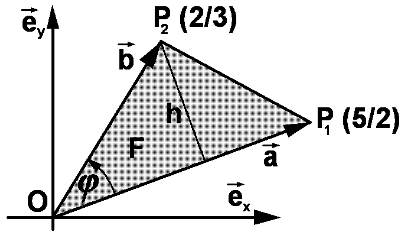
Übungen in AlgGeo ◇ Exercices en AlgGéo ◇ T. B1 ◇ II / 12

---

5 Testserien zur Vektorrechnung: • *5 séries de test concernant le calcul vectoriel:*

Serie 1 •: *Série 1*

Probl. 1



Sei • *Soit* :

$z = 0 \;\Rightarrow\; \vec{e}_x, \vec{e}_x:\; x \neq 0,\; y \neq 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?,\;\; \varphi = ?$

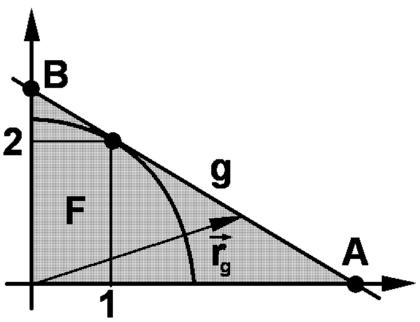
$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = ?$

$\vec{a} \times \vec{b} = ?$

$F = A = ?$

$h = ?$

Probl. 2



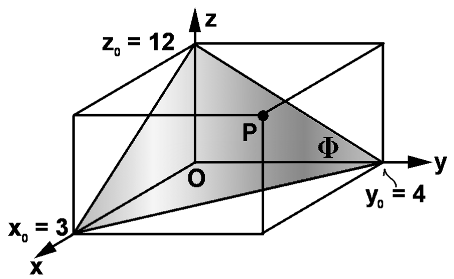
$g:\; \vec{r}_g = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t = ?$

$A(x_1/y_1) = ?$

$B(x_2/y_2) = ?$

$F = A = ?$

Probl. 3



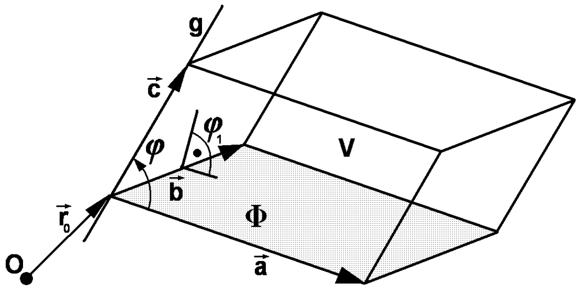
$\Phi = \Phi(x_0, y_0, z_0)$

$\Phi:\; A\,x + B\,y + C\,z + D = 0,$
$D = -144,\;\; A, B, C = ?$

Distanz Φ von $O = ?$ • *Distance* Φ *de* $O = ?$

Distanz Φ von $P = ?$ • *Distance* Φ *de* $P = ?$

Probl. 4



$\Phi: \; \vec{r}_\Phi = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$

$g: \; \vec{r}_g = \vec{r}_0 + t\,\vec{c}$

$V = ?$

$\varphi = ?$

$\varphi_1 = ?$

$\varphi_1 =$ Winkel zwischen den Ebenen.

• $\varphi_1 =$ *Angle entre les plans.*

Probl. 5

$$\left|\begin{array}{rcl} 2\,x+y+z+w & = & 5 \\ x+2\,y+z+w & = & k\cdot 5 \\ x+y+2\,z+w & = & u\cdot 5 \\ x+y+z+2\,w & = & 5 \end{array}\right|$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = ?$$

Serie 2 • : *Série 2*

Probl. 1 $\Phi: \; 3\,x + 2\,y - 5\,z + 8 = 0$ $\qquad \angle(\Phi, \Psi) = ?$ (Grad) • *Degré*

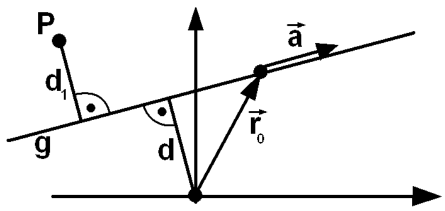
$$\Psi: \; \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Probl. 2 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \lambda \cdot \vec{b}$

(a) Berechne x so dass gilt: $\vec{a} \perp \vec{b}$. • *Calculer x de façon qu'il vaut: $\vec{a} \perp \vec{b}$*

(b) Berechne λ so dass gilt: $\vec{a} \cdot \vec{v} = 7$. • *Calculer λ de façon qu'il vaut: $\vec{a} \cdot \vec{v} = 7$.*

Probl. 3



g ist gegeben durch $\vec{r}_0$ und $\vec{a}$.
• *Soit donné g par $\vec{r}_0$ et $\vec{a}$.*

$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \;\; \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \;\; \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Berechne die Distanzen d_1 und d.
• *Calculer les distances d_1 et d.*

Probl. 4 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

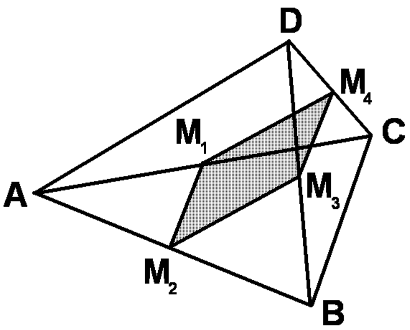
$\Phi: \; \vec{r}_\Phi = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$.

