

Modulprüfung
2009
Klasse B 08 / B1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2009/ 18 (22) /Burgdorf/ BU 131
07.09.2009/ Zeitfenster 09:00 – 11:15

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.01% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Punkten möglich.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als die bezeichnete Anzahl n Aufgaben gegeben sind, können n Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Modulprüfung in Mathematik 2009

Klasse B 08 / B1

Viel Glück !

Erwartet werden die Lösungen von etwa 4 Aufgaben aus der folgenden Serie.
Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte.

Aufgabe 1

(18 Punkte)

(a) (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln(2x + e) + \frac{2x + 2}{x + 2}.$$

- i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen im Intervall $I_1 = [0, 2]$.
- ii. Zeichne in die Skizze die Sehne zwischen den Endpunkten des Graphen ein beim gegebenen Intervall I_1 und bestimme dazu rechnerisch den Steigungswinkel dieser Sehne im Bogenmass.
- iii. Zeichne in die Skizze auch die Tangente bei $x = 1$ ein und bestimme rechnerisch den Steigungswinkel dieser Tangente im Bogenmass.
- iv. Bestimme, um wieviele Prozente von der Sehnensteigung die Tangentensteigung grösser oder kleiner ist als die Sehnensteigung.
- v. Bestimme rechnerisch einen allfälligen Schnittpunkt der gegebenen Sehne mit der gegebenen Tangente. Zeichne allenfalls eine zweite Skizze, in der der eventuelle Schnittpunkt sichtbar gemacht ist.

(b) (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -|x|^3 + 8 \quad \text{mit} \quad y = f(x) \geq 0$$

Zwischen der x -Achse und dem Graphen liegt ein achsenparalleles Rechteck mit möglichst grossem Flächeninhalt F .

- i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen und eines möglichen Rechtecks, wie es etwa zu erwarten ist.
- ii. Bestimme rechnerisch den Flächeninhalt A des Funktionsgraphen über der x -Achse.
- iii. Bestimme die x -Koordinaten, welche notwendig sind um das Rechteck eindeutig anzugeben.
- iv. Bestimme den Flächeninhalt F des Rechtecks und das Verhältnis dieses Inhalts zum Flächeninhalt $A = \int_{y \geq 0} f(x) dx$.

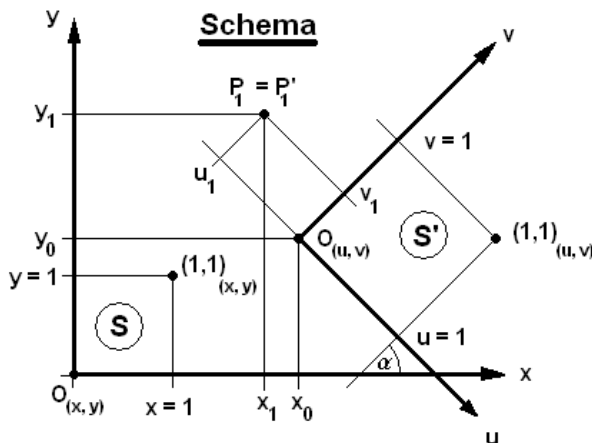
Aufgabe 2**(15 Punkte)**

Mit Hilfe der folgenden Funktion wird versucht, die Form der Mantellinie eines gegebenen liegenden Fasses zu modellieren:

$$m(x) = \cos\left(\frac{1}{2-x^2}\right), \quad I_2 = [-1, 1].$$

Hier wird $m(x)$ zur Erzeugung des Modells um die x -Achse rotiert.

- Erstelle eine saubere Skizze des Graphen der Mantellinie des Rotationskörpers.
- Berechne eine vernünftige numerische Näherung der Länge der durch $m(x)$ über I_2 gegebenen Mantellinie.
- Berechne eine vernünftige Näherung des Mantelflächeninhalts des Rotationskörpers (ohne die beiden Deckflächen, Rotation von m um die x -Achse).
- Berechne eine vernünftige Näherung des Volumeninhalts dieses Rotationskörpers.
- Wie gross müsste der Radius eines Zylinders mit dem gleichen Volumeninhalt und derselben Höhe wie beim Fass sein? Wieviel Prozent des Maximalradius des Fasses beträgt dieser Zylinderradius?

Aufgabe 3**(15 Punkte)**

Im Viertelkanton Hinterfelden in Strumpfland, einem Viertelstaat der nicht zur UNO gehört, verwendet man immer noch zwei Koordinatensysteme. Ein altes, noch aus der Kolonialzeit stammendes und anderswo vergessenes (u, v) -System und ein modernes (x, y) -System im Metermass. Das (x, y) -System nennen wir \mathbf{S} und das (u, v) -System nennen wir \mathbf{S}' . Das eine System geht aus dem andern durch Parallelverschiebung und Drehstreckung hervor. Die Einheiten lassen wir vorerst weg.

