, neuer Blickpunkt



Dodekaeder, anderer Blickpunkt



Dodekaeder, neuer Blickpunkt



Dodekaeder, anderer Blickpunkt

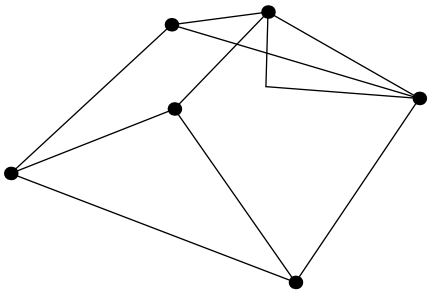
Man ist sofort erstaunt über die durch die Vielfalt der Diagonalen gewonnene neue Sicht. Es zeigt sich eine unerwartete Schönheit der Struktur, die hinter dem vermeintlich so Banalen steckt, und die je nach Lage des Körpers in eine phantastischen Symmetrie mündet. Es entstehen unerwartete Ornamente...

12.2.5 Das Dodekaeder aus dem Würfel mit goldenem Dach

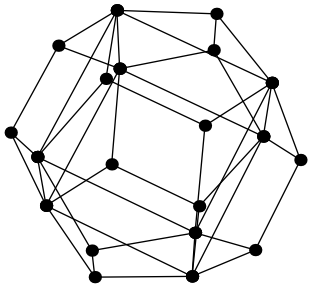
Konstruktionsidee

Da sich ein Dodekaeder aus dem Würfel durch Drehung generieren lässt, können wir noch einen andern einfachen Konstruktionsweg verfolgen. Die Würfelkante ist bei dieser Generierungsart ja die Flächensehne d_D des Fünfecks. Wie wir oben bemerkt haben, gilt ja: Dodekaederseitenlänge $s_D = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\, s_W$, s_W = Würfelkantenlänge. Umkehrung: Dodekaedersehnenlänge $d_D = s_W = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\, s_D = s_D \cdot \rho$.

Wir können uns nun das Dodekaeder entstanden denken durch Aufsetzen des jeweils fehlenden Volumens auf die jeweilige Würfelfläche. Ein solches Volumen hat die Form eines Walmdaches (goldenes Dach). Dabei kennen wir alle Kantenlängen ($d_D = s_W$ und s_D) und können somit aus den bekannten Würfeleckpunkten die Dachhöhe nach Pythagoras berechnen, denn bezüglich der x– und der y–Achse ist die nebenstehende Figur achsialsymmetrisch.
Wenn wir diesen Würfel in achsenparalleler Lage (Würfelzentrum = Koordinatenursprung) mit dem aufgesetzten goldenen Dach um die x–Achse und dann noch um die y–Achse drehen — oder erst um die y–Achse und dann um die x–Achse — und noch alle diese drei jetzt vorhandenen Volumen am Ursprung spiegeln, so entsteht das Dodekaeder.



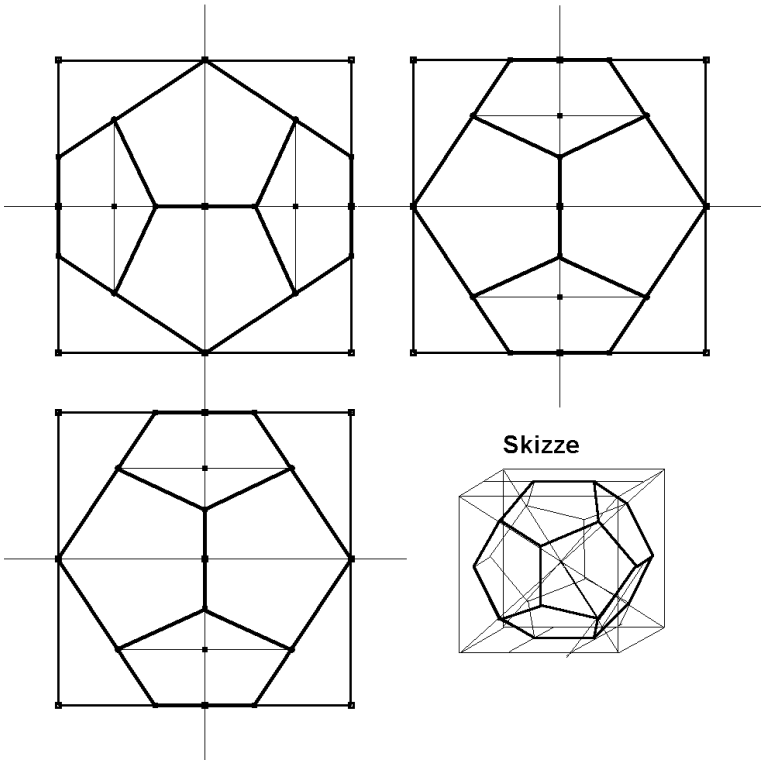
Doldenes Dach



Dodekaeder aus geldenem Dach

12.2.6 Das Dodekaeder auf der Kante

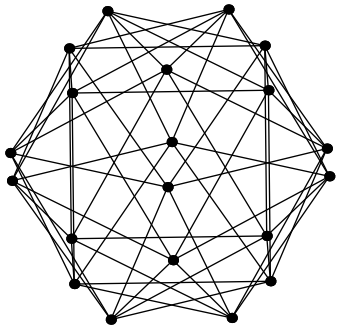
Stellt man ein Dodekaeder im labilen Gleichgewicht auf eine Kante, so ergibt sich eine einfache Rissdarstellung in einem umgebenden Würfel, der sechs der Dodekaederkanten jeweils in den Mitten der Würfelflächen patallel zu den Würfelkanten berührt. Die Masse lassen sich auf der Grundlage der auf Seite 257 hergeleiteten Formeln gewinnen:



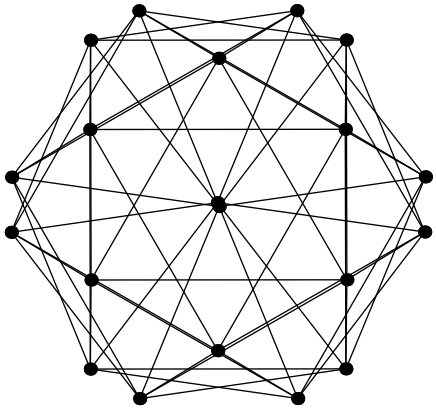
Dodekaeder im Würfel auf einer Kante, Risse

12.2.7 Würfelfünfling

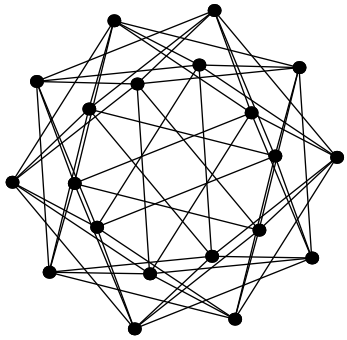
Wir kippen den Würfel nochmals wie bei der ersten Mehtode und drehen ihn dann fünfmal zur Erzeugung des Dodekaeders, zeichnen aber nicht die Dodekaederkanten, sondern die Kanten der gedrehten Würfel, so erhalten wir einen Durchdringungskörper, bestehend aus 5 Würfeln: Den **Dodekaederfünfling**. Dieser Fünfling ist unten abgebildet von verschiedenen Sichtpunkten aus gesehen. Die Durchdringungskanten sind hier nicht eingezeichnet.



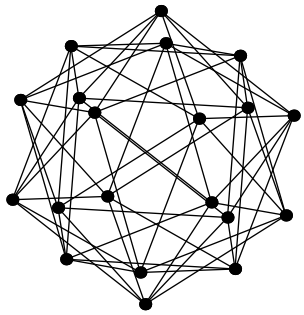
Würfelfünfling, Ansicht 1



Würfelfünfling, Ansicht 2



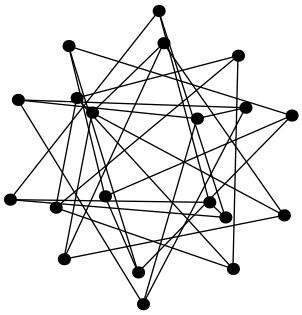
Würfelfünfling, Ansicht 3



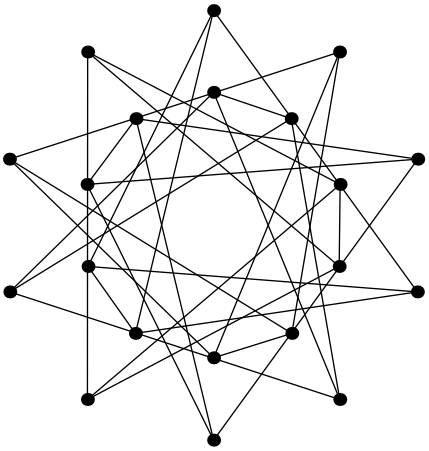
Würfelfünfling, Ansicht 4

12.2.8 Tetraederfünfling

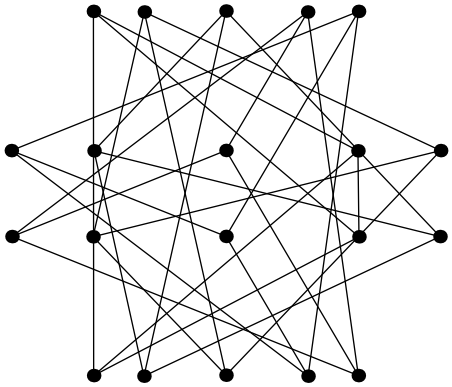
Statt zur Generierung des Dodekaeders den Würfel zu nehmen, können wir eines der beiden mit den Würfelecken definierbaren Tetraeder nehmen. So entstehen bei der Drehung auch $5 \cdot 4 = 20$ Punkte, also das Dodekaeder. Wenn wir dann wieder an Stelle der Dodekaederkanten diese 5 so durch Drehung entstehenden Tetraeder betrachten, sehen wir einen **Tetraederfünfling**. Unten ist ein solcher Fünfling abgebildet (wieder von verschiedenen Sichtpunkten aus gesehen). Die Durchdringungskanten sind wieder nicht eingezeichnet.



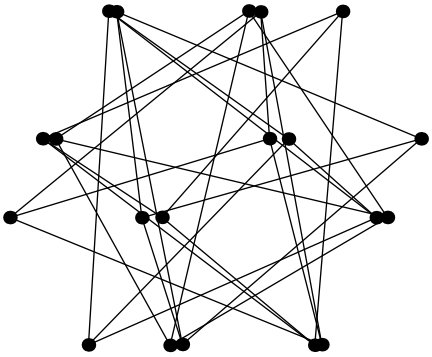
Tetraederfünfling, Ansicht 1



Tetraederünfling, Ansicht 2



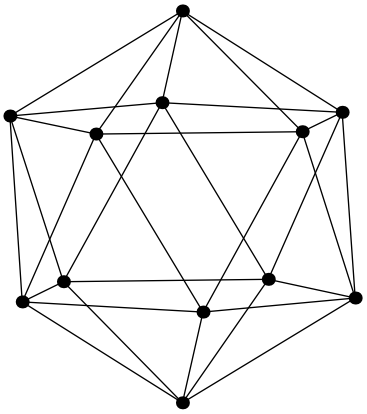
Tetraederfünfling, Ansicht 3



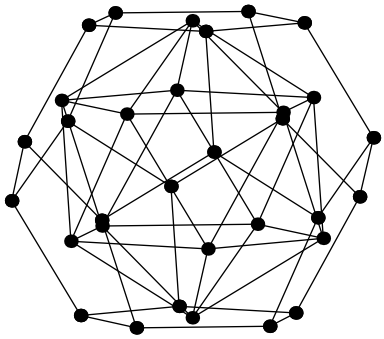
Tetraederfünfling, Ansicht 4

12.2.9 Das Ikosaeder

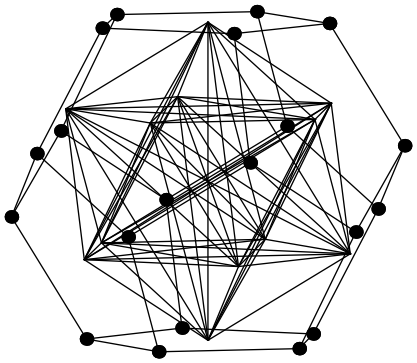
Wir erzeugen nun das Ikosaeder, indem wir die Flächenmittelpunkte des Dodekaeders benutzen. Diese sind durch das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der Eckpunkte des jeweiligen Fünfecks zu bestimmen, was keine Mühe macht:



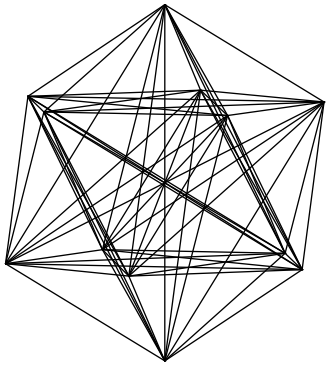
Ikosaeder



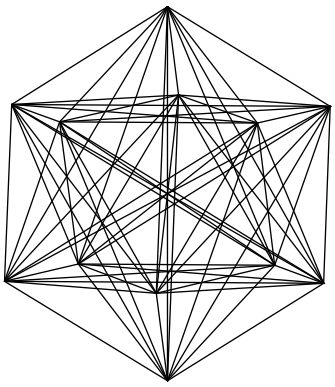
Ikosaeder im Dodekaeder



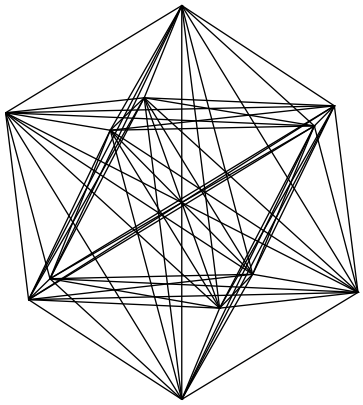
Ikosaeder im Dodekaeder mit Diagonalen



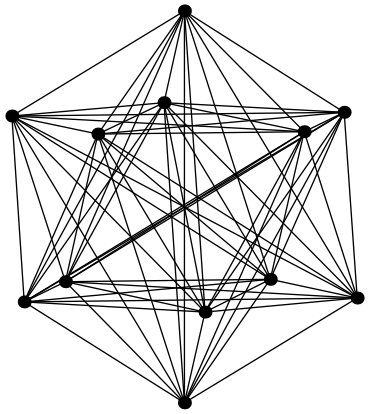
Ikosaeder mit allen Diagonalen



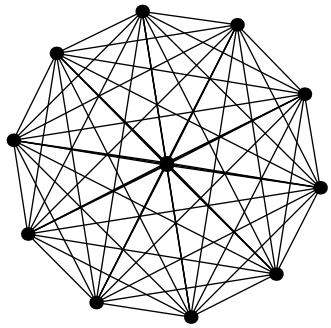
Ikosaeder, neue Sicht



Ikosaeder, wieder anders gesehen



Ikosaeder, nochmals anders



Ikosaeder, wiederum anders gesehen

12.2.10 Ausblick

Nun liegt ein weites Arbeitsfeld vor uns. Wenn wir z.B. einen Körper konstruieren, dessen Eckpunkte aus den Mittelpunkten der Oktaederseiten bestehen, so erhalten wir nicht mehr lauter gleiche reguläre Polygone als Seitenflächen. Schon eine einfache Skizze zeigt, dass wir so einen **archimedischen Körper** erhalten mit Quadraten und Dreiecken. Während bei den 5 **platonischen Körpern** alle Ecken, Kanten und Flächen gleich sind, wird bei den archimedische Körper etwas weniger verlangt: Sie haben reguläre Polygone als Seitenflächen, sowie alle Ecken sind von gleichvielen Kanten gebildet, die aber nicht gleiche Flächenwinkel einschliessen müssen. Die Kanten sind aber alle gleich lang. Man kann sie meist einfach gewinnen durch Abschleifen der Ecken, der Kanten oder mittels Verbindung von Kantenmittel– oder Dreiteilungspunkten. Es zeigt sich, dass an Seitenflächen beim selben archimedischen Körper nur 2 oder 3 verschiedene regelmässige Polygone möglich sind. (Von den archimedischen Körpern gibt es genau 13.) Platonische Körper besitzen eine Umkugel, eine Kantenkugel und eine Inkugel. Archimedischen Körper dagegen haben nur eine Umkugel und Kantenkugel. Die ungleichen Flächen verhindern die Inkugel.
Verlangen wir weiter nur noch regelmässige Polygone als Seitenflächen bei jetzt beliebigen Ecken und Konvexität, so gelangen wir zu den 92 **Johnsonkörpern** oder auch den unendlich vielen **Prismen** (hochgezogene Polygone) und den **Antiprismen** (versetzte Ecken...). Z.B. erhalten wir Johnsonkörer, nämlich die quadratische Pyramide zweimal, wenn wir einen Oktaeder über vier Ecken in zwei Hälften zerschneiden. Die zu den **archimedischen polaren Körper** besitzen eine Oberfläche aus lauter ungleichseitigen kongruenten Vielecken einer einzigen Art. Die Ecken werden von ungleichvielen Kanten gebildet, die ungleich lang sind. Dafür existiert jetzt aber die Inkugel.
Interessant sind jeweils wieder die eventuell möglichen **Sternformen**, **Hüllkörper**, **Durchdringungskörper**, **polare (duale) Gebilde** und die gegenseitigen **Beziehungen**. Bekannt sind der Keplerstern (Dodekaederstern), der Ikosaederstern, der Bindelstern, der Paravalle–Stern, die Poinsot–Sterne. Bei den platonischen Körpern sind Sterne nur für die goldene Reihe möglich. Die irdene Reihe ist zu sehr konvex, sodass man bei der Verlängerung von Flächen oder Kanten keine neuen Schnittpunkte mehr erhält. Es entstehen dann nur die Eckpunkte oder man erhält Parallelen.
Zu den Durchdringungen: Interessant ist es, das Wachstum des eines innern Körpers bis zur Metamorphose zu einem Hüllkörper zu studieren. Zu speziellen ästhetischen Formen führen die in den Dodekaeder einschreibbaren **Fünflinge**. Z.B. kann man im Dodekaeder fünf verschidene Tetraeder (ebenso auch Würfel und Oktaeder) platzieren, so dass die Ecken der Innenkörper auf die Ecken des Dodekaeders passen. Weiter ordet man eingeschriebene Sterne, Polygonkegel u.s.w.. Der Tetraederfünfling lässt sich gar verdoppeln, denn in den Würfel lassen sich zwei verschiedene Tetraeder stellen. Im Dodekaeder kann man daher zwei verschiedene Tetraederfünflinge erzeugen und somit diese auch überlagern. Fünflinge lassen sich durch Drehung eines einzelnen Innenkörpers erzeugen.