(a) Berechne die Distanz von $P_0(5, 5, 5)$ zu Φ.
• *Calculer la distance de $P_0(5, 5, 5)$ à Φ.*

(b) Berechne das Volumen des Tetraeders, das gegeben ist durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
• *Calculer le volume du tétraèdre, qui est donné par $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Serie 3 $\bullet$: *Série 3*

Probl. 1



$A(-2/0/0), C(4/2/0),$
$C(6/-1/1), D(3/1/6)$
$M =$ Mitte $\bullet$ $M =$ *milieu*

(a) Volumeninhalt $(ABCD) = ?.$
$\bullet$ *Volume* $(ABCD) = ?.$

(b) Flächeninhalt $(M_1M_2M_3M_4) = ?.$
$\bullet$ *Surface* $(M_1M_2M_3M_4) = ?.$

Probl. 2 $\Phi_1 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Phi_2 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(a) $s = \Phi_1 \cap \Phi_2 \rightsquigarrow \ \vec{x} = ?$

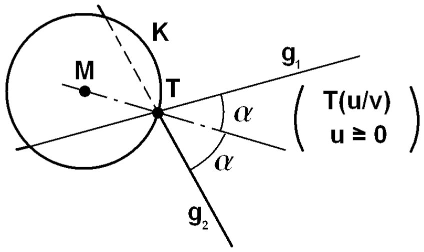
(b) Für welche $P \in s$ ist $|\overrightarrow{OP}|$ minimal? $\bullet$ *Pour quel* $P \in s$, $|\overrightarrow{OP}|$ *est minimale?*

<u>Hinweis:</u> Normalenvektoren! $\bullet$ *<u>Indication:</u> Vecteurs orthogonals!*

Probl. 3

$$\left|\begin{array}{lcl} 3x + y - 20w & = & 11 \\ 2x - 2y + z - w & = & 2 \\ x + y + 11z & = & 7 \\ -x - 8z + 16w & = & -1 \\ 4x + 2y + 11z - 20w & = & 18 \end{array}\right| \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = ?$$

Probl. 4



$K : \ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 10^2$

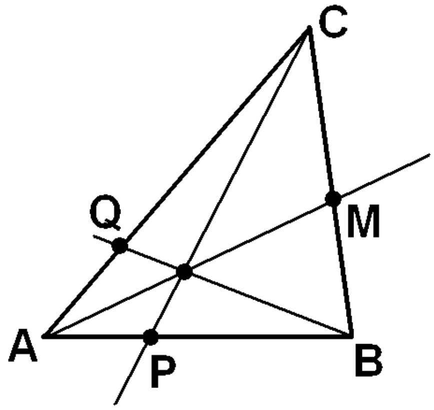
$g_1 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g_2 : \ \vec{x} = ?$

Probl. 5 $h_1 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1 \qquad h_2 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} 6$

Distanz zwischen h_1 und $h_2 = ?$ $\bullet$ *Distance entre* h_1 *et* $h_2 = ?$

Probl. 6



$A(0/0)$, $B(b/0)$, $C(r/s)$

$|\,\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PB}\,| = 1:2$
$|\,\overrightarrow{BM}:\overrightarrow{MC}\,| = 1:1$
$|\,\overrightarrow{AQ}:\overrightarrow{QC}\,| = 1:x,\ \ x = ?$

(Rechnung!) • *(Calcul!)*

Serie 4 • : *Série 4*

Probl. 1 **Geg.:** • **Donné:** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ges.: • **Trouver:** Darstellung von $\vec{w}$ als LK von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ($\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$: Basis!)
• *Représenter* $\vec{w}$ *comme CL de* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ($\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$*: base!)*

Probl. 2 $A(5/-6/2)$, $B(-7/-3/1)$, $C(x/5/z)$, $C \in \overline{AB}$

$x = ?$, $z = ?$, $\overrightarrow{AC} = ?$

Probl. 3 $A(3/2)$, $B(-1/4)$, $C(1/-3)$, $Q = ?$

$|AQ| = |BQ| = |CQ|$

Probl. 4 $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $P = P(0/1)$

$A = ?$, $B = ?$, $C = ?$, $S = ?$

Serie 5 .: *Série 5*

Probl. 1 **Geg.:** • **Donné:** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Ges.: • **Trouver:**

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(b) $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

(c) γ (Rad!)

(d) $\vec{a} \times \vec{b}$

Probl. 2 $g: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P_0 = P_0(2/-1/3)$

Ebene Φ durch P_0, $\Phi \perp g$. Plan Φ qui contient P_0, $\Phi \perp g$.
Berechne: • *Calculer:*

(a) Abstand von Φ zum Ursprung? • *Distance de* Φ *à l'origine?*

(b) $Q = \Phi \cap x$–Achse? • $Q = \Phi \cap$ *axe* x*?*

Probl. 3 **Geg.:** • **Donné:**

Kugel um $M(1/1/1)$ mit $R = 5$. • *Sphère autour de* $M(1/1/1)$ *avec* $R = 5$.

$g: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = Q(10/0/2)$

(a) Berechne $P = g_1 \cap$ *Kugel.* (Wähle diejenige Lösung mit der grössten x–Koordinate.)
• *Calculer* $P = g_1 \cap$ sphère. *(Choisir la solution avec la coordonnée x maximale.)*

(b) Ein Lichtstrahl geht von Q aus und wird in P an der Tangentialebene (Tangentialebene an die Kugel) reflektiert. Berechne den Winkel zwischen ein– und ausfallendem Strahl.
• *Un rayon de lumière part de* Q *et est réflécté dans* P *au plan tangentiel (plan tangentiel à la sphère). Calculer l'angle entre les rayons partants et arrivants.*