Wir können somit den Ansatz machen:

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \lambda \cdot D_\varphi \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot D_\varphi \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Dabei sind u und v die Koordinaten eines gegebenen Punktes in \mathbf{S}' und x und y die Koordinaten desselben Punktes in \mathbf{S} . D_φ ist eine noch zu bestimmende Drehmatrix:

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Die Werte von φ , λ , x_0 und y_0 sollen aus gegebenen Messungen von Punkten in beiden Koordinatensystemen bestimmt werden. Wir kennen die Koordinaten des Ursprunges von $O_{S'}$ im System S mit den Werten x_0 und y_0 :

$O_{S',(x,y)} = (x_0, y_0) = (44.36, 36.85)$. Dabei ist $O_{S,(x,y)} = (0, 0)$ (resp. $= (0.00, 0.00)$).

Weiter kennt man die Koordinaten des geometrischen Punktes $P_1 = P_1'$ im jeweils zugehörigen System. Diese sind speziell vermessen und am Boden durch eine Marke gekennzeichnet worden. Es gilt:

$P_{1,S} = (x_1, y_1) = (28.96, 43.92)$, $P_{1,S'} = (u_1, v_1) = (7.32, 12.88)$.

- Bestimme \vec{x}_0 .
- Bestimme λ und φ .
- Bestimme damit die Transformation $\vec{u} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \lambda \cdot D_\varphi \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$.
Fertige dazu auch eine Skizze an.
- Berechne die Bilder der folgenden Punkte
 $P_{2,S} = (x_2, y_2) = (10.00, 20.00)$ und $P_{3,S} = (x_3, y_3) = (18.57, 24.24)$.
- Berechne das Urbild des Punktes $P_{4,S'} = P(u_4, v_4) = (28.00, 15.00)$.

Aufgabe 4

(24 Punkte)

Eine Abbildung ist gegeben durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 19 & -4 & -6 \\ 12 & -4 & -6 \\ 16 & -17 & -1 \end{pmatrix}$$

- Bilde mit B die folgenden Vektoren ab: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Was fällt dabei auf bezüglich der Richtungen der Vektoren?

- Untersuche, ob die Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis bildet.
- Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B .
- Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B^{-1} , falls möglich.
- Bilde mit B den Vektor $\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3$ ab.
- Konstruiere eine Matrix C , welche dieselben Eigenvektoren wie B besitzt, deren Eigenwerte jedoch so geordnet sind, dass durch C eine Projektion in Richtung \vec{v}_3 auf die Ebene $\Phi = \Phi(O, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ gegeben ist. ($O = \text{Ursprung}$.)
- Bilde mit C die Punkte $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(4, 4, 4)$, $P_3(5, 12, 20)$ ab.
- Berechne die Distanz d von P_1 zur Gerade $g(P_2, P_3)$ und die Distanz d' des Bildes P_1' zu $g'(P_2', P_3')$. Um welchen Faktor verkürzt sich die Distanz beim Projizieren?

Aufgabe 5**(14 Punkte)**

Durch die Alpen wird ein 40 km langer Tunnel gegraben, welcher beim Ausbruch einen Querschnitt hat, der durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$q(x) = -\frac{1}{2} \left(e^{3x/10} + e^{-3x/10} \right) + 10, \quad q(x) \geq 0.$$

Die zu $q(x)$ gehörigen Masse sind in Metern zu verstehen.

- Berechne die Nullstellen von $q(x)$ numerisch und damit den Definitionsbereich $D_q = I_5$ der Randkurve für den Tunnelquerschnitt.
- Berechne den Querschnittsflächeninhalt des Tunnels in m^2 .
- Berechne das Ausbruchvolumen in m^3 , wenn zwei parallele „Röhren“ ausgebrochen werden.
- Das Ausbruchvolumen wird draussen in Form von Pyramiden abgelagert, welche die Abmessungen der Cheops-Pyramide haben: Ursprüngliche Höhe 146.6 m, mittlere Länge 230.3 m. Wieviele solche Pyramiden wird es geben, wenn zwei „Röhren“ ausgebrochen werden? (Zu ganzen Anzahlen runden.)
- Ein verrückter Planer möchte mit diesem Material eine Hohlkugel von einem Kilometer Aussendurchmesser formen. Wie gross würde dann die Wandstärke werden, wenn man das Volumen des Bindemittels nicht berücksichtigt?
- Entwickle zur vereinfachten Berechnung $q(x)$ in eine Potenzreihe $p(x)$ mit dem Zentrum $x_0 = 0$ bis und mit Gliedern der Ordnung 6.
- Studiere den Fehler $|q(x) - p(x)|$ im Intervall D_q graphisch. Für welche x (numerisch) wird der Fehler maximal und wie gross ist dieser Fehler dann?

Aufgabe 6**(12 Punkte)**

- Löse die Differentialgleichung $y'(x) = \frac{x^2}{2} \cdot y(x)$, $y(0) = 1$ und berechne $y(1)$.
- Der Graph des Polynoms $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch die Punkte $P_1(-2; 0)$, $P_2(0; 1)$ und hat in P_2 ein relatives Minimum. In $P_3(-1; p(-1))$ existiert ein lokales relatives Maximum. Berechne, falls möglich, die Koeffizienten und damit den Steigungswinkel der Tangente in P_1 in Grad.

— ENDE —