

Modulprüfung
2010
Klasse Mp 08p / M2p
Mathematik 1 (2. Jahr):
Analysis 3 und Statistik 1

Zeit: 120 Minuten Analysis, getrennt dazu 60 Minuten Statistik
Total 180 Minuten Arbeit

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind in der Regel zwölf Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen. Andernfalls gelten die angegebenen Punktezahlen.
- **Richtziel:** Wenn an einer vollen Prüfung von zwei Stunden mehr als vier grössere Aufgaben mit zwölf oder mehr Punkten gegeben sind, können vier Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp08 / Mp2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben!

(Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Aufgabe 1

(9 Punkte)

Bohrkern und Volumen:

Ein zylindrischer Bolzen mit dem Radius $r = 20$ wird exakt senkrecht und zentrisch zu seiner Achse mit einem Bohrer durchbohrt, dessen Radius ebenfalls $r = 20$ ist.

- (a) Skizziere ausgebohrte Volumen. (3 Punkte)
 (b) Wie gross ist das ausgebohrte Volumen? (6 Punkte)

Aufgabe 2

(30 Punkte)

Laplace-Transformationen und Rücktransformationen:

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

- (a) $f(t) = \sin(3t) + \sinh(5t) \circ \bullet Y(s) = ?$ (3 Punkte)
 (b) $f(t) = e^{t-3} e^{t+3} \circ \bullet Y(s) = ?$ (3 Punkte)
 (c) $f(t) = e^t (1 + \sin(t)) \circ \bullet Y(s) = ?$ (3 Punkte)
 (d) $f(t) = \frac{t}{t^2 + 1} \circ \bullet Y(s) = ?$ (3 Punkte)
 (e) $f(t) = \delta(t) + (1 + t)^2 \circ \bullet Y(s) = ?$ (3 Punkte)
 (f) $Y(s) = \frac{2s}{4s^2 + 1} \bullet \circ f(t) = ?$ (3 Punkte)
 (g) $Y(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1} \bullet \circ f(t) = ?$ (3 Punkte)
 (h) $Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} \bullet \circ f(t) = ?$ (3 Punkte)
 (i) $Y(s) = \frac{e^{-3}}{s-1} + \frac{e^{+3}}{s-1} \bullet \circ f(t) = ?$ (3 Punkte)
 (j) $Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{1+s^2} + \frac{4}{s+s^2} \bullet \circ f(t) = ?$ (3 Punkte)

Aufgabe 3**(18 Punkte)****Differentialgleichung:**

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' - 3y'' + 3y' - y = f(t)$.

- (a) Sei $f(t) = e^{-t}$. Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Wendetangente? (2 Punkte)
- (b) Skizziere diese Kurven über dem Bereich $D = [-1, 2.5]$. (4 Punkte)
- (c) Bestimme für diese Kurven in D die vorhandenen Extremwertstellen mit ihren Werten sowie die restlichen Wendepunkte, sofern vorhanden. (3 Punkte)
- (d) Bestimme für diese Kurven die Kurvenlängen zwischen $t = -1$ und $t = 2.5$ sowie zwischen $t = -1$ und $t = 6$. Numerische Resultate genügen. (3 Punkte)
- (e) Löse das Anfangswertproblem mit $f(t) = t^2$ und den Anfangsbedingungen $y(0) = -1$, $y'(0) = y''(0) = 0$. (6 Punkte)

Aufgabe 4**(6 Punkte)****Differentialgleichungssystem:**

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{aligned} x(t)'' - y(t) &= 0 \\ y(t) - x'(t) &= 2 \sin(t) \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= -1 \\ y(0) &= -1 \end{aligned}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \geq 0$.

Skizziere dann damit die Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sin(t) y(t) \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

Was ist hier bemerkenswert?

Aufgabe 5**(6 Punkte)****Integration:**

Zwei Mitarbeiter streiten sich darüber, welches der nachfolgend beschriebenen Volumen grösser sei. Entscheide den Streit und begründe die Entscheidung:

$$V_1 = \int_0^{4\pi} \int_0^{2\pi} (2x - y) + \sin(x \cdot y) \, dx \, dy, \quad V_2 = \int_0^{4\pi} \int_0^{2\pi} (2x - y) + \sin(x + y) \, dx \, dy.$$

Gibt es in diesen Integralen überflüssige Terme? Wenn ja, welche?