Man vergleiche dazu die Semesterarbeit von Daniel Stoos, ehemals Student an der HTA-Biel, unter:
http://www.hta-bi.bfh.ch/~stood/ebene_schnitte_stood.pdf
Falls das File inzwischen gelöscht sein sollte, erreicht man ev. noch eine Version resp. Information dazu über die Home-Page des Autors:
http://www.rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html
$\rightsquigarrow$ Menu $\rightsquigarrow$ Vorhandene Projektarbeiten

12.2.11 Übersicht über die archimedischen Körper

Irdene Reihe

Oben angefügt sind auch die zugehörigen platonischen Körper:

Körper	Flächentyp	f	e	k	Polarer Körper	f
Tetraeder	4 Dreiecke	4	4	6	Tetraeder	4
Hexaeder	6 Quadrate	6	8	12	Oktaeder	8
Oktaeder	8 Dreiecke	12	8	6	Hexaeder	6
Tetraederstumpf	4 Dreiecke	8	12	18	Pyramidentetraeder	12
”	4 Sechsecke				(Triakistetraeder)	
Würfelstumpf	8 Dreiecke	14	24	36	3 kant.Pyramidenoktaeder	24
”	6 Achtecke				(Triakisoktaeder)	
Kuboktaeder	8 Dreiecke	14	12	24	Rhombendodekaeder	12
”	6 Quadrate					
Oktaederstumpf	6 Quadrate	14	24	36	Pyramidenwürfel	24
”	8 Sechsecke				(Triakishexaeder)	
Rhombenkuboktaeder	8 Dreiecke	26	24	48	Deltoidikosi-	24
”	6 + 12 Quadrate				tetraeder	
Kuboktaederstumpf	12 Quadrate	26	48	72	Hexakisoktaeder	48
”	8 Sechsecke					
”	6 Achtecke					
Kubus simus	6 Quadrate	38	24	60	Pentagonikosi-	24
”	8 + 24 Dreiecke				tetraeder	

Goldene Reihe

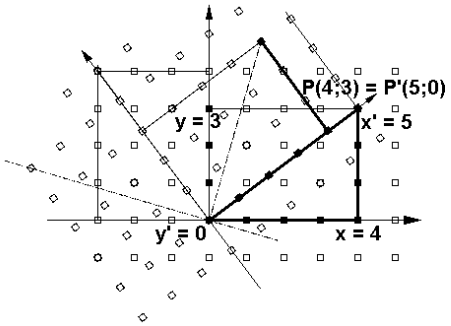
Oben angefügt sind wiederum auch die zugehörigen platonischen Körper:

Körper	Flächentyp	f	e	k	Polarer Körper	f
Dodekaeder	12 Fünfecke	12	20	30	Ikosaeder	20
Ikosaeder	12 Fünfecke	30	20	12	Dodekaeder	12
Dodekaederstumpf	20 Dreiecke	32	60	90	Triakisikosaeder	60
”	12 Zehnecke					
Ikosidodekaeder	20 Dreiecke	32	30	60	Triacontaeder-	
”	12 Fünfecke				rhombus	30
Ikosaederstumpf	12 Fünfecke	32	60	90	Pentakis-	
”	20 Sechsecke				dodekaeder	60
Rhombenikosidodekaeder	20 Dreiecke	62	60	120	Deltoidhexa-	60
”	12 Fünfecke				contaeder	
”	30 Quadrate					
Ikosidodekaederstumpf	30 Quadrate	62	120	180	Hexakis-	120
”	20 Sechsecke				ikosaeder	
”	12 Zehnecke					
Dodecaedron simus	12 Fünfecke	92	60	150	Pentagonhexa-	60
”	20 + 60 Dreiecke				contaeder	

Kapitel 13

Ornamente, Parkette, Symmetrie: Werkstatt zwischen Kunst und Mathematik

13.1 Pythagoräische Gitter



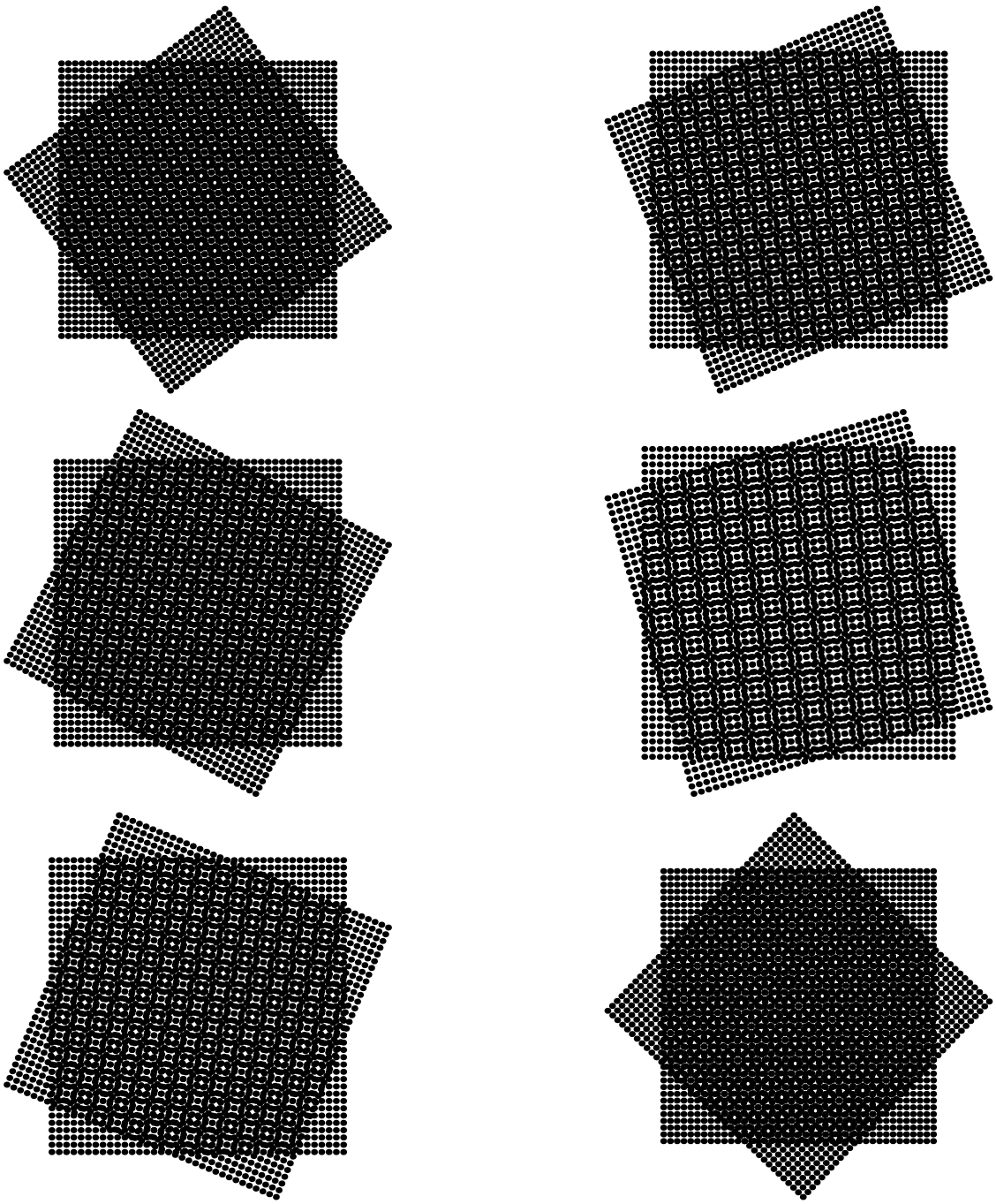
Gegeben seien zwei Koordinatensysteme S und S' mit einem gemeinsamen Ursprung O und den Achsen x und y einerseits sowie den Achsen x' und y' andererseits. Drehen wir das eine System S' gegenüber dem ruhenden System S so, dass für einen Punkt der Ebene, der in S mit P und in S' mit P' bezeichnet wird, gilt:

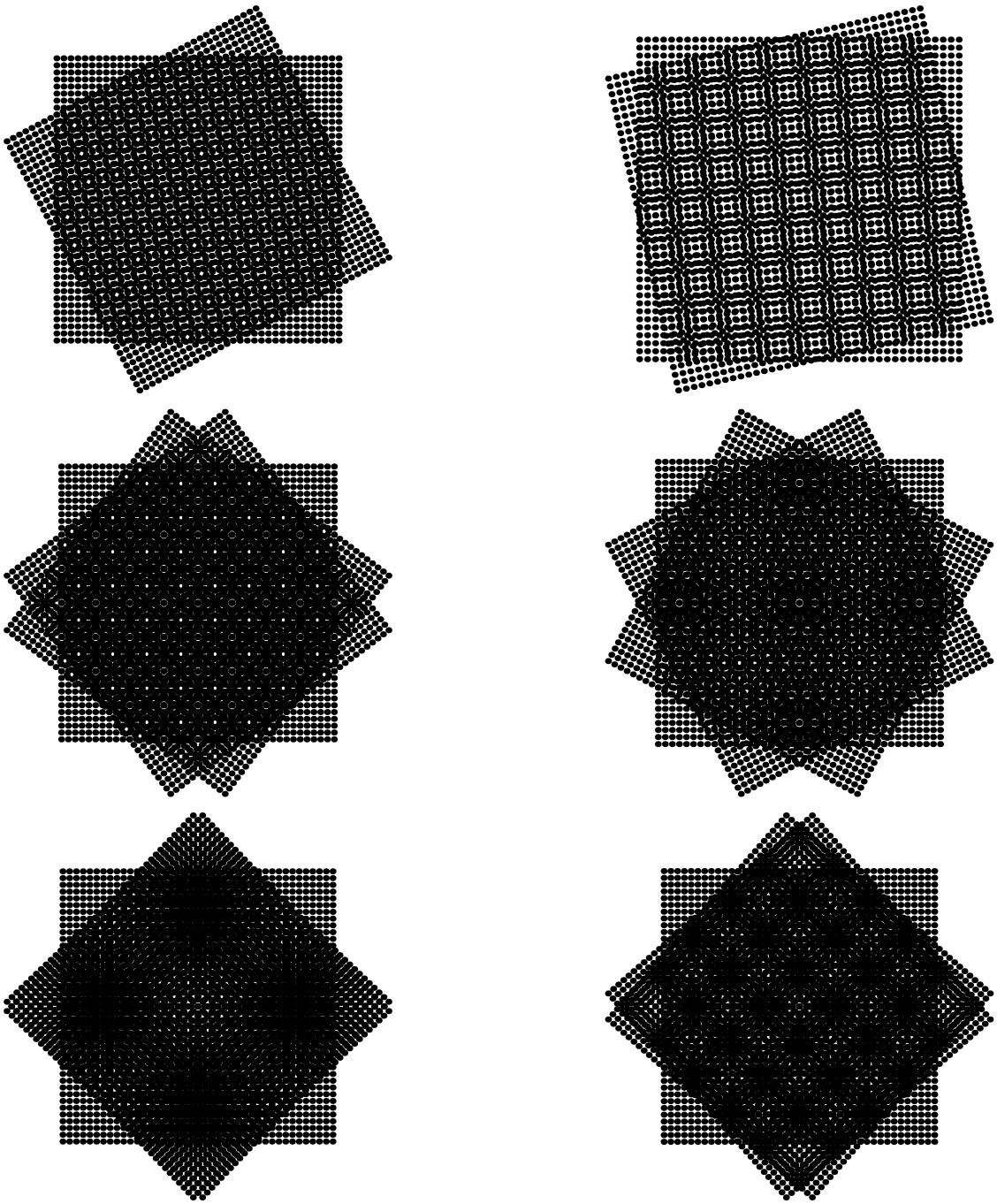
$$P(x;y) = P'(x';y'),\ \ m,n \in \mathbb{N},$$

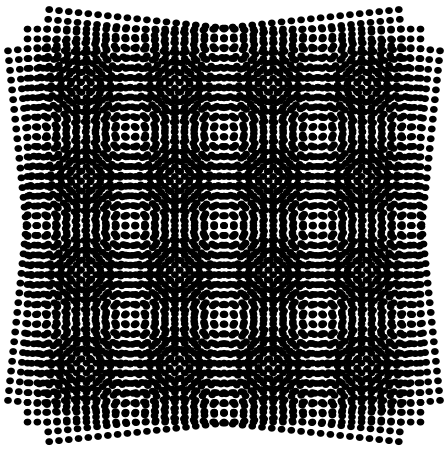
$$x = m^2 - n^2,\ \ y = 2\,m\,n,\ \ x' = m^2 - n^2,$$

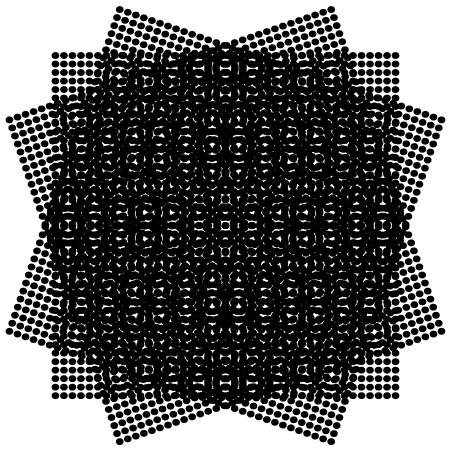
so erhalten wir den Drehwinkel $\varphi = \arctan(\frac{m^2-n^2}{2\,m\,n})$. Zudem wird $y' = 0$, denn es handelt sich hier bei (x, y, x') um **pythagoräische Zahlentrippel**. Für diese gilt bekanntlich $x^2 + y^2 = (x')^2$. Daher ist $P(x;y) = P'(\sqrt{x^2+y^2};0)$, d.h. $y' = 0$. Es gibt daher in beiden Koordinatensysteme Gitterpunkte, die zusammenfallen. Wenn wir m und $n \in \mathbb{N}$ variieren, so können wir unendlich viele pythagoräische Zahlentrippel und daher unendlich viele Gitterpaare erzeugen, bei denen Gitterpunkte zusammenfallen.

Wir stellen nun fest, dass bei solchen überlagerten Gittern wunderbare Muster entstehen. Wenn wir auf diese Weise drei statt zwei Gitter überlagern, so wird die Überraschung noch grösser. Beim Betrachten dieser Muster wird man rasch neugierig und fragt sich, was wohl dahinter für Gesetzmässigkeiten stecken könnten. Daher wollen wir uns vornehmen, die Angelegenheit systematisch zu untersuchen. Denn solche Muster können vielfältig eingesetzt werden bei der Gestaltung des Aussehens von Objekten.
Nachfolgend sind einige Beispiele mit zwei und drei Gittern gezeigt. *Mathematica*–Programm zur Erzeugung solcher Gitter siehe:
http://www.rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html
$\rightsquigarrow$ Packages, Projekte $\rightsquigarrow$ Pythagoräische Flächengitter, animierbar







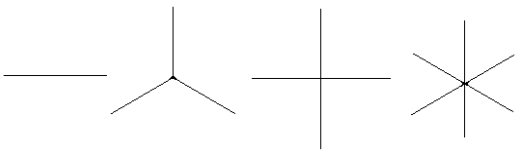


Beim Betrachten dieser Muster wird man rasch neugierig und fragt sich, was wohl dahinter für Gesetzmässigkeiten stecken könnten. Daher wollen wir uns vornehmen, diese Angelegenheit systematisch zu untersuchen. Denn solche Muster können vielfältig eingesetzt werden bei der Gestaltung des Aussehens von Objekten.

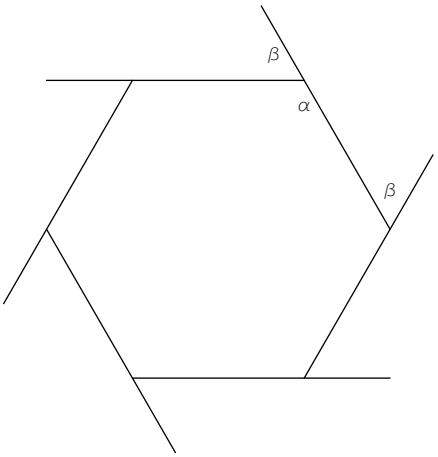
13.2 Bemerkung zu Parketten

13.2.1 Reguläre Parkette

Wenn wir versuchen, die Ebene lückenlos mit regulären n–Ecken auszufüllen, so kommt sofort die Frage auf, für welche natürlichen Zahlen n das überhaupt funktionieren kann. Falls es gelingt, die gesamte geometrische Ebene lückenlos und überschneidungsfrei mit einer endlichen Anzahl von geometrischen Grundfiguren zu überdecken, so nennen wir das entstehende Muster eine **Parkettierung**. Wenn eine solche Parkettierung mit einer einzigen Art regelmässiger n–Ecke erzeugt ist, finden wir Eckpunkte P_k, in denen mehrere solche n–Ecke zusammenstossen müssen. Wir betrachten einmal einen solchen Punkt P_k und stellen sofort fest, dass sich hier mindestens 3 n–Ecke treffen müssen. Denn wären es nur 2, so entstünde bloss eine Kante (vgl. nachstehende Figur links). Somit können wir für P_k schon eine Tabelle für die Grösse der Innenwinkel in einer n–Eck–Ecke anfertigen:



Anzahl sich treffende n–Ecke	Innenwinkel
3 Sechsecke	$\alpha = \frac{360^o}{3} = 120^o$
4 Quadrate	$\alpha = \frac{360^o}{4} = 90^o$
5 ?–Ecke	$\alpha = \frac{360^o}{5} = 72^o$
6 Dreiecke	$\alpha = \frac{360^o}{6} = 60^o$
Mehr als 6 ?–Ecke	$\alpha < \frac{360^o}{6} = 60^o$



An der nebenstehenden Figur liest man ab, dass die Summe der Aussenwinkel β in einem n–Eck gleich 360^o ist:

$$n \cdot \beta = 360^o \;\Rightarrow\; \beta = \frac{360^o}{n}$$

Für den Innenwinkel α gilt:

$$\alpha = 180^o - \beta = 180^o - \frac{360^o}{n} = \frac{180^o}{n} \cdot (n-2)$$

Beim 5–Eck ist daher $\alpha = \frac{180^o}{5} \cdot (5-2) = 36^o \cdot 3 = 108^o \neq 72^o$. Das 5–Eck kommt daher nicht alleine in Frage bei der Füllung der Ebene.

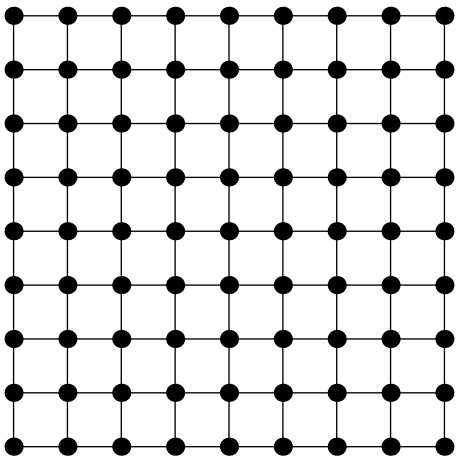
Der Fall $\alpha < \frac{360^o}{6} = 60^o$:

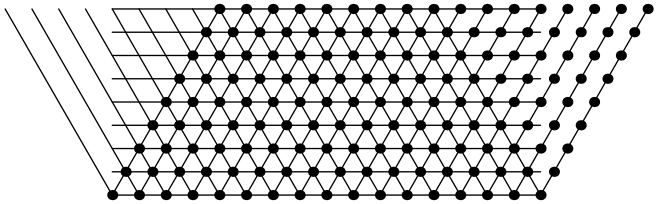
$$\alpha = \frac{180^o}{n} \cdot (n-2) < \frac{360^o}{6} = 60^o \;\Rightarrow\; \frac{3}{n} \cdot (n-2) < 1 \;\Rightarrow\; 3\,n - 6 < n \;\Rightarrow\; 2\,n < 6 \;\Rightarrow\; n < 3$$

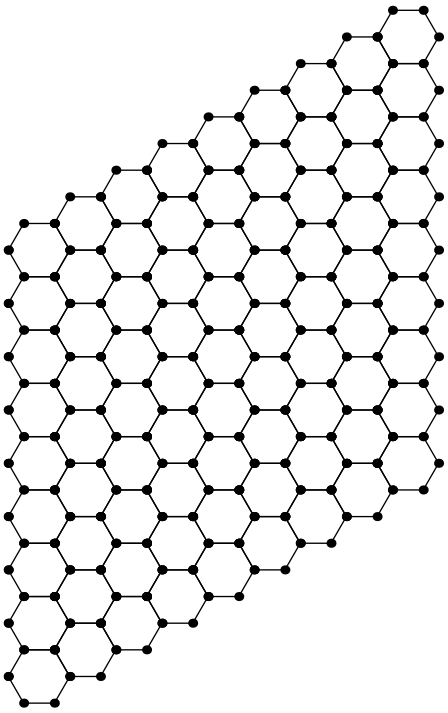
$\rightsquigarrow$ Widerspruch! (Es gilt $n \geq 3$!)

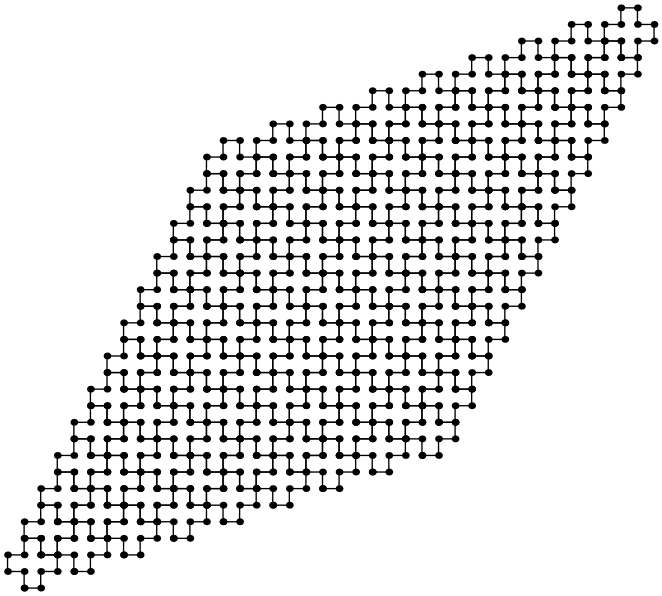
Satz: Will man die Ebene mit regelmässigen n–Ecken lückenlos füllen, so kommen nur gleichseitige Dreiecke, Quadrate oder regelmnässige Sechsecke in Frage.

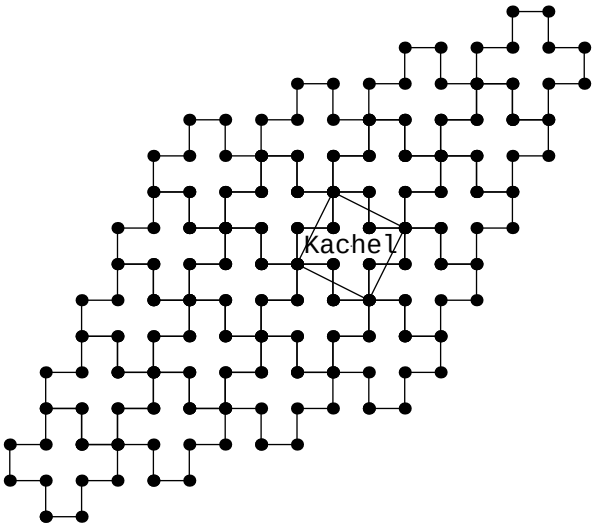
Nachstehend sind die drei Grundtypen von Parketten gezeigt, die auf einem einzigen n-Eck beruhen:





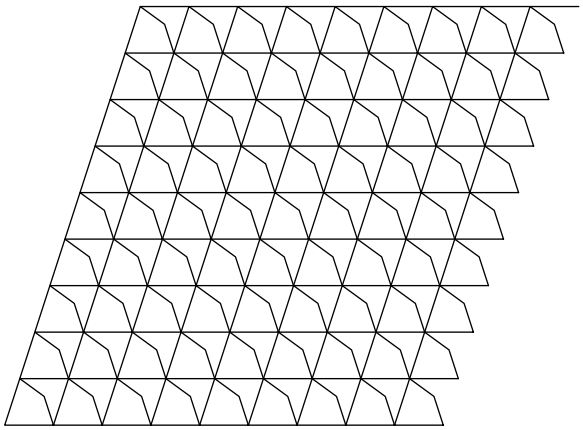


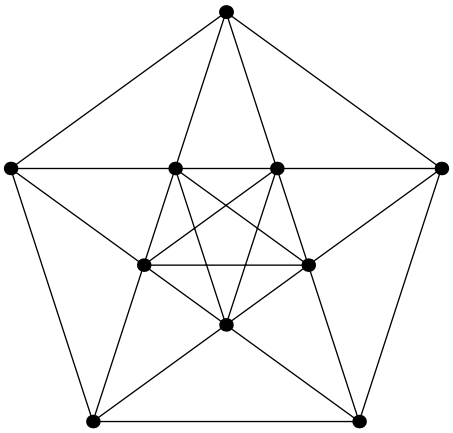


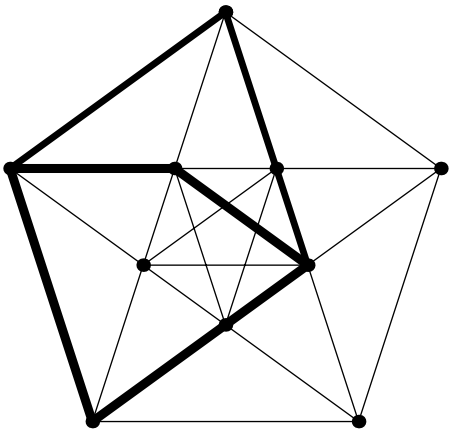


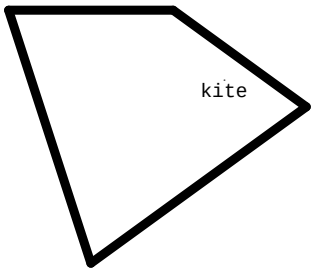
Oft ist es auf den ersten Blick nicht sofort klar, auf welchem Grundmuster eine vorhandene Parkettierung beruht. Im Bild oben rechts ist eine Parkettierung gezeigt, deren Grundfigur in der Art eins „Schweizerkreuzes“ mit etwas veränderten Proportionen gehalten ist. Es macht hier jedoch kaum Mühe, den quatrati-schen Parkett-Typ zu identifizieren. (Vgl. Kachel in der Figur links.)

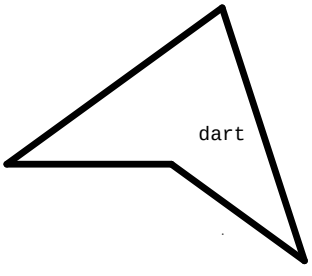
Selbstverständlich kann man die Ebene auch mit unendlich vielen Arten von Parallelogrammen füllen. Denn diese Füllung beruht auf der Erzeugung eines Parallelsystems mit Hilfe zweier linear unabhängiger Vektoren.
Im nebenstehenden Beispiel ist das Parallelogramm aus Teilen des regelmässigen 5–Ecks gewonnen, wie die nachfolgenden Figuren zeigen. Man nennt die beiden Grundmuster „Kite“ und „Dart“.



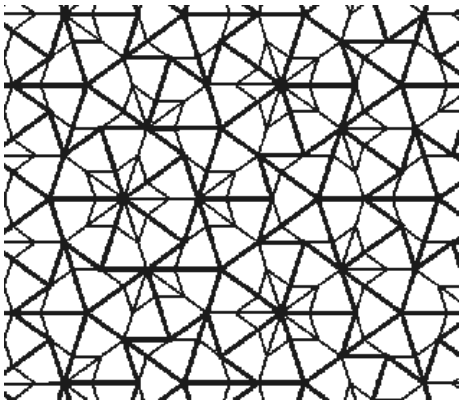


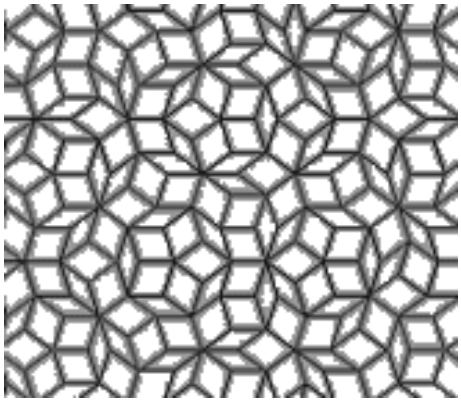






13.2.2 Penrose-Parkette





Mit „Kite“ und „Dart“ (Bild oben links) ist es möglich, ein sogenanntes **Penrose-Parkett** zu erzeugen. Penrose-Parkette sind aperiodische Parkette, die aus einer endlichen Anzahl von Grundfiguren bestehen, mit denen es gelingt, die geometrische Ebene lückenlos und überschneidungsfrei zu überdecken. Sie wurden erst 1974 von Roger Penrose aus Oxfort entdeckt.

13.3 Untersuchung von Symmetrien

Dieses Kapitel wird bei Gelegenheit fortgesetzt. Vorläufig ist es ein Feld für Projektarbeiten. (Weitere Hinweise zum Thema vgl. auch Seite 298.)

Themen:

1. Symmetrien bei eindimensionalen periodischen Ornamenten und Mustern (vgl. Seite 298).
2. Symmetrien bei eindimensionalen aperiodischen Ornamenten und Mustern.
3. Symmetrien bei zweidimensionalen periodischen Ornamenten und Mustern.
4. Symmetrien bei zweidimensionalen aperiodischen Ornamenten und Mustern.
5. Symmetrien bei dreidimensionalen periodischen Ornamenten und Mustern.
6. ...

Kapitel 14

Ein Blick des Architekten auf Stichworte zu Mathematik und Praxis

Nachfolgend wird Arbeitsmaterial in Stichworten und Kurzbeschreibungen im Sinne einer Anregung für Projekte aufgelistet. Die Weiterbearbeitung und Ausarbeitung obliegt dem Studierenden.

14.1 Stichwortmaterial Planungsforschung: Beispiele

14.1.1 Apolloprojekt: Mathematisches Management

- ⊘ Juli 1969: 1. Mondlandung mit Menschen.
- ⊘ J. F. Kennedy wollte den Wettlauf zum Mond gewinnen.
- ⊘ Gigantische Anstrengungen, effizientes Management war notwendig. 8 Jahre vergingen von der Vision bis zur Realität.
- ⊘ Erfolg der Physik, der Chemie, der Ingenieurtechnik, aber auch der Mathematik
- ⊘ Entscheidend war dabei ein Zweig der Mathematik: Operations Research, Planungsforschung.
- ⊘ Apolloprojekt: 10 mal so gross wie das Manhattenprojekt (Atombombe).
- ⊘ Das Problem war nicht das Detail, sondern das Zusammenspielen einer Unmenge von Teilen zur gleichen Zeit, exaktes Funktionieren.
  - **Idee:** Aufteilung des Projekts in Teilaufgaben, Parallelverarbeitung.
  - $\rightsquigarrow$ Gesamtaufgabe aufteilen in ca. 20 Unteraufgaben 1. Stufe.
  - $\rightsquigarrow$ Jede Unteraufgabe 1. Stufe aufteilen in ca. 50 Unteraufgaben 2. Stufe.
  - $\rightsquigarrow$ Jede Unteraufgabe 2. Stufe aufteilen in ca. 200 Unteraufgaben 3. Stufe.
  - $\rightsquigarrow$ Jede Unteraufgabe 3. Stufe aufteilen auf die arbeitenden Menschen.
  - $\rightsquigarrow$ Total waren ca. 400'000 bis 500'000 Menschen am Projekt beteiligt.
- ⊘ Die ad hoc–Methoden der Baustelle wurden durch systematische mathematische Methoden ersetzt.
- ⊘ Diverse Dinge wurden hier nach einem einheitlichen Schema abgearbeitet.
- ⊘ Problem: Vorheriges Auffinden der besten Methode. Sonst kein Erfolg.

⊘ Stichworte **Einsatz und Zuteilung der Mittel, Aufteilung in Prozesse, Netzplantechnik, kritischer Weg, Warteschlangen...** ⇝ Demonstration von mathematischem Scharfsinn im Management: Herumraten und blinder Glauben wird ersetzt durch Mathematik ⇝ Erfolg.

14.1.2 Beispiel Einsatzplanung bei einer Airline

⊘ Z.B. 60 Flüge pro Tag: Ain auf die Minute funktionierender Einsatzplan ist notwendig. Diverseste Arbeiten sind darin enthalten (laden, entladen, warten, tanken, Crew-Wechsel,...)

⊘ **Wichtig:** Am Boden stehende Flugzeuge verdienen kein Geld für die Airline, sondern kosten nur.

⊘ Z.B. Gepäck wird in Minuten pro Kilogramm oder Ladezeitminuten pro Flugstunde u.s.w. erfasst.

⊘ Beispiel entladen: 3 Mann haben 20 Minuten im Schnitt, 4 Mann nur 10 Minuten, nichtlineare Zusammenhänge.

⊘ Problem: Wie optimieren? — Aufgabe der Mathematik. Technik aus den Bell Laboratories.

⊘ **Optimierungsprobleme, Warteschlangeprobleme.**

⊘ Ähnliche Probleme bei Banken, Post, Supermarkt, Kino, Europark, Disneyland, Maschinenparkeinsatz, ...

⊘ Problem Kundenzufriedenheit oder herummstehende Maschinen, die kein Geld verdienen. ⇝ Wie verkürzt man Warteschlangen?

⊘ Daten sammeln (Kundenverhalten, Maschinenauslastung, Bestelleingänge, ...), Simmulationen rechnen, nichts überdimensionieren weil es kostet, nichts unterdimmensionieren weil es Frust bringt.

⊘ ⇝ Demonstration von mathematischem Scharfsinn im Management: Herumraten und blinder Glauben wird ersetzt durch Mathematik ⇝ Erfolg.

14.1.3 Beispiel Autoverleih

⊘ Auto in San Francisco mieten, in New York zurückgeben, dann in Boston wieder gebrauchen u.s.w..

⊘ Wie ist es möglich, immer die richtige Zahl Autos am richtigen Ort bereitzuhalten, wennn sie an einem andern als dem Ausleiheort zurückgegeben werden, ohne dass eine zu grosse Flotte angeschafft wird und viele Auto nur herumstehen?

⊘ In welchen Kombinationen müssen jeweils die Autos ausgetauscht und neu bereitgestellt werden, damit die Anzahl Bereitstellungen optimiert werden kann?

⊘ Idee: Lösung durch probieren ⇝ ineffizient.

⊘ **Die Idee sind mathematische Methoden: Simplexverfahren (lineare Programmierung).**

⊘ ⇝ Demonstration von mathematischem Scharfsinn im Management: Herumraten und blinder Glauben wird ersetzt durch Mathematik ⇝ Erfolg.

⊘ Narendra Karmakar, Bell Laboratories: Neues Verfahren.

Aus dem Internet: http://lists.ffii.org/archive/mails/swpat/2001/May/0105.html

Verschlechterung von Hochschulen durch Patentorientierung — Für diese Verschlechterung gibt es Beispiele:

Bis um 1980 gingen aus den Bell Laboratories 7 Nobelpreisträger hervor. Dann wurde AT&T gespalten und das Labor musste, auch unter dem Einfluss der patentfreundlichen Linie der Regierung Reagan, zu einem eigenständigen Profitzentrum werden.

1984 gelang dem gerade von Berkely nach AT&T gewechselten jungen Inder Dr. N. Karmakar eine bedeutende mathematische Neuerung mit gewaltiger industrieller Anwendung, die zum Patent führte. Aber auch zur Isolierung der Bell L. von dem sonst so produktiven Mathematiker-Netzwerk und zur Störung des positiven Zyklus zwischen Forschung und Anwendung. Wegen seiner Isolierung von der Mathematiker-Kultur fiel Karmakar selber auch schnell fachlich zurück und weder er noch andere Bell-Leute erhielten einen Nobelpreis. Bell gelang es auch nicht, das Patent in konstruktiver Weise zu nutzen oder nennenswertes Geld damit zu verdienen. Es wurde lediglich eine Branche ausgetrocknet und damit auch die Forschung zurückgeworfen. Führende Mathematiker dieser Branche wurden zu aktiven Softwarepatentgegnern. Ein Nobelpreisträger auf diesem Gebiet hinterliess seinem japanischen Schüler Prof Imano eine Art Testament mit der dringenden Bitte, älles zu tun um das Übergreifen der amerikanischen Patent-Tragödie auf Japan zu verhindern". Weshalb ein sehr gutes japanisches Buch entstand, welches ich hoffentlich demnächst rezensieren kann.

Es ist dabei anzumerken, dass die einzigen Software-Innovationen, die wirklich eine gewisse Bewunderung verdienen, im Bereich der Mathematik im engsten Sinne liegen. Und natürlich gibt es überall viele Mathematiker, die neidvoll auf Medizin- und Maschinenbau-Kollegen ihrer Uni blicken und auch gerne Patente hätten.

Professoren das Patentieren zu verbieten, wäre vielleicht weltfremd. Aber es zu forcieren ist noch weltfremder und würde, wenn erfolgreich, vor allem zu dem von Imano beschriebenen Niedergang der Bell Laboratories und eines Teils der amerikanischen Mathematik der Linearen Planung führen. Wobei der Niedergang an öffentlichen Universitäten noch viel vernichtender wäre, da jenen das Korrektiv des privaten Unternehmertums fehlt, welchem die Bell Laboratories immerhin unterliegen.

Die Forschung kennt ihre eigenen Wettbewerbsregeln. Prestigezeitschriften haben Referenten, die ähnlich wie aber wesentlich besser als Patentprüfer arbeiten. Jeder versucht möglichst viel und hochrangig zu publizieren. Durch diese Art ruhm-orientierten Wettbewerbes entsteht ein produktiver Leistungsdruck, der für eine weitere Erhöhung durch irgendeinen Markt"gar keinen Spielraum lässt. Eine zweite Wettbewerbsfront kann nur zu Lasten der ersten wirken. Und die erste ist bekanntlich dem Wesen der Wissenschaft angemessen.

Der Ruhm-Wettbewerb verträgt sich gut mit der Kultur der Wissenschaft. Der Profit-Wettbewerb verträgt sich schlecht damit. Gerade die Grundlagenwissenschaften brauchen keinen Profitanreiz. Das gilt nicht nur aber ganz besonders für den Softwarebereich. Allgemeineres kann man auch bei Machlup sehr schön nachlesen.

Kann man den Hochschul-Patentbewegungs-Schwachsinn in Deutschland wirklich nicht stoppen?

von Hartmut Pilch

http://phm.ffii.org/
Pflege statt Plünderung der Informationsallmende: http://www.ffii.org/
77800 Unterschriften gegen Logikpatente: http://petition.eurolinux.org/

14.1.4 Beispiel Eröffnung eines Supermarkts

⊘ Gemessenes Beispiel: 14 Wochen von der Planung eines Supermarkts und einem Haufen Steine bis zur Eröffnung des forthin ständig geöffneten, eingräumten funktionierenden Ladens.