Aufgabe 6**(12 Punkte)****Praktisches Beispiel:**

Ein Fallschirmspringer springt zur Übung in einer Höhe von h über Grund aus dem Flugzeug. Die Leine zur Öffnung des Fallschirms ist bei diesem Sprung seitlich an der Sprunglücke befestigt, sodass sich der Schirm sofort öffnet. Die Falldistanz während der Entfaltung vernachlässigen wir. Für den Flug gilt die folgende Differentialgleichung (AWP):

$$a(t) = v'(t) = g - \frac{c}{m} v^2(t), \quad c = \frac{c_w \rho A}{2}$$

Dabei sind die folgenden Werte bekannt:

- (a) $h = 1000 \text{ m}$
- (b) $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ (Gravitationskonstante)
- (c) $m = 100 \text{ kg}$ (Masse)
- (d) $c_w = 1.33$ (Widerstandsbeiwert für den geöffneten Schirm)
- (e) $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^{-3}$ (Dichte der Luft)
- (f) $A = 25 \text{ m}^2$ (Stirnfläche des Schirms)

Berechne $v_\infty = v(\infty)$ mittels der Annahme $v'(\infty) = 0$. Führe dann v_∞ in der D'gl. ein. Damit lässt sich der Term $\frac{c}{m}$ substituieren. So erhält man eine separierbare D'gl., die lösbar ist. Beim Absprung soll $t = t_0 = 0 \text{ sec}$ gesetzt werden. Berechne daraus

- (a) $v(t)$ mit numerischen Koeffizienten und damit (6 Punkte)
- (b) $s(t)$ mit numerischen Koeffizienten. (3 Punkte)
- (c) Berechne danach eine numerische Näherung für die Zeit t_{total} , während der sich der Fallschirmspringer in der Luft befindet, bis er auf dem Boden auftrifft. (3 Punkte)

Aufgabe 7**(6 Punkte)****Partielle Differentialgleichung:**

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$ mit den Anfangsbedingungen in $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $t_0 = 0$:

$$T(x_1, t) = 40, \quad T(x_2, t) = 0, \quad T(x, t_0) = 40 - 4x.$$

Gesucht ist die Lösung $T(x, t)$.

(*Hinweis:* Man versuche mit Hilfe eines konstruktiven Ansatzes eine Lösung zu ermitteln, indem man mit einem möglichst einfachen Ansatz für die Zeitabhängigkeit testet, ob die Gleichung erfüllt ist.)

Aufgabe 8 **Abgabetermin ausstehende Abgaben** (Nach Massgabe der Bedeutung)

Für Studierende (Repetenten und reguläre Studierende), welche noch ausstehende Arbeiten abgeben wollen: Der letzte mögliche Abgabetermin ist am Ende der auf Teil 1 folgenden Zwischenpause anlässlich dieser Prüfung.

Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp08 / Mp 2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben!

(Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Datenkorrektur:

Gegeben sind der Mittelwert $\bar{x} = 120.8$ und die Standardabweichung $s = 6.24$ eines von einem Vertragsunternehmen untersuchten Datensatzes mit 500 Messungen. Heute wurde bekannt, dass einer unserer schwach ausgebildeten Mitarbeiter seine Messungen systematisch falsch abgelesen hat. Er hat 76 mal den Wert 110 notiert statt den Wert 130.

- (a) Versuche den wirklichen Mittelwert zu berechnen. (2 Punkte)
- (b) Versuche die richtige Standardabweichung zu berechnen oder anzunähern, falls dies möglich ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2

(9 Punkte)

Qualitätskontrolle:

Mit zwei Maschinen A und B werden Bolzen produziert. An 12 aufeinanderfolgenden Tagen ist an jeder Maschine eine Stichprobe erhoben worden. $\bar{d}_{k,A}$ und $\bar{d}_{k,B}$ sind die aus den Stichproben errechneten Mittelwerte der Durchmesser für den Tag k in μm . Nachstehend sind nur die Differenz $\bar{d}_{k,A} - \bar{d}_{k,B}$ notiert. Man teste nun die Nullhypothese, dass beide Maschinen Bolzen mit den selben mittleren Massen liefern, gegen die Alternative, dass die eine Maschine, hier A , einen systematisch höheren Mittelwert liefert als B .

- (a) Sei dabei $\alpha = 0.01$. Wenn die gemessene Situation in der Realität für die Alternativhypothese H_1 eine Wahrscheinlichkeit $P < \alpha$ ergibt, so ist H_1 bemerkenswert, unwahrscheinlich oder „signifikant“ zum Niveau α . Frage: Ist H_1 signifikant zu α ? (6 Punkte)
- (b) Frage: Kann man damit die Alternativhypothese H_1 auf der Grundlage dieses Tests akzeptieren und muss man damit H_0 verwerfen? Erkläre den Sachverhalt auf der Grundlage des Resultats! (3 Punkte)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\bar{d}_{k,A} - \bar{d}_{k,B}$	12	9	2	0	1	3	-4	5	-5	1	2	6

Aufgabe 3**(12 Punkte)****Qualitätskontrolle:**

Bei der Fließbandfertigung von Motorengehäusen werden parallel zwei automatische Lehrenbohrwerke eingesetzt, wo jeweils in den Gehäusen Präzisionslöcher bebohrt werden. Die Toleranzen dieser Löcher werden in Mikrometern gemessen (μm). Die Lehrenbohrwerke sind so eingestellt, dass bei einer Abweichungen der Mittelwerte sowie der Standardabweichung der Differenz $|Sollmass - Istmass|$ pro volle Stunde um mehr als $30 \mu m$ Alarm ausgelöst wird.