⊘ Wichtig: **Netzpläne, Methode des kritischen Weges, Familie von mathematischen Techniken für Parallelprozesslösungen.**
$\rightsquigarrow$ Arbeit an diversen Dingen an mehreren Orten gleichzeitig.

⊘ Wichtig:

1. Effizienter Einsatz aller Mittel
2. Ökonomische Zuteilung aller Mittel
3. Zuverlässige Verteilung von Mittel und Kompetenzen.
4. $\rightsquigarrow$ Demonstration von mathematischem Scharfsinn im Management: Herumraten und blinder Glauben wird ersetzt durch Mathematik $\rightsquigarrow$ Erfolg.

14.1.5 Beispiel Brand von Chelsea, Massachusetts

⊘ Stadtbrand vom Sonntag, 13. 10. 1973. Die Region wird nationales Notstandsgebiet. Ursache unbekannt.

⊘ Feuerwehrunterstützung von Nachbarstädten und Nachbarstaaten angefordert, ohne die jeweils eigene Einsatzpotenz zu schwächen.

⊘ Zuteilung der Mittel: Problem der Planungsforschung. $\rightsquigarrow$ „Feuermetro“.

⊘ An jenem Tag im Einsatz: 165 Pumpen, 39 weitere Geräte, ca. 2000 Mann aus ca. 100 Orten.

⊘ Probleme: Anfahrtswege für alle Möglichkeiten vorher geplant, Transportzeiten vorher festgelegt, Mittelzuteilung vorher festgelegt u.s.w..

⊘ Stichworte: Effizienter Einsatz und Zuteilung der Mittel, Transport, kritischer Weg, Warteschlangen...

⊘ $\rightsquigarrow$ Demonstration von mathematischem Scharfsinn im Management: Herumraten und blinder Glauben wird ersetzt durch Mathematik $\rightsquigarrow$ Erfolg.

14.2 Stichwortmaterial Spieltheorie: Beispiele

14.2.1 Beispiel zur Entscheidungstheorie: Schirm oder nicht Schirm?

⊘ **Situation:** Es regnet nicht, aber der Himmel ist bedeckt. Das Radio hat gemeldet: „Schauer möglich...“. Früher hatte ich den Schirm in einer solchen Situation vergebens mitgenommen. Soll ich heute den Schirm mitnehmen oder nicht?

⊘ Möglichkeiten zur Entscheidungsfindung:

1. Dem Zufall folgen, aus dem hohlen Bauch. $\rightsquigarrow$ Dem Zufall gehorchen.
2. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik einsetzen. $\rightsquigarrow$ Daten notwendig.
3. Spieltheorie gebrauchen: Entscheid fällen auf der Basis des zu erwartenden Gewinns auf Grund der eigenen Bewertung der Möglichkeiten.

⊘ Wie vorgehen?

1. Das Problem formulieren.

2. Möglichkeiten und Wahlmöglichkeiten erkunden: Man kann Wahlen treffen. Man kann das oder jenes tun. Es kann regnen — oder nicht. Man kann den Schirm mitnehmen — oder nicht. $\rightsquigarrow$ Übersicht, Matrix.
3. Wichtig: **Felder der Matrix bewerten.** Die Schätzung eines Wertes ist eine persönliche Sache. Jeder hat seine Vorlieben und schätzt vermutlich anders. Man drückt damit aus, was einem wieviel wert ist.
4. Auf Grund der Bewertung und der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens der Fälle errechnet man einen zu erwartenden Gewinn in Punkten. Man entscheidet sich für den grösseren Gewinn. $\rightsquigarrow$ Entscheidung auf der Basis eines zu erwartenden Gewinns.
5. Auch das einbeziehen, was andere vorhaben (z.B. im Schach — oder der General im Krieg...).

⊘ Es entsteht so Wettbewerb, Spiel $\rightsquigarrow$ Spieltheorie.

14.2.2 Nullsummenspiel

⊘ Beispiel eines Konzepts: Schach. Der eine verliert, wenn der andere gewinnt.

⊘ Der Gewinn des einen geht auf Kosten des andern, welcher damit Verlust macht: Es ist ein **Nullsummenspiel**. Gewinn (pos.) + Verlust (neg.) = 0.

⊘ Beispiele: Fussball, boxen, fechten,...

⊘ Nicht alle Spiele in der Realität sind Nullsummenspiele. Dann ist es manchmal besser für die Gesamtheit, wenn keiner zu gewinnen versucht.

14.2.3 Nichtnullsummenspiel: Beispiel Gefangenendilemma

⊘ Es muss in der Realität nicht immer einer verlieren, damit der andere gewinnt.

⊘ Beispiel Handelspolitik: Handelsabkommen $\rightsquigarrow$ Verlust vermeiden.

⊘ Problem: Durchhalten, Verzicht auf maximalen Gewinn.

⊘ Beispiel: Stavinia produziert sehr gute Eiscreme, aber auch Kuchen. Rosanadavia produziert sehr guten Kuchen, aber auch Eiscreme. Beide sind auf Import angewiesen, versuchen aber auch eine eigene Industrie im Bereich der Vorherrschaft des andern aufzubauen.

⊘ Verträge regeln Import und Export, der Versuch des Betrugs zum eigenen Vorteil und zum Nachteil des andern ist aber gross. Nach einem Betrug brechen die Verträge zusammen und beide Beteiligten nehmen Schaden.

⊘ Mögliche Strategien: Kooperation oder Konfrontation.

⊘ Bewertungsmöglichkeiten:

Gewinn Stavinia	Kooperation Stavinia	Konfrontation Stavinia
Kooperation Rosanadavia	4	5
Konfrontation Rosanadavia	0	2

Gewinn Rosanadavia	Kooperation Stavinia	Konfrontation Stavinia
Kooperation Rosanadavia	4	0
Konfrontation Rosanadavia	5	2

Total	Kooperation Stavinia	Konfrontation Stavinia
Kooperation Rosanadavia	$4+4=8$	$5+0=5$
Konfrontation Rosanadavia	$0+5=5$	$0+0=0$

Wenn beide kooperieren ist der gesamte Gewinn grösse als wenn einer zu betrügen versucht. Bei Betrug ist der individuelle Gewinn des einen grösser, jedoch die Gesamtheit verliert: Das ist das **Gefangenendilemma**. Wenn ein Kriegsgefangener alleine ausbricht, so ist seine individuelle Chance auf Erfolg grösser als bei einer geplanten Massenflucht, wo es noch viele Mitwisser gibt. Die Zurückgebliebenen werden zudem schlechter behandelt. Im Falle der Massenflucht ist aber die gesamte Chance auf Erfolg grösser als bei der Einzelflucht, jedoch die Chance des Einzelnen auf Misserfolg in seinem eigenen Fall wächst.

⊘ **Gefangenendilemma:** Betrug ist bei zwei Spielern die beste individuelle Strategie, Kooperation jedoch die beste generelle Strategie für alle. Was ist nun grösser? — Die Liebe zu sich selbst mit der Chance auf den Hass der Gemeinschaft, oder die Liebe zur Gemeinschaft mit der Chance auf einen persönlichen Nachteil? — Frei nach Shakesperare: „Mein oder nicht ge-mein, das ist hier die Frage. . . “

14.2.4 Nichtnullsummenspiel: Tragödie des Gemeinwesens

⊘ Diesmal geht es um mehrere Spieler.

⊘ Beispiel l: Eine chemische Industrie lässt seine giftigen Abwässer heimlich in den Fluss laufen, denn die fachgerechte Entsorgung wäre teurer.

⊘ Beispiel 2: Es gibt nicht mehr viele Fische im nahen Teich, doch ich kann es mir als einzelner noch leisten, ungesehen meinen Fang zu holen.

⊘ Problematik 1:„Das ist gut für mich, doch was wäre, wenn das jeder täte“. $\rightsquigarrow$ Es kann das System ruinieren. $\rightsquigarrow$ Verstärkte Version des Gefangenendilemmas: **Die Tragödie des Gemeinwesens.** Der individuelle Gewinn wird maximiert. Doch wenn das mehrere tun, so ist die Gemeinschaft ruiniert. Die Maximierung des individuellen Gewinns auf diese Art ist in Diktaturen zu beobachten.

⊘ Problematik 2: Das traditionelle Denken in Gewinn und Verlust funktioniert hier nicht mehr. Die Wirkung z.B. auf die Umwelt kann katastrophal sein.

⊘ Folge: Vorschriften und öffentliche Kontrolle sind notwendig.

⊘ Beispiele: Abfallentsorgung, Geschwindigkeitsvorschriften im Strassenverkehr, Baulandverschwendung, Handel zwischen Nachbarländern u.s.w..

⊘ Probleme bei Wahlsystemen: Gerechtigkeit und Eindeutigkeit sind einander ausschliessende Ziele.

14.2.5 Statik, Festigkeitslehre, Bauphysik

⊘ Anwendung der Vektor und Matrizenrechnung im Ingenieurbereich.

⊘ Anwendung der linearen Algebra im Ingenieurbereich.

⊘ Anwendung der Differential– und Integralrechnung im Ingenieurbereich.

⊘ Anwendung numerischer Methoden wie die Methode der finiten Elemente im Ingenieurbereich.

14.3 Stichwortmaterial alte und neue Geometrie

14.3.1 Fibonacci, goldener Schnitt, Ästhetik

⊘ Die Sinne erfreuen sich an harmonisch gefügten Dingen... (Thomas von Aquin)

⊘ In Natur und Kunst gibt es oft einen messbaren Zusammenhang zwischen Mathematik und Schönheit — das Leben, die Seele in einem Kunstwerk, die eben Kunst zu Kunst macht, lässt sich allerdings nicht messen. Die Mathematik alleine genügt nicht, wohl ist sie aber oft Bedingung.

- Bei Pflanzen: Man findet Kugeln, Kreise, Dreiecke, Muster, Spiralen...
- Spiralen in den Sonnenblumenkernanordnungen 81 : 144.
- Bei Gänseblümchen 21 : 34.
- Weiter bei Tannzapfen, Ananas u.s.w. .
- Ananas: 3–dimensionale Spiralsituation: 5 : 8 : 13.

⊘ Die Zahlen erweisen sich als Paare aufeinanderfolgender Zahlen aus der Fibonacci–Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

⊘ Logarithmische Spirale und Gegenspiralen beim Nautilus.

⊘ Das Verhältnis zweier solcher Zahlen nähert sich immer mehr dem goldenen Schnitt an (Euklid, ≈ 1.61803)

⊘ Goldenen Schnitt: Seit der Antike beliebt bei Künstlern und Architekten.

⊘ Goldenen Schnitt: Vielfältig abgreifbar in den Proportionen von Mensch, Tieren, Pflanzen.

⊘ Goldenen Schnitt: Untrennbar verbunden mit Ästhetik bei Leonardo.

⊘ Oft unklar, ob beim jeweiligen Kunstobjekt der goldene Schnitt dem Menschen folgt — oder die Darstellung des Menschen dem goldenen Schnitt, er also durch den goldenen Schnitt bestimmt ist.

⊘ Leonardo: Studien über die Masse des Menschen. Z.B. im Sitzen wird der Mensch um $\frac{1}{4}$ kleiner.

⊘ Beispiel von Leonardo: Kopf mit Quadrat und goldenem Schnitt.

⊘ Leonardo: „Arithmetik und Geometrie geben die Wahrheit über die Dinge“— durch die Sinne gelangt man zu Gewissheit, begriffen jedoch wird über die Mathematik.
Lasst niemanden meine Werke lesen, der nicht Mahtematiker ist ... (Leonardo)

14.3.2 Symmetrie: Muster

⊘ **Symmetrie:** Ordnung in der alten Bedeutung, bilateral-symmetrisch (links–rechts) oder punktsymmetrisch in neuerer Bedeutung.

⊘ Ethnologie: Bestimmte Symmetrien erhalten in bestimmten Situationen den Vorzug...

⊘ Es gibt nur 7 verschiedene eindimensionale Muster. Jedes mögliche Muster ist einer der 7 Typen. Das kann zur Klassifikation von Mustern verwendet werden.

⊘ Zur Feststellung des Mustertyps genügen 4 Tests oder Transformationen: Parallelverschiebung, Drehung, Achsenspiegelung, Gleitspiegelung (Verschiebung mit nachfolgender Spiegelung.)

⊘ Die 7 Muster:

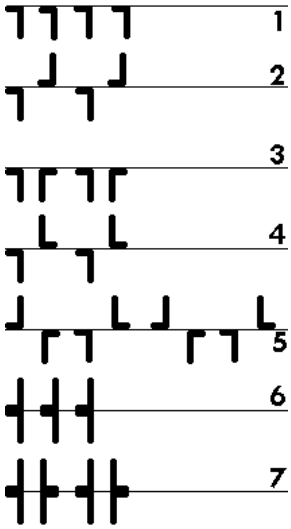


Abb. 215: Die sieben eindimensionalen Muster

⊘ Alle irgendwann irgendwo gefundenen eindimensionalen Muster lassen sich unter diesen 7 Typen einreihen.

⊘ Antropologen verwenden heute diese Muster. Vorher war bloss eine ideosynkratische Einordnung möglich. (Vergleich mit Nachbararten und –epochen, Ähnlichkeiten. . .)

⊘ Neu: Damit sind Kulturen vergleichbar über verschiedene Zeiten und Orte.

14.3.3 Symmetrie: Escher

⊘ Die Regeln für das Ausfüllen einer Fläche mit Mustern erhalten hier eine neue Bedeutung.

⊘ Es erscheinen ungewöhnliche Formen, die vorher unmöglich schienen.

⊘ Beispiel: 4 Engel und Teufel in einem Punkt in der euklidschen Geometrie, Spiegelsymmetrie.

⊘ Sein Guru: Seit 1958, H.S.M. Coxeter (aus Toronto, einer der anerkanntesten Geometer) kommt Escher zu Hilfe.

⊘ Neu: Muster auf der Oberfläche der Kugel, lokale Symmetrie, hier jetzt 3 Engel und Teufel in einem Punkt.

⊘ Modell der hyperbolischen Geometrie im Kreis (Spiegelung am Einheitskreis): Kein Rand, auch hier 3 Engel und Teufel in einem Punkt. (Eine Art sich die hyperbolische Geometrie vorzustellen.)

⊘ Coxeter: Mathematik ist Kunst. Man sollte ihre Schönheit würdigen. Diese erscheint in Mustern, Zahlen, Formen, u.s.w..

14.3.4 Fraktale Geometrie und Philisophie in der Mathematik

(Nach einer Ausführung von Mandelbrot.)

⊘ Konzept der Selbstähnlichkeit, selbstähnliche Formen. Wiederholung der Formen im Grossen und Kleinen. Lokal selbstähnlich, global oft irregulär. Beim Näherherangehen sind die Formen gleich konzipiert (in der Vergrösserung).

⊘ Das führt zu fundamentaler Schönheit.

⊘ Beispiele: Broccoli, Schneeflocken, Farne, Blumenkohl, Blitze,...

⊘ Benoit Mandelbrot: Vater der fraktalen Geometrie. Hat Formen und Kurven klassifiziert.

⊘ Fraktale Kurven sind Gebilde, die zwischen Flächen und klassischen Kurven liegen.

⊘ Beim Näherherangehen (in der Vergrösserung) sind fraktale Kurven wieder gleich konzipiert wie vorher.

⊘ Die ersten Schritte zur fraktalen Kurve:

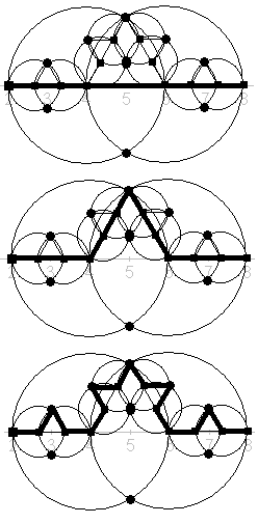


Abb. 216: Eine fraktale Kurve: Entstehungskonzept

⊘ Unregelmässige Kurven oder Flächen, intuitiv, massiv irregulär $\rightsquigarrow$ Einfache, strende Definitionen $\rightsquigarrow$ Fraktale Gebilde.

⊘ Zwei Hauptzwecke:

- Natur imitieren: Künstliche Berge, Flüsse, Küsten, Blitze, Wolken, ausserortendlich schöne Gebilde, künstliche Planeten in Filmen (z.B. die Rückkehr der Yedi-Ritter), ausserortendliche Vielfalt. Anwendungen z.B. da wo grosse Oberflächen, grosser Umfang und gleichzeitig kleine Inhalte gefragt sind. Beispiel: Flugplatz, Anflug– und Abflughallen, Docks.
- Klassifikation der Fraktale, Studium, geometrisches Anliegen, Bezug zu Formeln, neues Gesicht der Mathematik.

⊘ Beispiel Mandelbrotmenge (Apfelmännchen): Sehr selbstähnlich und äusserst komplex (vgl auch nebenstehendes Fraktal).

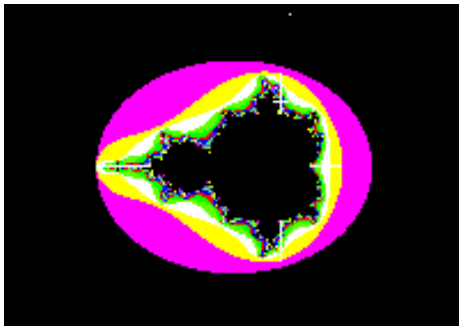


Abb. 217: Apfelmännchen

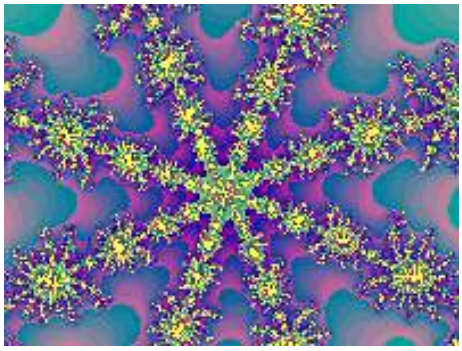


Abb. 218: Fraktal

Nachfolgend: Beispiele von Julia-Mengen.

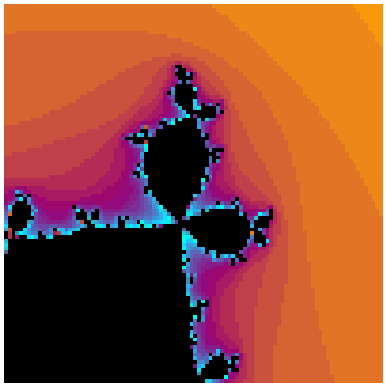


Abb. 219: Juliamenge, zusammenhängend

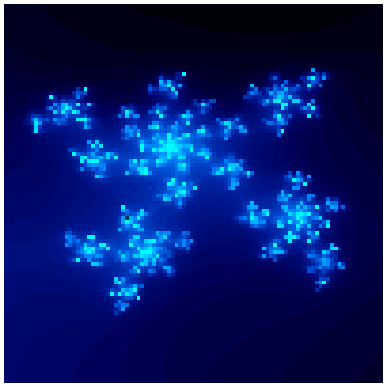


Abb. 220: Juliamenge, Staub

⊘ Rolle des Computers: Werkzeug, heute aufwändige Rechnungen möglich, grosse Probleme mit sehr vielen Gleichungen lösbar. Ingenieurgesichtspunkt: Heute sehr kleine Rechner, billig, schnell.

⊘ Heute ein Problem: Was ist Mathematik? Grund: Die Beziehung zwischen Mathematik und Informatik ist subtil geworden.

⊘ Was sind die Grundlagen der Mathematik? — Was macht Mathematik zu Mathematik? Der Kern: Die Beziehungen Wahrheit – Beweis. Wahrheit hat mit Wirklichkeit oder Realigät zu tun, hier geistige Realität, nicht physikalische Realität. Beweis hat mit Manipulation von Symbolen zu tun.

⊘ Das Interesse David Hilberts um 1900 (Hilberts Programm): $\rightsquigarrow$ Fragen oder geglaubte Vermutungen: Ist die Mathematik widerspruchsfrei? (Oder kann es sein, dass A wahr ist und zugleich auch nicht A wahr ist?). Und ist die Mathematik vollständig? D.h. ist alles was wahr ist auch beweisbar? Vor 1900 waren die Grundlagen zu solchen Fragen nicht da (Begrifflichkeit und dazu Beziehungsgerüst).

⊘ Um 1900 geschahen die wissenschaftlichen Aktivitäten vor allem in Europa. Europas Wissenschaft beruhte auf herausragenden Persönlichkeiten.

⊘ Um 1900 erreichte die Wissenschaften der Schock infolge der bewiesenen Existenz von nicht–euklidschen Geometrien. Nun war klar, dass geistige Realitäten existieren, die keine materielle Realisation in der damals bekannten Physik hatten. Und infolge der Existenz mehrerer Geometrien entstand die Frage nach der gültigen Geometrie in der Physik. Die Realität kann ja jeweils nur nach den Gesetzen einer einzigen Geometrie gebildet sein, sonst hätte man einen Widerspruch.

⊘ Zu unterscheiden sind auch Mathematik und die sie ausdrückende Sprache, formuliert in Zeichen auf Papier in der materiellen Realität.

⊘ Nach 1900: Russel Whitehead,... $\rightsquigarrow$ Sprache der formalen Logik.

⊘ Russels Problem mit Cantors naiven Mengendefinition: Wir bilden die Menge mit einem Barbier einer Stadt, der genau alle diejenigen Männer rasiert, welche sich nicht selbst rasieren. Frage: Rasiert sich der Barbier selbst? — Falls ja, so gehört er nicht zur Menge derjenigen, welche sich nicht selbst rasieren, er dürfte also nur andere und nicht sich selbst rasieren. Damit rasiert er sich nicht selbst: Widerspruch! Wenn er sich aber nicht selbst rasiert, so gehört er zur Menge derjenigen, die sich nicht selbst rasieren. Damit müsste er sich von sich selbst rasieren lassen, was wieder einen Widerspruch bedeutet. $\rightsquigarrow$ Plötzlich erscheinen so Paradoxien in der Logik, d.h. innerhalb der Mathematik. Es galt somit, solche Paradoxien loszuwerden. Die Klärung der entsprechenden Fragen sollten wieder zu Sicherheit führen.

⊘ Nach Hilbert müsste man aber die Widerspruchsfreiheit und die Vollständigkeit der Mathematik zeigen.

⊘ Gödel arbeitete am Hilbertschen Programm. Sein Resultat um 1932:

⊘ In einer Menge mit Operationen, die so mächtig ist, dass man Arithmetik darin betreiben kann, lässt sich die Widerspruchsfreiheit nicht beweisen. Es gibt wahre Aussagen, die nie als wahr beweisbar sind. Ebenso für falsche Aussagen. Gödel hat gezeigt, dass die Menge der wahren Aussagen mächtiger ist als die Menge der beweisbaren Aussagen (zu denen es einen endlichen Beweis gibt). Dieser gödelsche Satz hat irritiert.

⊘ Allain Turing ging der Frage nach, wie man eine unbeweisbare Aussage erkennen könne. Dazu ist die Untersuchung der beweisbaren Aussagen notwendig. Gesucht ist ein Verfahren zur Feststellung, wann etwas ein Beweis ist. Dazu hat Turing die „Turing–Maschine erfunden“. Sie besteht aus einem Eingang, an dem Symbole auf ein Band geschrieben werden können und aus einem Ausgang. Eine solche Maschine kann damit addieren und multiplizieren (vgl. Computer).

⊘ Turing hat dann definiert: Eine Aussage ist beweisbar, wenn es dazu eine Turing–Maschine gibt, die durch Abarbeitung die Sache entscheiden kann. So lässt sich zeigen, dass nicht bei allen wahren Aussagen entscheidbar ist, ob es dazu einen Beweis (also eine Turing–Maschine) gibt. Es ist daher nicht möglich anzugeben, welche mathematischen Aussagen beweisbar sind.

⊘ Zusammengefasst: Gödel $\rightsquigarrow$ Es gibt unbeweisbare Aussagen (wahre Sätze). Turing: Es ist nicht entscheidbar, welche Sätze das sind.

⊘ In dieser Zeit: John von Nehmann findet den Weg zum Computer, d.h. zur „von Neumann–Maschine“.

⊘ von Neumann war erst Logiker. Er hat mit Hilbert an den Grundlagen der Mathematik gearbeitet, hat reine Mathematik betrieben und sich aber zugleich für praktische Anwendungen interesseiert, von der numerischen Mathematik bis zur Neurophysik. Und er begann sich mit Rechenmaschinen zu beschäftigen: Er beschrieb die logische Struktur ohne Rücksicht auf technische Baudetails. Seine monumentale Entdeckung war das gespeicherte Programm. D.h. er fand die Methode, dass sich Rechenanweisungen (das Programm) genauso wie Daten in einem Speicher als Codes (hier Binärzahlen) speichern und von da bei der Verarbeitung auslesen lassen. Zwischen Programm und Daten bestand insofern also kein Unterschied. Gödel schon hatte den Aussagen Zahlen zugeordnet, von Neumann hat nun auch den Befehlen Zahlen zugeordnet (Darstellbarkeit von Aussagen und Befehlen durch Zahlen). Das hat zur Möglichkeit der praktischen Entwicklung von elektronisch gespeicherten Programmen geführt, die nun die Welt in sehr vielen Bereichen begleiten.

14.3.5 Das Flohmodell bei der Erzeugung von Fraktalen

Erzeugung von Fraktalen

⊘ Wir studieren die Erzeugung von Fraktalen am „Flohmodell“. Ein schüchternes Flohmännchen springt gegen sitzende Weibchen, aber immer nur bis zur Hälfte des Weges. Nach Ankunft orientiert

es sich neu und springt gegen ein zufällig ausgewähltes neues Weibchen nach dem selben Prinzip. Nach sehr vielen zufälligen Sprüngen werden regelmässige fraktale Muster sichtbar:

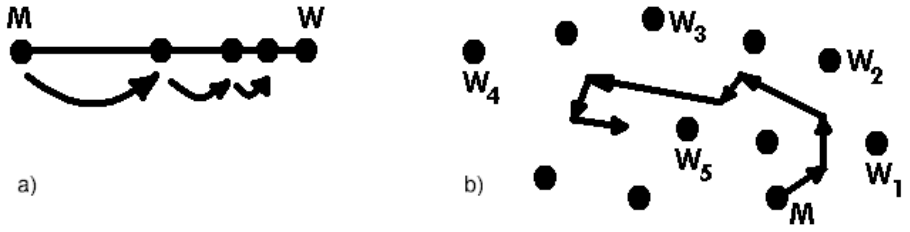


Abb. 221: Sprungprinzip

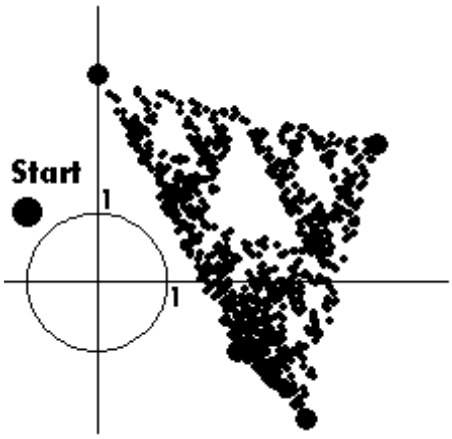


Abb. 222: 1000 Sprünge

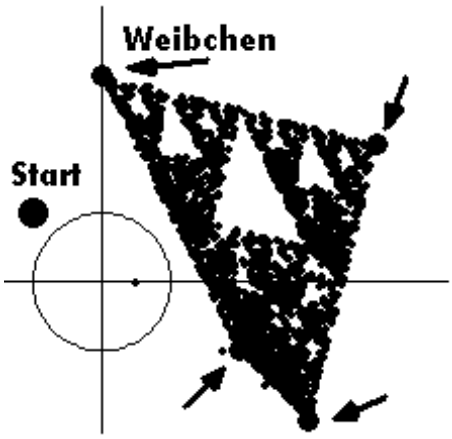


Abb. 223: 3000 Sprünge

Mathematica–Programm:

```
Remove["Global‘*"];
p[0] = -1 + I; la1 = 3000;
z[1] = 2 - I; z[2] = 4 + 2 I; z[3] = 3 - 2I; z[4] = 3I;
f[n_] := Floor[4Random[ ]] + 1;
tab1 = Table[f[n], {n, 1, la1}];
p[1] = (z[tab1[[1]]] + p[0])/2  ;
Do[p[n] = (z[tab1[[n]]] + p[n - 1])/2  , {n, 2, la1}];
tab2 = Table[p[n], {n, 0, la1}] // N;
tab3 = Table[{Re[tab2[[k]]], Im[tab2[[k]]]}, {k, 1, Length[tab2]}];
po = Map[Point, tab3];
tab4 = {z[1], z[2], z[3], z[4]};
tab5 = Table[{Re[tab4[[k]]], Im[tab4[[k]]]}, {k, 1, Length[tab4]}];
po1 = Map[Point, tab5];
Show[Graphics[
    Join[Prepend[po, PointSize[0.02]], Prepend[po1, PointSize[0.05]],
        Prepend[{Point[{Re[
      p[0]], Im[p[0]]}]}, PointSize[0.07]], {Circle[{0, 0}, 1],
          Line[{{-5, 0}, {5, 0}}], Line[{{0, -2.2},
```

```
{0, 4}}]}]], AspectRatio -> Automatic];
```

⊘ Millionen von Sprüngen führen also zu fraktalen Mustern. Falls man noch die Anzahl von Absprüngen von einem gewissen Bereich aus mit Farbe markiert, so ergeben sich Kirchenfensterartige Gebilde. Teile haben dabei ein gleiches Erscheinungsbild wie das Ganze ⇝ **Selbstähnlichkeit**.

⊘ Auffällig ist hier die Selbstorganisation des Chaos. Zufällige Süpörünge führen zu regelmässigen Mustern.

⊘ „Komplexfloh“: Die Positionen werden durch komplexe Zahlen $a + b\,i,\ \ a, b \in \mathbb{R}$ (vergleichbar mit 2–dimensionalen Punkten resp. Vektoren) dargestellt. Die Addition geschieht vektoriell, die Multiplikation distributiv wie in $\mathbb{R}$ unter Beachtung von $i^2 = -1$.

⊘ Nachstehend sind drei Folgen dargestellt, die durch quadrieren jeweils einer Anfangszahl z_1 (z.B. P_1) erzeugt werden. In nachstehenden Bild ist der Abstand von 0 einmal $|z_1| > 0$, einmal anderes Mal $|z_1| = 0$ und einmal $|z_1| < 0$. Im ersten Fall spiralt die Folge rechtsherum nach aussen, im zweiten Fall bleibt sie auf dem Einheitskreis und im 3. Fall strebt sie nach innen gegen 0. 0 heisst daher diesmal Attraktor für diese Folge.

⊘

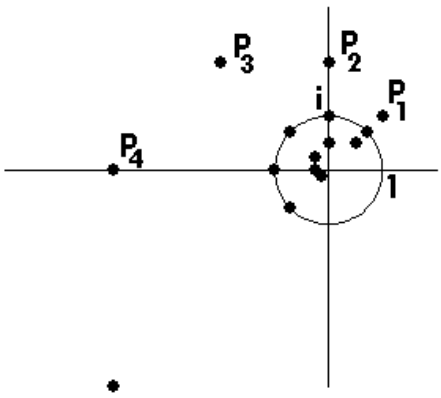


Abb. 224: 3 Quadratfolgen

⊘ „Julia–Floh“: Gegeben ist eine Konstante c. Das Sprungverhalten des Flohs folgt immer der Regel $z_n \ \mapsto\ z_{n+1} = z_n^2 + c$. z_1 wird gewählt. Dann gilt also:

$$z_1 \ \mapsto\ z_2 = z_1^2 + c \ \mapsto\ z_3 = z_2^2 + c \ \mapsto\ z_4 = z_3^2 + c \ \mapsto\ z_5 = z_4^2 + c \ \mapsto \ldots$$

⊘ Zur Gewinnung von Julia–Mengen (Fraktalen) markieren wir die Startstellen z_1 mit einer Farbe je nach der Geschwindigkeit des Verlassens einer fix gewählten Kreisumgebung von 0 mit konstantem Radius. Braucht es z.B. 10 Sprünge bis zum Verlassen des Kreises, so markieren wir die Startstelle rot, bei 20 Sprüngen orange u.s.w.. Was wir so messen, ist die Divergenzgeschwindigkeit der jeweiligen Folge. Bei Konvergenz markieren wir den Punkt schwarz. So entstehen fraktale Muster (Julia–Mengen).

⊘ Wenn man c ändert, so ändert das Muster. Kleinste Änderungen von c (z.B. um 0.001) führen zu grossen Änderungen des Musters (Schmetterlingseffekt). Oft zerfallen die Muster in „fraktalen Staub“⇝ **Cantormengen**.

⊘ „Mandelbrot–Floh“: Hier gilt ein etwas abgewandeltes Sprungprinzip. Wir wählen $z_0 = 0$ und $z_1 = c$ willkürlich. Dann folgen wir dem selben Sprung– und Färbungsprinzip wie bei den „Julia–Flöhen“. Das ergibt:

$$z_0 = 0 \ \mapsto\ z_1 = c \ \mapsto\ z_2 = z_1^2 + c = c^2 + c \ \mapsto\ z_3 = z_2^2 + c = (c^2 + c)^2 + c \ \mapsto\ z_4 = z_3^2 + c = \ldots$$

$$\ldots \mapsto z_5 = z_4^2 + c = \ldots \mapsto \ldots$$

⊘ Andere Abbildungsregeln (Algorithmen) wie z.B. $z_n \mapsto z_{n+1} = z_n \cdot \tan(z_n) + c$ führen ebenfalls zu selbstähnlichen Mustern.

⊘ Die fraktale Dimension einer Kurve:

Abb. 225: Anzahl Massstäbe der Länge l

Beim Messen einer Kurbenlänge auch im fraktalen Falle mit einem beliebig groben Massstab der Länge l tragen wir den Massstab M ungefähr eine Anzahl A mal ab. A ist dann die Länge mit der Einheit M. Nun stellt man fest, dass auch im fraktalen Falle der *ln* von A dividiert durch den *ln* von l^{-1} mit kleiner werdendem l einer Konstante zustrebt. Diese Konstante nennen wir die **fraktale Dimension der Kurve**.

Definition: **Fraktale Dimension der Kurve**:

$$D_f = \lim_{A\to\infty} \frac{lnA}{ln(\frac{1}{l})} = \lim_{A\to\infty \; resp. l\to 0} \frac{lnA}{-ln(l)} = -\frac{d\,(lnA)}{d\,(ln(l))}$$

Das kann man nachempfinden wenn man berücksichtigt, dass mit wachsender Anzanl Massstäbe A die Länge l kleiner werden muss.

Nehmen wir z.B. eine gerade Strecke der Länge L in einem normierten Massystem. Wenn man darauf A Massstablängen des beim Messen in einem beliebigen Masssystems verwendeten Masstabs der Länge l abtragen kann, so muss die Beziehung $l = const.\frac{1}{A}$ gelten. Dann ist $D_f = \lim_{A\to\infty} \frac{lnA}{-ln(const.\,\frac{1}{A})} = \lim_{A\to\infty} \frac{lnA}{-ln(const.) + ln(A)} = 1$

Anwendungen

⊘ Systeme der realen Welt sind oft rückgekoppelt. Fraktale sind also Modelle zur Beschreibung solcher Systeme: Blitze, Küsten u.s.w..

⊘ In diversen solchen Systemen sind Langfristvoraussagen nicht möglich. (Lorenz, „Schmetterlingseffekt“, keine Veränderungen der Startbedingungen führen zu grossen Veränderungen der Resultate, z.B. beim Wetter.)

⊘ Schönheit der Fraktale $\rightsquigarrow$ Verwendung in Filmen in Szenen aus der fraktalen Welt. Z.B. Starwar, künstliche Planeten.

⊘ Einfaches Werken des Menschen mit Hilfe von Maschinen: Führt oft zu Produkten, die mit Geraden, Kreisen, Ebenen, Kugeln (Zirkel und Lineal) beschreibbar sind. Dagegen erhebt sich die Welt der Fraktale mit dem Prinzip der Selbstähnlichkeit, welches die reale Welt der Natur oft treffender beschreibt.

⊘ Fraktale eröffnen einer experimentelle Mathematik mit dem Computer eine grosse Pforte.

⊘ Mandelbrot 1980: Erstmals Mandelbrotmenge gefunden (Apfelmännchen), eine Nacht Rechenzeit notwendig um ein verschwommenes Bild zu erhalten...

⊘ Interessant: Zoomfaktor bei der Mandelbrotmenge $\rightsquigarrow$ „Zoomfahrten“.

⊘ Einfaches Modell eines rückgekoppelten Systems: Eine Fernsehkammera filmt den Bildschirm (Monitor). Das gefilmte Bild wird auf dem Bildschirm sofort sichtbar und wird unmittelbar neu gefilmt. „Zünden“ des Systems mit dem Feuerzeug ...⇝ Rückkopplungssituation, Analogcomputer. Ein leichtes Schwenken der Cammera führt zu neuen Mustern.

⊘ Hier lässt sich auch die Wiederholung von Mustern beobachten ⇝ Videoanimationen...

⊘ Das Beispiel zeigt, wie ein einfachster Algorithmus zu komplexesten Strukturen führen kann.

⊘ Beispiele anderer Animationen: Orbit am Jupiter, Attraktionsgebiet des Newton–Verfahrens, Äquipotentiallinien, Magnetpolsituationen, Mandelbrot– und Juliamengen...

⊘ Mandelbrot– und Juliamengen: Die Mandelbrotmenge ist begreifbar als Inhaltsverzeichnis eines Buches mit unendlich vielen Seiten (Bildern), von denen jede einem Algorithmus entspricht...

⊘ Mandelbrot–Menge: c abgreifen, d.h. ein Punkt mit seiner Umgebung aus der Menge betrachten, entsprechend dazu Bewegung auf dem Rand der Menge (c damit ändern) ⇝ dazu Julia–Menge mit gleichem c zeigen, d.h. Algorithmus der Julia–Menge fixieren ⇝ zwei Fraktale (Mandelbrot und Julia) simultan ändern. ⇝ die Mandelbrot–Menge ist ein Inhaltsverzeichnis des Buches der Julia–Mengen.