Da in letzter Zeit von der Abnehmerstelle trotzdem Reklamationen eingetroffen sind mit der Beanstandung, dass hier zwei verschiedene Qualitäten geliefert würden, wird an jedem Bohrwerk eine Stichprobe abgezogen und der Betrag der maximalen Abweichung der Lochdurchmesser vom vertraglich abgemachten Mittelwert in μm ermittelt. Nachstehend sind die beiden Datensätze aufgeführt:

$$Datensatz_1 = \{45, 7, 4, 49, 11, 7, 7, 5, 7, 41, 53, 1, 4, 41, 41, 22, 21, 2, 8, 2\} \text{ in } \mu m.$$

$$Datensatz_2 = \{27, 44, 4, 1, 16, 4, 12, 49, 2, 23, 68, 3, 13, 13, 50, 4, 42, 7, 27, 1\} \text{ in } \mu m.$$

- Ermittle die Mittelwerte der beiden Datensätze und beurteile diese bezüglich der Reklamationen. (3 Punkte)
- Ermittle die Standardabweichung der beiden Datensätze und beurteile diese bezüglich der Reklamationen. (3 Punkte)
- Zeichne von den beiden Datensätzen den Box-Whiskers-Plot im selben Diagramm und beurteile damit die Reklamationen. (6 Punkte)

Aufgabe 4**(12 Punkte)****Konfidenzintervalle:**

Eine Firma fertigt seit Monaten Halbfabrikate für Haushaltsgeräte. Es handelt sich hierbei um Lagerplatten aus Kunststoff, in welche Löcher zur Aufnahme von Achsen für Reibräder eingelassen sind. In abgekühltem Zustand sollte der wichtigste Lochabstand $a_0 = 46.50 \text{ mm}$ und dazu die Toleranz $\pm \Delta a_0 = \pm 0.01 \text{ mm}$ betragen.

Aus der Erfahrung weiss man, dass der Mittelwert bei der Fabrikation $\bar{a} = 46.497 \text{ mm}$ beträgt. Die über lange Zeit ermittelte Standardabweichung ist $s = \Delta a$, $\pm \Delta a = \pm 0.044 \text{ mm}$. Ebenso ist durch die Erfahrung erhärtet worden, dass die Werte für a einer Normalverteilung mit $\mu \approx \bar{a}$ und $\sigma \approx \Delta a$ genügen.

- Nun hat der Kunde mitgeteilt, dass im Falle $a \geq a_0 + 2 \Delta a_0$ die eingebauten Reibräder in der Regel aneinander schleifen und dass sie sich dann sehr rasch abnutzen. Daher wird ein entsprechendes Stück Ausschuss, denn die Abnehmer des Kunden weigern sich, weiterhin solche Ware zu bezahlen. Die Stücke sollen demnach automatisch vermessen werden, um den derartigen Ausschuss schon vor dem Ausliefern aus der Sendung entfernen zu können. Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Stück zu entfernen ist. (4 Punkte)
- Berechne approximativ ein in der Fabrikation anzustrebendes neues $s = \Delta a_{neu}$ so, dass $a \geq 46.50 + 2 \cdot 0.01$ mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 0.01 eintritt. (4 Punkte)

- (c) Berechne als Alternative approximativ ein in der Fabrikation anzustrebendes neues \bar{a} so, dass bei $\Delta a = 0.044 \text{ mm}$ jetzt $a \geq 46.50 + 2 \cdot 0.01$ mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 0.01 eintritt. (4 Punkte)

Aufgabe 5**(12 Punkte)****Wahrscheinlichkeiten:**

- (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Betrieb mit $n = 365$ Mitarbeitern mindestens einer am gemeinsam gefeierten Jahresabschlussfest Geburtstag hat? Und wie ist es bei nur $n = 20$ Mitarbeitern? (4 Punkte)
- (b) Zum Wurf auf eine Darts-Scheibe (Geschicklichkeitsspiel mit diversen Spielregeln und Arten, bei dem eines der gleich grossen Felder mit den Nummern von 1 bis 20 mit einem Pfeil getroffen werden kann. Oft ist das Spiel in Clubs anzutreffen): Pro Wurf ist die statistisch ermittelte Trefferwahrscheinlichkeit $P = 0.03$. Wie gross ist so die Wahrscheinlichkeit, mit 20 Würfen mindestens einen Treffer zu erzielen? (4 Punkte)
- (c) Gegeben ist eine Maschine, die durchschnittlich alle 8 Wochen (40 Arbeitstage) einmal eingesetzt wird. Gestern ist sie eingesetzt worden. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie innerhalb der nächsten 4 Tagen eingesetzt werden muss? (Die Frage kommt eben bei Arbeitsbeginn vom Werkstattchef. Er muss die Maschine revidieren, möchte die Revision jedoch gerne ein paar Tage zurückstellen.) (4 Punkte)

— ENDE —