⊘ Weitere Veranschaulichungen fraktaler Gebilde: Fahrt auf dem Lorenzattraktor, Potentialanimationen, 3D-Darstellung der Mandelbrotmenge u.s.w..

14.3.6 Computergraphik: Seifenhäute und Minimalflächen

Generelles

⊘ Zur Analyse von Minimalflächen, welche mathematisch sehr komplizierte Gebilde sind, ist die Computergraphik eine unverzichtbare Hilfe geworden.

⊘ „Bei Minimalflächen findet man oft eine Lösung mit Hilfe einer Lösung.“⇝ Seifenlösung, Seifenblasen...

⊘ Bei Siefenblasen ist die Oberflächenspannung approximativ überall gleich. Das Gleichgewicht z.B. zwischen Druckkraft, Spannkraft und Gravitationskraft führt zum Zustand minimaler potentieller Energie (vgl. Physik).

⊘ ⇝ Problem: Welche Fläche mit gegebenem Rand hat kleinste Oberfläche? (Lösung durch Seifenhaut auffindbar, falls stabil!)

⊘ Z.B. zwischen zwei Ringen entsteht das Katenoid (Kettenfläche, ähnlich Kühlturm). Analog der Wendeltrepp: Helikoid (Schraubenfläche, 1776). Spezialfall: Ebene, u.s.w..

⊘ Es gibt nicht–selbstdurchdringende und selbstdurchdringende Flächen.

⊘ Minimalflächen von Euler, Meusnier, Enneper, Gergonne, Schwarz, Henneberg, Schoen, Catalan, Costa (1983), Hoffmann und Meeks (1984), u.s.w..

⊘ Nicht alle Flächen sind stabil oder kommen in der Natur beobachtbar vor.

⊘ Minimalflächen sind in der Regel hoch symmetrisch.

⊘ Zwischen dem 18. und dem 20. Jahrhundert war kein grosser Fortschritt zu verzeichnen. Erst der Computer brachte den wesentichen Durchbruch. (Computerbild ⇝ Vermutung, / Inspiration ⇝ Beweis, Costa.)

Seifenlamellen

⊘ Seifenblasen oder Seifenlamellen sind leicht zu erzeugen. Sie üben eine Faszination aus. Sie stehen für Glück, Vergänglichkeit, Spiel, aber auch Anwendung in Wissenschaft und Technik.

⊘ Seifenblasen gestalten sich selbst. Die Geometrie ist ihnen gegeben. Sie folgen einem Pronzip der Natur, das sich verbreitet manifestiert: Hier wirkt ein formbildendes Prinzip.

⊘ Beispiele: Öl– und Fettaugen in Wasser, Kieselalgen, Algenzellen, Mikroorganismen, Regentropfen, Tau (Eigenschaft von Flüssigkeiten), Planeten u.s.w. sind wie Seifenblasen Kugeln.

⊘ Seifenhäute lassen sich zwischen Rändern einspannen oder erzeugen, z.B. zwischen Drähten.

⊘ Dünne Häute haben Dicken im Bereich von Ångström (Å) oder Lichtwellenlängen. Senkrechte Häute sind vergleichbar zu hochkant gestellten Keilen. Oben sind sie schwarz, unten farbig infolge der Interferenzen der Lichtwellen. Grund: Reflexion hinten und vorne an der Haut. Bei einem Gangunterschied von Wellenbergen (Phasen) kommt es zur Verstärkung der Wellen mit der jeweiligen Länge, bei einem Gangunterschied von Wellenberg–Wellental (Gegenphase) kommt es zur Auslöschung. Die Farbe hängt also von Gangunterschied ab. Beispiele: Blau bei ca. 2500 Å, rot bei ca. 4000 Å.

⊘ Die Farbe der Seifenhäute ist eine Folge der Interferenzen und nicht der Lichtzerlegung wie beim Prisma.

⊘ Die Oberflächenspannung $\sigma = \frac{F}{A}$ ist, wie bei jeder flächenbezogenen Spannung, eine Kraft pro Fläche. U.a. wirken in Seifenhäuten dabei Molekularkräfte. Seifenhäute sind mit kleinen Gewichten auf Zug in Richtung parallel zur Fläche belastbar. Sie reagieren dabei elastisch.

⊘ Im stabilen Zustand ist die potentielle Energie E_{pot} immer minimal. Ansonst würde die Fläche in einen Zustand mit noch kleinerer potentiellen Energie übergehen. Das führt dazu, dass bei gegebenem eingeschlossenen Gas und dessen Druck die Oberfläche minimal wird. Speziell wird die Form so gebildet, dass bei gegebenen Innenvolumen die Oberfläche minimal wird. Das führt zur Kugel im randlosen Fall: Minimale Oberfläche bei maximalem Volumen. Bei Luft in Wasser führt es zu kugelförmigen Blasen (bei überall als gleich angenommenen Druck). Innendruck und Oberflächenspannung führen zu einem Gleichgewicht.

⊘ Hängende Wassertropfen existieren nur bis zu einer gewissen Grösse. Nachher mag der Rand resp. der Querschnitt (vorerst ohne Modell der inneren Kräfte) das Gewicht nicht mehr zu tragen.

⊘ Auch bei Seifenhäuten, die auf Flächen aufliegen, werden die freien Randflächen gegen aussen so geformt, dass gedachte Randschnitte Kreisbögen sind. Lamellen auf Flächen stossen in einem rechten Winkel auf die Fläche (Kante senkrecht auf der Auflageoberfläche). Z.B. Blasen auf Wasserflächen sind daher Halbkugeln.

⊘ Dreidimensionale entsprechende Formen finden im Zeltbau Anwendung (z.B. aufgeblasene Halle).

⊘ Viele Blasen in Flüssigkeiten führen zu Schäumen. Se entstehen Netze. Z.B. in Lacken, bei Knochenstrukturen, bei geschäumten Kunststoffen.

⊘ Zwei Seifenlamellen bei Blasen mit gleichem Innendruck stosssen in einer Ebene zusammen. Sitzen zwei aneinanderstossende Blasen auf einer Ebene, so bilden sie mit der Ebene beim Zusammenstossen eine Gerade. Drei solche auf einer Ebene stossen in gleichen Winkeln zusammen, so dass sich dreimal der 120^o–Winkel zeigt.

⊘ Tenside oder Seifen wirken derart auf Wasser, dass die Oberflächenspannung herabgesetzt wird. Die chemische Zusammensetzung der Oberfläche verändert sich. Bei Seifenhautlamellen wandern die Tensidmoleküle nach aussen an die beiden äussersten Schichten der beiden Oberflächen. Die Wassermoleküle mit stärkeren Zusammenhangskräften wandern nach innen. Durch die herabgesetzte Oberflächenspannung bildet sich bei der Seifenlösung nicht sofort ein Seifenwassertropfen,

sondern eine Seifenblase. Man könnte bildlich sagen, dass hier die Luft innen geduldet, also wegen fehlender Kraft nicht durch Platzen der Blase an der dünnsten Stelle nach aussen gedrängt wird. Die Wassermoleküle entfalten die Wirkung ihrer stärkeren Kräfte bloss in flächenparalleler Richtung, nicht aber in dazu senkrechter Richtung.

⊘ Bei einem Würfel–Drahtgitter im Raum können theoretisch im Mittelpunkt maximal 6 Lamellen zusammenstossen. Frage: Ergibt sich eine Minimalfläche, oder bildet sich eine Kante durch den Mittelpunkt bis zu zwei Verzweigungspunkten mit nur 4 aneinanderstossenden Flächen? Bei einem Tetraeder–Drahtgitter bilden sich 4 Lamellen, bis Stabilität herrscht. Der Winkel zwischen den Flächen ist je 120^o, der Winkel zwischen den Kanten ca. 109^o.

⊘ Probleme mit andern Polyedern: Z.B. mit Dodekaedern lässt sich der Raum nicht lückenlos füllen. Mit dem Computer generierte abgewandelte Formen führen zum Erfolg.

⊘ Blasenpackungen oder Schäume bauen sich solange um, bis ein Minimum an potentieller Energie erreicht ist (z.B. Druckausgleich), d.h. bis die Gesamtoberfläche minimal ist. Achtung: Geht eine Zwischenfläche weg, so ist wieder Material da zur Vergrösserung der andern Flächen. . . Der instabile Zustand wird so in einen stabilen Zustand umgebaut. Dabei bleiben die Winkel immer richtig, wie es zum jeweiligen Fall gehört.

⊘ Unterdruck bei flüssigen Kanten führt zu Umbau. Beim Verfestigen von Hartschäumen lassen sich daher im Umbau befindliche instabile Strukturen beobachten.

⊘ Seifenlamellenstrukturen an räumlichen Drahtgittern führen zu äusserst ästhetischen Gebilden oder Flächenformen.

⊘ Räumliche Blasenstrukturen heissen Schäume, flächige heissen Blasenflösse.

Seifenlamellen und Minimalflächen als Modelle

⊘ Seifenlamellen dienen diversen Fachrichtungen als Modelle zur Erklärung von Strukturen: Gitterstrukturen in der Kristallographie (Trennflächen als Minimalflächen), Molekülstrukturen, Schalen von Diatomeen (Kieselalgen), Radiolarienskelette oder Muster von Insektenflügeln in der Biologie, mathematische Modelle von Schäumen z.B. beim Bier, Eischaum, Saucen, Waschmittellösungen, Hartschäume im Materialsektor, in der Astrophysik bei mehrdimensionalen Entstehungsmodellen des Universums u.s.w..

⊘ Minimalflächen zwischen Rändern haben die Eigenschaft, dass die mittlere Krümmung in jedem Punkt null ist. Das heisst, dass wenn die Fläche in eine Richtung nach oben gekrümmt ist, sie dann in der dazu senkrecht stehenden Richtung nach unten gekrümmt sein muss. Das führt lokal in jedem Punkt zur Sattelfläche. Bei Seifenblasen ist die mittlere Krümmung nicht null. Es handelt sich hier ja auch nicht um eingespannte Flächen.

⊘ Eingespannte Gummihäute führen annähernd auch auf Minimalflächen. Damit ist dem Zeltbau oder dem Leichtbau bei grösseren Überdachungen eine Möglichkeit eröffnet. Anwendungen in der Architektur, z.B. Frei Otto. $\rightsquigarrow$ Zelte, Schirme, Netze (Technik und Natur!), nur Zugbeanspruchung $\rightsquigarrow$ Leichtbau, ein Pfeiler (Stütze) notwendig.

⊘ Architektur: Formfindungsprozess notwendig. Bei der Seifenhaut erzeugt die Spannung die Form, nicht der Architekt. Hier sind Naturgesetze am Werk, nicht Menschen.

⊘ In den Netzen soll die Zugbeanspruchung in den Hauptrichtungen gleich sein, wie in der Seifenhaut.

⊘ Geschlossene und offene Netze sind kombinierbar.

⊘ Solche Flächen weisen eine hohe Formstabilität auf. Das bedeutet grosse Sicherheit und ideale Spannungsverteilung.

⊘ Bei Lufthallen: Geschlossene Blasen. Hier wirk der physikalische Formbildungsprozess. Die mathematisch–physikalische Formensprache macht aber oft einen leblosen Eindruck. Sie muss daher „künstlerisch“ überarbeitet werden ⇝ Unterstellung unter die Fuchtel ästhetischer Prinzipen.

⊘ Die sogenannte Schwarzsche Fläche, eine periodische Minimalfläche, ist lokal eine in einen Tetraeder eingespannte Sattelfläche, deren Kontur aus vier gleichlangen Stücken besteht.

⊘ Flächen und Blasenformen sind mit dem Computer generierbar. Z.B. durch Ausbeulung von Ringblasen...

⊘ Analoges gilt für das Helikoid (längst bekannt, Wendefläche, Förderschraube...)...im Prisma...

⊘ Das Katenoid ist die einzige drehsymmetrische Minimalfläche.

⊘ Als Teil des Randes ist auch eine Stützfläche möglich (Symmetrie oder Spiegelebene).

⊘ Heute sind einige unbegrenzte Minimalflächen bekannt. Die Flächen lassen sich auch mit dem Rand verändern und teils ineinander überführen.

⊘ Mathematisch ist heute nicht mehr der Rand, sondern nur noch die Krümmung wichtig (mittlere Krümmung null — ob Rand vorhanden oder Rand im Unendlichen)...

⊘ Möglichkeit für den Nachbau: Elastische Netze.

⊘ Andere Möglichkeit: Minimalflächengerät (Klimakammer!) ⇝ Seifenhautmodell, unbeständig, aber reproduzierbar, konservierbar in der Photographie (Parallelprojektoren für genaue Ausmessung!). Die gemessenen Werte können in einen weiteren Formfindungsprozess einfliessen.

⊘ Wichtig für die Beständigkeit: Test im Windkanal, Materialvorschriften!

⊘ Anwendung: Erhaltung von altem Baumbestand: Standfestigkeit hohler Bäume? Statt den Baumquerschnitt zu studieren kann man eine Seifenhaut über dem Rand studieren. Das gibt ein Modell für die Spannung...

⊘ Anwendung: Periodische Knotenflächen ⇝ Trennflächen zwischen Raumpunkten, Raumteiler, z.B. in einem Kristallgitter. Ähnlich wie bei der Schwarzschen Minimalfläche kann auch hier mit Seifenhäuten experimentiert werden. Zum gegebenen Raum mit den Gitterpunkten untersucht man hier einen reziproken Raum, wie bei Fouriertransformationen. Im realen Raum grosse Objekte werden im reziproken Raum oft klein. Im realen Raum komplizierte Objekte werden im reziproken Raum oft einfach und berechenbar. Wichtig bei periodischen Flächen. (Reziproker Raum ⇝ Knotenflächen von Fourierreihen.)

Seifenlamellen und minimale Wege

⊘ Eisenbahnnetzproblem: Gegeben sind eine Anzahl von Punkten (4 Punkte in der Skizze). Frage: Welches ist die kürzeste Verbindungsmöglichkeit zwischen den Punkten? Und gibt es eine eindeutige Lösung oder mehrere Lösungen? Es ist klar, dass dieses Problem aus Kostengründen wichtig ist. (Problem von Gauss, 1836 mit 4 Städten. Damals keine Lösung.)

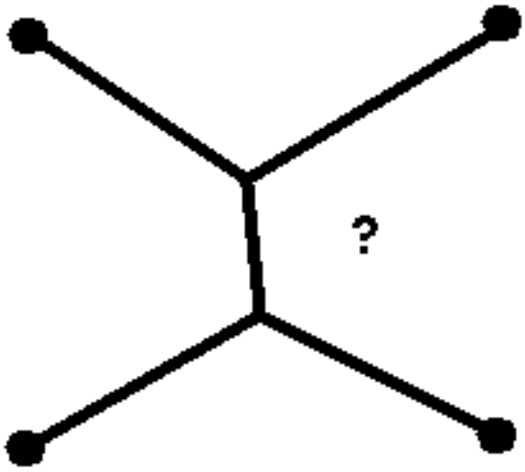


Abb. 226: Bild einer vermuteten Möglichkeit

⊘ Eine geometrisch konstruktive Lösung ist auf wenige Punkte beschränkt. Hilfsmittel Computer: Mit zunehmender Punktezahl steigt der Rechenaufwand enorm. Eine Abhilfe bietet das Minimalwegegerät: Zwischen zwei parallelen Platten werden Nadeln eingelassen. Das Ganze taucht man in eine Seifenlösung. Nach dem Herausziehen nimmt die sich bildende Seifenhaut automatisch minimale Fläche ein. Da die Höhe der Seifenlamellen überall gleich ist, entspricht die minimale Fläche den minimale Wegen. Photographisch kann man nun diese Situation wieder festhalten.

⊘ Problem: Es werden so oft nur suboptimale Lösungen gefunden und nicht unbedingt die optimale Lösung. Wiederholtes Probieren ist daher angesagt. Welche Lösung jeweils erhalten wird, lässt sich nicht einfach vorhersagen.

⊘ Beobachtung: Es bilden sich dreiwegige Knoten, wo jeweils drei Wege zusammenstossen. Diese nennt man Steinerpunkte. (Jakob Steiner aus Utzenstorf, nicht weit von Burgdorf, einer der bedeutendsten Mathematiker des 19. Jhdt..)

Abb. 227: Jakob Steiner

⊘ Mit dem Computer kann man die Steinerpunkte iterativ annähern.

Modellierung

⊘ Seifenhautmodelle sind oft einfach herstellbar, was die räumliche Struktur von Minimalflächen der Sichtbarmachung und Vermessung zugänglich macht. Für den Ingenieur bedeutet das, dass so die

Berechnung gezielter angegangen werden kann oder überhaupt erst möglich wird.

⊘ Andererseits ist die Mathematik heute damit beschäftigt, noch komplexerere Flächen zu untersuchen, die in der materiellen Realität entweder nicht stabil sind oder keinen Rand mehr haben, worin sie eingespannt werden könnten.

14.3.7 Das 4-Farben oder Landkartenproblem

⊘ Problem: Kann man die Länder einer noch so komplizierten Landkarte derart mit vier Farben einfärben, dass nie zwei an einem gemeinsamen Rand aneinanderstossende Länder dieselbe Farbe bekommen? Das Problem wurde erst mit dem Computer endgültig gelöst. Die Vierfärbung ist immer möglich.

⊘ Bis um 1970 konnte man noch vermuten, dass es sich hier um eines der nach Gödel unbeweisbaren Probleme handelt.

⊘ **Vier-Farben-Satz:** (Aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie, mit Ergänzungen aus http://intern.csg-germering.de/faecher/mathe/mathematisch/vierfarben.htm)

Der Vier-Farben-Satz (früher auch als Vier-Farben-Vermutung oder Vier-Farben-Problem bekannt) der Graphentheorie, Topologie bzw. Kartographie besagt, dass vier Farben immer ausreichen, um eine beliebige Landkarte so einzufärben, dass keine zwei angrenzenden Länder die gleiche Farbe bekommen. Dies gilt unter den Einschränkungen, dass ein gemeinsamer Punkt nicht als „Grenze“ zählt und jedes Land aus einer zusammenhängenden Fläche besteht, also keine Enklaven bzw. Exklaven vorhanden sind.

Der Satz wurde erstmals 1853 von Francis Guthrie als Vermutung veröffentlicht. Es ist offensichtlich, dass drei Farben nicht ausreichen. Mathematiker konnten beweisen, dass fünf Farben in jedem Fall ausreichen. Ein Beweis für vier Farben konnte lange nicht gefunden werden.

Den Beweis blieb Guthrie schuldig und so fragte er seinen Mathematikprofessor Augustus de Morgan (1806 - 1871), einen der führenden Mathematiker der Zeit. Dieser war von dem Problem so fasziniert, daß er noch am selben Tag einen Brief an seinen Kollegen Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) schrieb. Dann gab de Morgan eine Karte an, die zeigte, daß man mindestens vier Farben braucht. Da jedes Land an jedes andere angrenzt, braucht man zur Färbung vier Farben. Übrigens gibt es auf unserer Erde keine Region mit fünf Ländern, von denen jeweils zwei aneinander grenzen. Daraus folgt aber der Vierfarbensatz nicht.

Das „Vierfarbenproblem“, wie es bald genannt wurde, blieb aber ungelöst, bis am 17. Juli 1879 eine Notiz in der Zeitschrift „Nature“ erschien, daß der Londoner Jurist Sir Alfred Bray Kempe (1849 - 1922) das Vierfarbenproblem gelöst habe. Der Beweis erschien kurz darauf im „American Journal of Mathematics“. Dieser Beweis wurde über zehn Jahre lang als richtig und das Problem als gelöst angesehen, bis 1890 Percy John Heawood (1861 - 1955) eine Lücke im Kempeschen Beweis fand (ein Fall war falsch behandelt). Das war ihm fast peinlich, und in der Einleitung entschuldigte er sich für seine „destruktive“ Arbeit. Doch die Grundidee war genial. Sie führte später zum Ziel. Angenommen man hätte eine minimale Karte, die sich nicht vierfärben lässt. Wenn man darin zwei Nachbarländer zu einem vereint, so ist das Minumum der Länder unterschritten und man braucht jetzt 5 Farben. Nach der Wiederauftrennung sind es dann wieder nur 4 Farben. Nach diesem Prinzip kann man jetzt Fälle von geometrischen Konstellationen untersuchen.

Die Vierfarbenvermutung wurde eines der berühmten Probleme der Mathematik des 20. Jahrhunderts. Der deutsche Mathematiker Heinrich Heesch (1906 - 1995) widmete einen Großteil seines

mathematischen Lebens dieser Frage und erzielte entscheidende Fortschritte. Er konnte aber das Problem nicht endgültig lösen, weil, so seine Darstellung, ihm zu wenig Unterstützung an Personal und Computern bewilligt wurde.

Heinrich Heesch entwickelte in den 1960er und 70er Jahren Verfahren, um einen Beweis mit Hilfe des Computers zu suchen.

Darauf aufbauend konnten Ken Appel und Wolfgang Haken 1977 einen solchen finden. Der Beweis reduzierte die Anzahl der problematischen Fälle von unendlich auf 1936 Fälle (eine spätere Version sogar 1476 Fälle), die durch einen Computer einzeln geprüft wurden.

1996 konnten Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour und Robin Thomas einen modifizierten Beweis finden, der die Fälle auf 633 reduzierte. Auch diese mussten per Computer geprüft werden. (Damals ca. 1200 Stunden Rechenzeit.)

Der Vier-Farben-Satz war das erste große mathematische Problem, das mit Hilfe von Computern gelöst wurde. Der Computer ist infolge des Arbeitsaufwandes geradezu unverzichtbar. Deshalb wurde der Beweis von einigen Mathematikern nicht anerkannt, da er nicht direkt durch einen Menschen nachvollzogen werden kann. Schließlich muss man sich auf die Korrektheit des Compilers und der Hardware verlassen. Auch die mathematische Eleganz des Beweises wurde kritisiert („Ein guter Beweis liest sich wie ein Gedicht - dieser sieht aus wie ein Telefonbuch!“). o.k. — kurz ist aber oft auch dumm, denn zum Denken braucht es Zeit. Der Computer arbeitet dagegen schnell und daher elegant. Frage: Kann eine Maschine intelligent sein — kann daher elegant auch intelligent sein?

Inzwischen haben andere Forscher das Ergebnis bestätigt, so daß es heute als gesichert angesehen werden kann. Dennoch ist ein Beweis immer noch sehr umfangreich. Einen einfachen Beweis für dieses so einfach zu formulierende Problem zu finden, bleibt eine große Herausforderung für jeden Mathematiker.

Denkwürdig: Seit ca. 1900 kann man Beweise und die Beziehung zur Wahrheit formalisieren. Das führt weg vom Individuum zur formalen Überprüfbarkeit durch die Maschine. Jetzt ist der Mensch beim Überprüfen gar nicht mehr notwendig, ja er ist geradezu ausgeschlossen. Führt das nicht zum neuen Problem, dass der Mensch betreffend Überprüfung von der Maschine, d.h. von einem physikalischen Apparat, d.h. von einem materiellen Ding abgelöst worden ist? — Oder hat man vielmehr bisher aus Unverstand die Intelligenz im Beweisbaren und daher Maschninenhaften vermutet, wo sie also nicht sein kann — und somit müsste man das Intelligente im Intentionalen, in der Ideenbildung, in der Begriffsbildung, in der Erkenntnis von Methoden zu sehen verstehen? — Ja, verstehen, darum geht es eben nach wie vor. Nur der Gegenstand des zu Verstehenden hat gewechselt. Und vermutlich auch die Sichtweise von Intelligenz...

In der Aprilscherzkolumne der Zeitschrift Scientific American von 1975 berichtete Martin Gardner von den sechs „bedeutendsten“ Entdeckungen des Jahres 1974 und stellt dort die von einem gewissen William McGregor entdeckte Landkarte vor, die nicht mit vier Farben zu färben sei... Hoppla! —

Kapitel 15

Seitenblik auf Computer und Datenmengen

15.1 Zahlendarstellung in Computern, Speicheraufwand...

Ein heute üblicher Computer speichert die Daten intern im Arbeitsspecher flüchtig durch Schalterstellungen (Transistoren als Schalter verwendet) oder in Festspeichern (Festplatten und anderen Speichermedien, z.B. durch Magnetisierung von kleinen Bereichen, durch Lasermarkierungen u.s.w.). Dadurch sind jeweils zwei Zustände möglich: „Strom fliesst oder nicht“, „magnetisiert oder nicht“ u.s.w.. Diese Zustände kann man durch die Zahlen 0 und 1 symbolisieren. Damit ist eine Übersetzung der physikalischen Situation in Zahlen möglich. Wegen den beiden möglichen Ziffern kommt hier das Dualzahlensystem (Binärsystem) im Gegensatz zum üblichen Dezimalsystem zur Anwendung (Positionssysteme, Ziffern erhalten ihren Wert durch ihre Position, p–adische Systeme).
Beispiele:

$$54362 = 5 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$
$$= 1 \cdot 2^{15} + 1 \cdot 2^{14} + 0 \cdot 2^{13} + 1 \cdot 2^{12} + 0 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6$$
$$+0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1101010001011010_2$$

$$1.3 = 1 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + \ldots = 1.0100110011001100 11_2$$

Ein Speicherplaz im Computer, der eine der beiden Ziffern 0 oder 1 aufnehmen kann, nennen wir **Bit**. In 8 Bits können wir daher $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$ verschiedene Schriftzeichen abspeichern (ASCII-System). Um die Ziffern 0, 1 bis 9 mit Vorzeichen und eventuell den Dezimalpunkt abzuspeichern genügen 4 Bits, was dann $2^6 = 16$ Speichermöglichkeiten entpricht. 4 Bits nennen wir ein **Halbbyte**, 8 Bits ein **Byte**. In 2 Bytes haben wir 65536 Speichermöglichkeiten, etwa die ganzen Zahlen von -32767 bis 32767 (Datentyp Integer in diversen Programmiersprachen). Für reelle Gleitkommezahlen (Datentyp Real) werden oft 8 Bytes, d.h. 16 Halbbytes verwendet, was dann etwa 15 Ziffern Platz bietet. Wichtig sind diese Überlegungen hier für die Speicherung grosser grahisch erzeugter Datenmengen, etwa bei Fotos und zum Verständnis der verschiedenen Graphikformate.

15.2 Speicheraufwand und Farbmodelle

15.2.1 Pixelgraphik und Vektorgraphik

In einer **Pixelgraphik** (z.B. Photo) werden zu jedem Pixel in der formatabhängigen Art Farbwerte abgespeichert, was normalerweise zu sehr grossen Datenmengen führt, die beim Übermitteln (z.B. In-

ternet) oft unbrauchbar lange Übermittlungszeiten verursachen. Daher sind Kenntnisse in den einzelnen Graphikformaten wichtig. Im Gegensatz zur Pixelgraphik werden in der **Vektorgraphik** nicht Pixel, sondern Rechenanweisungen zur Berechnung der vorhandenen Kurven abgespeichert, was viel weniger Platz benötigt. Vektorgraphiken werden dann durch Vektoroperationen, Kurvenberechnungen u.s.w. manipuliert. Bei den Pixelgraphiken dagegen kommen Mengenoperationen zur Anwendung.

15.2.2 Farbmodelle

Wichtig beim Speicherplatzbedarf sind die zur Anwendung kommenden Farbmodelle, z.B.

1. **HSV** (**„Hue“** d.h. Farbe (eine Zahl für die Farbe). „Saturation“ d.h. Sättigung, „Value“ d.h. Wert. „Value“ wird auch manchmal in der bezeichnerenden Weise „Brightness“ d.h. Helligkeit genannt, das Farbmodell heißt dann entsprechend HSB).

2. **RGB** (Red, Gree, Blue). Bildschirm! Jeder der drei Farbanteile wird durch eine Zahl (Intensitätsstufe) festgelegt (z.B. 8 Bits).

3. **CMYK** (Cyan, Magenta, Yellow, Schwarz als Schlüsselfarbe (Key)). Jeder er Anteile wird wiederum durch eine Zahl definiert. Dieses System ist wichtig in der Drucktechnik, da mit diesen Farben (Cyan (spezielles Blau), Magenta (spezielles Rot), Yellow (spezielles Gelb), Schwarz (spezielles Schwarz) gegenüber von Weiss) die besten Ergebnisse erzeugt werden können.

15.2.3 Zur Grösse von Pixelgraphiken

Beispiel zur Grösse einer Pixelgraphik:

Gegeben sei ein **BMP**–Bild (RGB) mit 1’024 mal 768 = 786’432 Bildpunkte (Pixel, ehemals etwa VGA–Bildschirm). 1’024 mal 768 ergibt 786’432 Bildpunkte (Pixel). Im RGB–Modell mit 8 Bit für die Farbe Rot ($2^8 = 256$ Intensitätsstufen), 8 Bit für die Farbe Grün und 8 Bit für die Farbe Blau ergibt das $8 + 8 + 8 = 24$ notwendige Bits, also $2^{24} = 16'777'216$ verschiedene Farben. Der Speicherbedarf ist dann mindestens die Pixelzahl 786432 mal 24, d.h. $786432 \cdot 24 = 18874368$ Bit, was 2359296 Bytes oder 2.304 kByte resp. 2.25 MByte entspricht. Also: Achtung vor zu grossen Bildern!
(2^8 Bit sind ein Byte, $2^10 = 1024$ Bytes sind ein kByte u.s.w., denn bei der Speicherverwaltung zählt das Dualsystem. 786’432 mal 24 Bit ergibt 18’874’368 Bit Speicherbedarf. 18’874’368 Bit $\hat{=}$ 2’359’296 Byte = 2’304kByte = 2.25MByte.

Beim **JPEG**–Format (internettauglich) erfolgt eine Komprimierung, indem Pixelmengen mit gleichen Farben zusammengefasst werden. Die Farbspeicherung wird dadurch kleiner. Doch Achtung vor der Veränderung der Pixelzahl (d.h. bei einer Grössenveränderung des Bildes!).

Beim **GIF**–Format (internettauglich) wird die Anzahl Farben auf 256 beschränkt, was die meisten Leute sowieso nicht merken. (Achtung Patentschutz!)

Beim **TIFF**–Format kommt das Farbmodell CMYK zur Anwendung. In diesem Format ist eine verlustfreie Komprimierung möglich.

Weitere Formate siehe Literatur.

15.2.4 ZAufgabe

Aufgabe: Beschaffe dir Literatur zu den Farbmodellen und der damit verbundenen Datenkomprimierung. Bearbeite diese Literatur.

Link 1:
http://www.smarttrain.at/reframe/kompression_frame.htm

Link 2:
http://goethe.ira.uka.de/seminare/redundanz/

Kapitel 16

Mathematik und Praxis — Projektthemen

16.1 Schulung an platonischen Körpern

Platonische Körper bieten auf engstem Raume ein Maximum an geometrischen Phänomenen. Daher ist an diesem Gegenstand ein Projekt zur Schulung des räumlichen geometrischen Vorstellungsvermögens höchst sinnvoll.

16.1.1 Projektideen 1

Rahmen der Projektinhalte:

Studiere das „Innenleben “ und das „Aussenleben “ platonischer Körper sowie die Möglichkeiten zu Metamorphosen.

Modelle, Darstellungen, Geometriestudien

Stelle niveaugerecht eine Auswahl interessanter geometrischer Zusammenhänge dar anhand von präsentationsreifen Modellen (Kantenmodelle (Grashalmmodelle), Flächenmodelle, Schnittmodelle, drehbare Modelle, Klappmodelle, Ineinanderschachtelungen u.s.w.) sowie Zeichnungen (streng geometrische Risse oder Projektionen, aussagekräftige Freihandskizzen). Die Fokussierung des Interessens ist frei gestellt.

Weiter können neben den 5 platonischen Körpern auch die 13 **archimedischen Körper** oder die **92 Johnson–Körper** studiert werden. Letztere sind besonders für die Architektur interessant. Weitere interessante Aspekte sind die **Sternformen** dieser Körper sowie ihre **Umstülpungen**.

Erwartetes Resultat: Mündliche Präsentation der Modelle und Zeichnungen und des daran erarbeiteten Stoffes in einem zuvor festgelegten Rahmen.
Speziell zu beachten: Maximale Modellgrössen: $29.7 * 21.0 * 14.8\,cm^3$ zur Lagerung in Schachteln mit Boden A4, d.h. $29.7 * 21.0\,cm^2$. Elektronische Abgabe (inkl. Ausdruck) im PDF– oder DOC–Format mit A4-Seiten, maximal ein $3\,MB$–File (optimierte Graphiken!). Verspätete Abgabe ohne entschuldigbaren ehrenwerten Grund: Pro Tag 0.5 Notenpunkte Abzug.

Literatur: Unger ((Bib.: V1)), Adam u. Wyss ((Bib.: V2)), Cromwell ((Bib.: V5)), Holden ((Bib.: V6)) sowie diverse spezialisierte Literatur aus Bibliotheken, Internet und persönlich empfohlene Werke.

Weitere Informationen oder Literatur vgl. *Intranet* (von aussen nicht abrufbar):

http://www.rowicus.ch/Wir/scripts/restricted/MaterialAusZweiterHand/AAaGeometrie2/index.html

oder

http://www.rowicus.ch/Wir/scripts/restricted/MaterialAusZweiterHand/index.html

Ehemalige Arbeiten vgl. *Intranet* (von aussen nicht abrufbar):

http://www.rowicus.ch/Wir/StudentenProjekteArbeiten/index.html

Seifenhautmodelle, Darstellungen, Geometriestudien

Fertige Drahtmodelle von platonischen, archimedischen Körpern (oder ihrer Projektionen auf die Kugel), Johnsonkörpern, ihrer Sternformen u.s.w. und tauche sie in eine Seifenlösung, sodass sich Minimalflächen von Seifenhäuten bilden. Skizziere und Photographiere diese Modelle. Untersuche die geometrischen Zusammenhänge der entstandenen Flächen (freie Kanten, Winkel, optimale oder suboptimale Lösungen u.s.w.) und stelle diese in niveaugerechter mathematischer Form dar (geometrische Erfassung in Gesetzen, Beschreibung, Analyse, Durchdringung, Klassifizierung). Fertige zudem aussagekräftige Zeichnungen (streng geometrische Risse oder Projektionen, aussagekräftige Freihandskizzen). Die Fokussierung des Interessens ist frei gestellt.

Erwartetes Resultat: Mündliche Präsentation der Modelle und Zeichnungen und des daran erarbeiteten Stoffes in einem zuvor festgelegten Rahmen.
Speziell zu beachten: Maximale Modellgrössen: $29.7 * 21.0 * 14.8\,cm^3$ zur Lagerung in Schachteln mit Boden A4, d.h. $29.7 * 21.0\,cm^2$. Elektronische Abgabe (inkl. Ausdruck) im PDF– oder DOC–Format mit A4-Seiten, maximal ein $3\,MB$–File (optimierte Graphiken!). Verspätete Abgabe ohne entschuldigbaren ehrenwerten Grund: Pro Tag 0.5 Notenpunkte Abzug.

Präsentation wie im letzten Abschnitt. Literatursuche wie üblich.

Metamorphosen von Tetraederkettenringen

Klebe Tetraeder an ihren Kanten zusammen, sodass Tetraederkettenringe entstehen. Untersuche dann die Dreheigenschaften und Falteigenschaften. Skizziere und Photographiere diese Modelle in ihren markanten Stellungen. Untersuche die geometrischen Zusammenhänge der verschiedenen Positionen und stelle diese in niveaugerechter mathematischer Form dar (geometrische Erfassung in Gesetzen, Beschreibung, Analyse, Durchdringung, Klassifizierung). Fertige zudem aussagekräftige Zeichnungen (streng geometrische Risse oder Projektionen, aussagekräftige Freihandskizzen). Die Fokussierung des Interessens ist frei gestellt.

Erwartetes Resultat: Mündliche Präsentation der Modelle und Zeichnungen und des daran erarbeiteten Stoffes in einem zuvor festgelegten Rahmen.
Speziell zu beachten: Maximale Modellgrössen: $29.7 * 21.0 * 14.8\,cm^3$ zur Lagerung in Schachteln mit Boden A4, d.h. $29.7 * 21.0\,cm^2$. Elektronische Abgabe (inkl. Ausdruck) im PDF– oder DOC–Format mit

A4-Seiten, maximal ein $3\,MB$–File (optimierte Graphiken!). Verspätete Abgabe ohne entschuldigbaren ehrenwerten Grund: Pro Tag 0.5 Notenpunkte Abzug.

Präsentation wie im vorletzten Abschnitt. Literatursuche wie üblich.

16.1.2 Übersicht über die konvexen Körper aus regelmässigen Vielecken

Klasse (konvexe Körper)	Bemerkung	**Anzahl** verschiedene Körper	**Kriterium** (Flächen reguläre n–Ecke)	Abgeleitete Körper
Platonische Körper	regulär	5	gleiche Flächen	Sternformen, polare Körper
Archimedische Körper	semiregulär	13	gleiche Ecken	Sternformen, polare Körper
Einfache Körper	—	28	nicht zerlegbar Körper in regelmässigen Teil–Körper (1 Schnitt)	—
Johnson–Körper	semiregulär	92	keine Prismen oder Antiprismen oder platonischen oder archimedischen Körper	polare Körper, Semi–Stermformen
Prisma	semiregulär	∞	gleiche Ecken Flächentranslation	polare Körper, Semi–Stermformen
Antiprisma	semiregulär	∞	bez. Prisma	polare Körper, Semi–Stermformen

16.2 Schulung in praktischer Geometrie und angewandter Mathematik

16.2.1 Projektideen und Themen 2: Auswahl

Die Freiheit einer Themenwahl motiviert zum Ergreifen der Gelegenheit, einmal vertieft eigenen Fragen nachzugehen. Das bietet Befriedigung und lässt den Leistungswillen aufleben.

Rahmen der Projektinhalte:

Die folgenden Themen sind unter Beachtung des Spannungsfeldes bezüglich der Architektur zu verstehen. Denkbar ist eine eigenständige freie Behandlung der Themen. Die Themen sind wählbar aus dem Stannungsfeld zwischen Mathematik und exakten wissenschaften, Kultur, Kunst, Architektur und Praxis.

Erwartetes Resultat: Schriftliche Präsentation des erarbeiteten Stoffes in einem zuvor festgelegten Rahmen (Fachliteraturarbeit) und kurzer Vortrag.

Speziell zu beachten: Maximale Modellgrössen: $29.7 * 21.0 * 14.8\,cm^3$ zur Lagerung in Schachteln mit Boden A4, d.h. $29.7 * 21.0\,cm^2$. Elektronische Abgabe (inkl. Ausdruck) im PDF– oder DOC–Format mit A4-Seiten, maximal ein $3\,MB$–File (optimierte Graphiken!). Verspätete Abgabe ohne entschuldigbaren ehrenwerten Grund: Pro Tag 0.5 Notenpunkte Abzug.

1. Optimierungen (z.B. lineare Optimierung)

2. Entscheidungstheorie
3. Organisationstheorie, Planungsforschung
4. Spieltheorie
5. Geometrien
6. Goldener Schnitt und Konstruktionen, Fraktale, Kunst, Mathematik (Zahlenfolgen u.s.w.), Kurven, Flächen, Körper, Extremalprobleme...
7. Aus der projektiven Geometrie
8. Fraktale, Mandelbrot, Juliamengen (vgl. 303, untersuche Sprungmuster mit 2,3,4,5,6,7... Weibchen mit diverser Verteilung!)
9. Muster und Ornamente, Symmetrien und Gruppen
10. Muster von Tanzspuren und Tanzkurven, Klassifizierung nach Kriterien wie Volkszugehörigkeit u.s.w.
11. Bandornamente
12. Parkette, Kachelungen...
13. Umstülpbare Körper, Origami–Körper, Wackelkörper
14. Flechtmodelle von Körpern, Strohhalmmodelle, Flächenmodelle, Schnittflächenmodelle, Durchdringungen, Transparenzen, Eckenmodelle...
15. Rund um das Vierfarbenproblem
16. Ornamente und Kunst (arabische Ornamente, Escher, Reuterswärd u.s.w.)
17. Rund um die Fibonacci–Zahlen und den goldenen Schnitt contra rationale Zahlenverhältnisse aus der Musik
18. Mathematische Ordnungsprinzipien in der Natur
19. Logik und Alltag
20. Anwendungen von Minimalflächen
21. Minimale Wege
22. Graphentheorie
23. Räumliche Strukturen: Fuller u.s.w.
24. Das Problem der Strenge, Harmonie und Schönheit
25. Ästhetik und Ordnung
26. Themenkreis Computer
27. Codierungen, Verschlüsselung
28. Mathematik in physikalischen Problemen rund um den Bau
29. Mathematik und Kultur
30. Mathematik, Weltbild, Kosmologie, Relativität

31. Spezielle geschichtliche Themen bezüglich Mathematik, Physik und Astronomie
32. Vorschläge

Literatur: Übersichtswerk ((Bib.: V3)), diverse spezialisierte, eigen recherchierte Literatur aus Bibliotheken, Internet und persönlich empfohlene Werke.

16.3 Sonnenuhrprojekt

Vgl. Information unter

http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/ProjektW.pdf

und

http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/KursSonnenuhren.pdf

16.4 Vorschule: Kleinprojekte und projektartiges Vorgehen

Erwartetes Resultat: Eigene Literatursuche (auch Internet), Suche von Beispielen im erreichbaren Umfeld, Dokumentation, theoretische Durchdringung, schriftliche Präsentation des erarbeiteten Stoffes in einem zuvor festgelegten und mündlich kommunizierten Rahmen (Fachliteraturarbeit) ev. kurzer Vortrag und Ausstellung.

16.4.1 Themenliste zum goldenen Schnitt

1. Der goldene Schnitt: Neue Konstruktionen
2. Der goldene Schnitt in der Geometrie
3. Der goldene Schnitt in Fraktalen
4. Der goldene Schnitt in regulären und halbregulären Polyedern und ihren Derivaten
5. Der goldene Schnitt in den Zahlen
6. Der goldene Schnitt in der unbelebten Natur
7. Der goldene Schnitt in den Pflanzen
8. Der goldene Schnitt in den Tieren
9. Der goldene Schnitt im Menschen
10. Der goldene Schnitt in der Malerei
11. Der goldene Schnitt in Skulptur oder Bildhauerei
12. Der goldene Schnitt in der Musik
13. Der goldene Schnitt in der Rhythmisierung
14. Der goldene Schnitt in der Architektur
15. Der goldene Schnitt in Architekturschmuck, Sonnenuhren u.s.w.

16. Der goldene Schnitt in schmucken Gebrauchsgegenständen
17. Der goldene Schnitt in Mustern, Ornamenten, Parketten, Kachelungen
18. Der goldene Schnitt in Fahrzeugen oder Verkehrsmitteln
19. Der goldene Schnitt bei Extremwertproblemen
20. Der goldene Schnitt bei Kurven und Flächen
21. Der goldene Schnitt und Wahrscheinlichkeit

16.4.2 Themenliste zur Symmetrie

1. Symmetrie in der Natur
2. Symmetrie in Kristallformen oder Schneeflocken
3. Symmetrie in Bewegungen der Natur (z.B. Tropfenbildern oder Klangbildern in Flüssigkeiten)
4. Symmetrie in der Pflanzenwelt
5. Symmetrie bei niederen Lebewesen
6. Symmetrie bei höheren Lebewesen (Tiere, Mensch)
7. Symmetrie in Malerei und /oder Bildhauerei
8. Symmetrie in Bewegung und Musik
9. Tanzspuren: Kurven im Sand...
10. Symmetrie in der Architektur und Siedlungsgeographie
11. Symmetrie in Gebrauchsgegenständen und Entwicklungen der Technik
12. Symmetrie in der Mathematik
13. Symmetrie in der Physik
14. Symmetrie in der anschaulichen Geometrie
15. Friesgruppen und Bandornamente
16. Wandmustergruppen und Flächenornamente
17. Computergraphik und Ornamente
18. Parkettüberlagerungen
19. Programmierte Flächen, Funktionsflächen
20. Muster in nichteuklidschen Geometrien
21. Zahlenentdeckungen: Wo kommt mein Geburtsdatum (z.B. 09.09.1999 als 09091999) in der Dezimalbruchentwicklung von π vor? — Oder die Postleitzahl meinesw Wohnortes?
22. Antworten auf ganz einfache Fragen: Wieviele Topmanager verdienen zusammen die Hälfte des Volkseinkommens in unserem Land? — Wieviele Telephongespräche können über ein hachdünnes Glasfaserkabel laufen? Und vieviele Sonnen sind gleich hell wie eine Supernova? Welche der beiden Zahlen ist grösser? — Wie oft muss man ein Papier mit der Dicke von 0.1 mm falten, bis der Stapel bis zum Mond reicht? Und so fort...

16.4.3 Denkanstösse: Kristallisationskeime von Arbeitsthemen

1. „Als der Mensch den abstrakten Dingen Namen gab entstand die Mathematik.“
2. „Ein Nebel plus ein Nebel gleich zwei Nebel?“
3. „Um Bundesrat zu werden braucht man nicht einmal den Dreisatz zu kennen.“
4. „Diskalkuliegeschädigten geht es so wie Leuten, die mit einem Schnittmuster statt einem Stadtplan einen Weg in einer fremden Stadt suchen müssen.“
5. „Von allen Schulfächern ist Mathematik das einzige, in dem später Rückstände kaum mehr aufholbar sind.“
6. „Kunst und Architektur sind oft nicht höheren Abstraktionsprinzipien unterworfen und damit oft nicht von Mathematik abhängig. Sie sind daher oft rein triebhaft und somit Unkultur. Kultur entsteht durch Überwindung der Triebe. (Sinngemäss nach Freud.)“
7. „Mathematik ist unsichtbar.“
8. „Abstraktion und damit Mathematik ist die edelste Fähigkeit des Gehirns.“
9. „Ratten können höchstens bis sechs zählen.“
10. „Säuglinge bringen die Zahlen mit in die Welt.“
11. „Mathematik ist büffeln plus Plausch. . . “
12. . . .

Bildnachweis:

Die meisten Abbildungen zeigen Zeichnungen oder Photographien des Autors. Die Rechte liegen bei ihm. Bei den folgenden Abbildungen ist greifbares Material aus zweiter Hand mit einbezogen worden oder es bedarf eines Quellennachweises, damit Missverständnisse vermieden werden:
Abbildungen S. 7, 147 (Terrakotta, Steinzeit), S. 3.1.1, 9.1.1 (Höhlenmalerei, Steinzeit) und S. 3.1.5, 9.1.2 (Stonehenge mit Sonne): Bildmaterial aus der Vorlesung „Die Kunst des Eiszeitmenschen“ 1978/79 von E. Schmid, Universität Basel (Unterrichtsmaterial).
Abbildungen S. 11, 148 (Belchendreieck) und S. 11, 148 (Blauendreieck und Lage von Basel), für die Zeichnungen benutzte Kartenausschnitte: Schweizerischer Mittelschulattlas Ausgabe 1965 (Schulmaterial).
Abbildung S. 11, 148 (Aus dem Stadtplan von Augusta Raurica), für die Zeichnung benutzter Kartenausschnitt: Ein loser Plan der Colonia Augusta Raurica und des Castrum Rauracense. (Entspricht der losen Karten–Beilage zu Laur–Berger, Führer durch Augusta Raurica.)
Abbildung S. 59 (Keilschriftschreiben), 59 (Babylonische Zahlenbeispiele), 60 (Babylonisches Positionssystem), 60 (Plan), 61 (Ägyptische Zahlen), 62
153, 153 (Zahlenrechnen): Aus dem alten Mathematik–Lehrmittel (Schulbuch) für die 1. Klasse Progymnasium/ Realschule (5. Schuljahr) des Kantons Basel–Stadt, 1978
Abbildung S. 153, 153 (Renaissance–Intarsien): Collage unter Einbezug von Details aus dem Deckel eines Renaissance–Pultkasten, The Mathematical Intelligencer, Vol.22, Number 2, 2000. Der Original–Kasten befindet sich angeblich im Museum für Kusthandwerk Frankfurt am Main. Eine Angabe eines Meisters ist nicht greifbar.
Abbildung Seite 149, Tumulus-Stufenpyramide: Detail aus dem Bulletin de l'association archeologique Kergal, études et travaux, mai 1977 *Abbildungen Seite 163 (1), 163 (2), 164 (1), 166:* Aus sacred geometry by Robert Lawlor.
Abbildung Seite 168: Toms Brunés, The Secrets of Ancient Geometry
Abbildungen Seite 179 (1), 179 (2), 206 (1), 206 (1), Grundrisse: Architektur und Harmonie, Paul v. Naredi–Rainer
Abbildung Seite 164: A. Beutelspacher, B. Petri, Der goldene Schnitt / auch in Otto Hagenmaier, Der Goldene Schnitt
Abbildungen Seite 158 (4), 159 (1), 159 (2), 160 (1), 160 (2), 203 (2), 159 (2), 203 (3), 185 (3): Otto Hagenmaier, Der Goldene Schnitt
Abbildunge Seite 159 (3): Walter Arn, Phänomene zwischen Natur und Technik
Abbildunge Seite 183: Merveilleuse Notre–Dame de Lausanne, avec envoi de Paul Chaudet, textes de diff. auteurs, illustr. de diff. photogr., éd- du grand–pont, Lausanne
Abbildungen Seite 186 (1) und 186 (1): Les Mystères De La Chathedrale De Chartres, Louis Charpentier, ed. Robert Laffont, Paris
Abbildungen Seite 189: Die Geheimnisse der Kathedrale von Chartres, Louis Charpentier, Knaur, München
Einige der hier zitierten Abbildungen sind auch in veränderter Form wiedergegeben in: Heinz Studer, Baustilkunde
Interessante Grundrisse findet man auch in den diversen Kulturführern von Knaurs sowie den vielen Werken bei Könemann und Taschen

Literaturverzeichnis

[1] B.L. Van der Waerden: Die Pythagoreer, Artemis–Verlag 1979 (Bib.: A1)

[2] B.L. Van der Waerden: Erwachende Wissenschaft, Birkhäuser–Verlag 1956 (Bib.: A2)

[3] Ferderic V. Grunfeld: Spiele der Welt, deutsche Ausgabe: Krüger Verlag 1976 (Bib.: A3)

[4] Alex R. Furger: Augster Museumshefte, Nr. 10, Verlag Römermuseum Augst 1989 (Bib.: A4)

[5] P. van Delft, J. Botermans: Denkspiele der Welt, deutsche Ausgabe: Heimeran Verlag 1977 (Bib.: A5)

[6] Martin Gardener, diverse Titel, diverse deutsche Ausgaben (et al.) (Bib.: A6)

[7] Herbert Meschkowski: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bibliographischen Institut 1968 et al. (Bib.: A7)

[8] Interpretation von W. von Uxkull: Die Einweihung im alten Ägypten, H. Schwab–Verlag 1957 (Bib.: A8)

[9] 17 Bücher des Hermes Trismegistos, Neuausgabe der Fassung von 1706: ORA–Verlag 1964 (Bib.: A9)

[10] Euklid: Die Elemente (übersetzt von Clemens Thaer), Wissenschaftl. Buchgesellschaft Darmstadt 1980 (Bib.: A10)

[11] Platon: Timaios (Bib.: A11a)

[12] Vgl. auch z.B. Paul Adam/ Arnold Wyss: Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde Paul Haupt Verlag 1984 (Bib.: A11b)

[13] Becker: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, K. Alber–Verlag 1954 (et al.) (Bib.: A12)

[14] Richter: Ideale Punkte, Monaden und Nichtstandatd–Methoden, Vieweg–Verlag 1982 (et al.)(Bib.: A13)

[15] E. Nagel/ J. R. Newman: Der Gödelsche Beweis, Oldenbourg–Verlag 1979(Bib.: A14)

[16] G. Asser: Einführung in die mathematische Logik (Bd.1–3), Verlag Harri Deutsch 1977 (et al.)(Bib.: A15)

[17] Paul Bachmann: Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung, Springer–Verlag 1919/ Reprint 1976 (Bib.: A16)

[18] Helmut Hasse: Zahlenbericht, 1930, Reprint Physica–Verlag 1970 (Bib.: A17)

[19] Vandiver, Wahlin: Report of the committee on algebraic numbers; Nat. Ac. of Sci., Bulletin of the Nat. Res. Council Nr 62, Alg. Numb. 11, Washington D.C. 1928 (Bib.: A18)

[20] Sp. Marinatos: Some Words about the Legend of Atlantis, Univ. of Athen 1971 (Bib.: A19)

[21] G. Duby et al.: Merveilleuse Notre–Dame de Lausanne, Cathédrale Bourgignonne, Ed. du Grand–Pont 1975 (Bib.: A20)

[22] G. Schmidt: Kunstmuseum Basel, 150 Gemälde, Verein der Freunde des Kunstmuseums 1973 (Bib.: A21)

[23] P.H. Boerlin, C. Geelhaar. T. Falk, F. Meyer, D. Koepplin: Kunstmuseum Basel, Westermann 1980 (Bib.: A22)

[24] F.C Endres, A. Schimmel: Das Mysterium der Zahl, Zahlensymbolik im Kulturvergleich, Eugen Dietrichs Verlag 1985 (et al.) (Bib.: B1)

[25] E. Bindel: Die geistigen Grundlagen der Zahlen, Fischer Verlag 1983 (Bib.: B2)

[26] B. M. Metzger, G. L Collord, D. Goldstein, J Ferguson et al.: Faszinierende Welt der Bibel, deutsch von 1. Meyer, Ex libris Verlag 1988 (Bib.: B3)

[27] B. L. van der Waerden: Die Pythagoreer, Artemis–Verlag 1979 (Bib.: B4)

[28] Bertrand Russel: Denker des Abendlandes, deutsch Übers. in Verlag Buch und Welt 1970 (Bib.: B5)

[29] C. G. Jung et al.: Der Mensch und seine Symbole, Walter–Verlag 1979 (Bib.: B6)

[30] Paul Davis: Mehrfachwelten (Entdeckungen der Ouantenphysik), E. Dietrichs Verlag 1981 (Bib.: B7)

[31] Roman U. Sexel: Was die Welt zusammenhält, Deutsche Verlags–Anstalt 1982 (Bib.: B8)

[32] B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft, Birkhäuser–Verlag 1966 (Bib.: B9)

[33] B.L. van der Waerden: Algebra I, Springer–Verlag (Heidelberger TB) 1971 (Bib.: B10)

[34] D. R. Hofstadter: Klangmuster bei Chopin, Spektrum der Wissenschaft Juni 1982, p. 8 (Bib.: B11)

[35] A. K. Dewdney: Der Klang des Rechnens, Spektrum der Wissenschaft Juli 1987, p. 8 (Bib.: B12)

[36] M. Andronios: Musée National, Ekdotike Athenon 1975 (Bib.: B13)

[37] Autorenkollektiv, Illsutrierte Geschichte der Menschheit, Die ersten Menschen (. . . bis 10000 v. Chr.), Bechtermüntzverlag (Bib.: U1)

[38] Autorenkollektiv, Illsutrierte Geschichte der Menschheit, Die Menschen der Steinzeit, Bechtermüntzverlag

[39] Kurt Derungs, Geheimnisvolles Basel, edition amalia Bern 1999 (Bib.: U3)

[40] Heinrich Harrer, Sieben Jahre in Tibet, Ullstein (Bib.: U4)

[41] Georg Unger, das offene Geheimnis des Raumes (nach Carl Kemper), Verlag freies Geistesleben Stuttgart, 1963, 1975 (Bib.: V1)

[42] Paul Adam, Arnold Wyss, Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde, Verlag Paul Haupt Bern 1984 (Bib.: V2)

[43] Mathematik in der Praxis, Autorenkonsortium, Spektrum–Verlag Heidelberg 1989 (dazu Videos erhältlich) (Bib.: V3)

[44] Louis Charpentier, Die Geheimnisse der Kathedrale von Chartres, Knaur München, 1999 (Bib.: V4)

[45] Cromwell, Polyhedra, Cambridge Univ. Press N.Y., 1997 (Bib.: V5)

[46] Holden, Sharpes, Space and Symmetry, Dover N.Y., 1991 (Bib.: V6)

[47] Hans Walser, Der Goldene Schnitt, EAG.LE Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2003 (Bib.: V7)

[48] Axel Hausamann, Der goldene Schnitt, Books on Demand GmbH, Achen 2002 (Bib.: V8)

[49] Walter Bühler, Das Pentagramm und der goldene Schnitt (u.s.w.), Verlag freies Geistesleben, Stuttgart, 2001 (Bib.: V9)

[50] Hans Walser, Symmetrie, Teubner, Leipzig 1998 (Bib.: V10)

[51] Flachsmeyer, Feiste, Manteuffel, Mathematik und ornamentale Kunstformen, Teubner, Leipzig 1990 (Bib.: V11)

[52] Tiberiu Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder, Harri Deutsch Taschenbücher, 1968 (Bib.: V12)

[53] Frantisek Kaderavek, Geometrie und Kunst in früherer Zeit, Teubner, 1992 (Bib.: V13)

[54] Hauskeller, Michael (Hrsg.): Was das Schöne sei, Deutscher Taschenbuchverlag: dtv Nr. 4626, München 1994 (Bib.: W1)

Kapitel 17

Anhang: Farbbilder

Ca. 8 MB. Download unter:

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KArch3_Anhang.pdf

Weiteres Material (nur intern):

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/SpecialsHSB/AesthetikBauZwischenSpielStrenge/index.htm

Dort Link Literatur/Praesentation/0_ZwischenFreiheitUndStrenge.ppt suchen (PPS). Ca. 30 MB. (Nur mit Passwort.)