

Modulprüfung

2012

Klasse B 11 / B1

Mathematik II (Teil lineare Algebra)

Zeit: 60 Minuten

WIR1-2012/ 30 (33) /Burgdorf/ BU 161
06.07.2012/ Zeitfenster 11:00 - 12:00

Bedingungen:

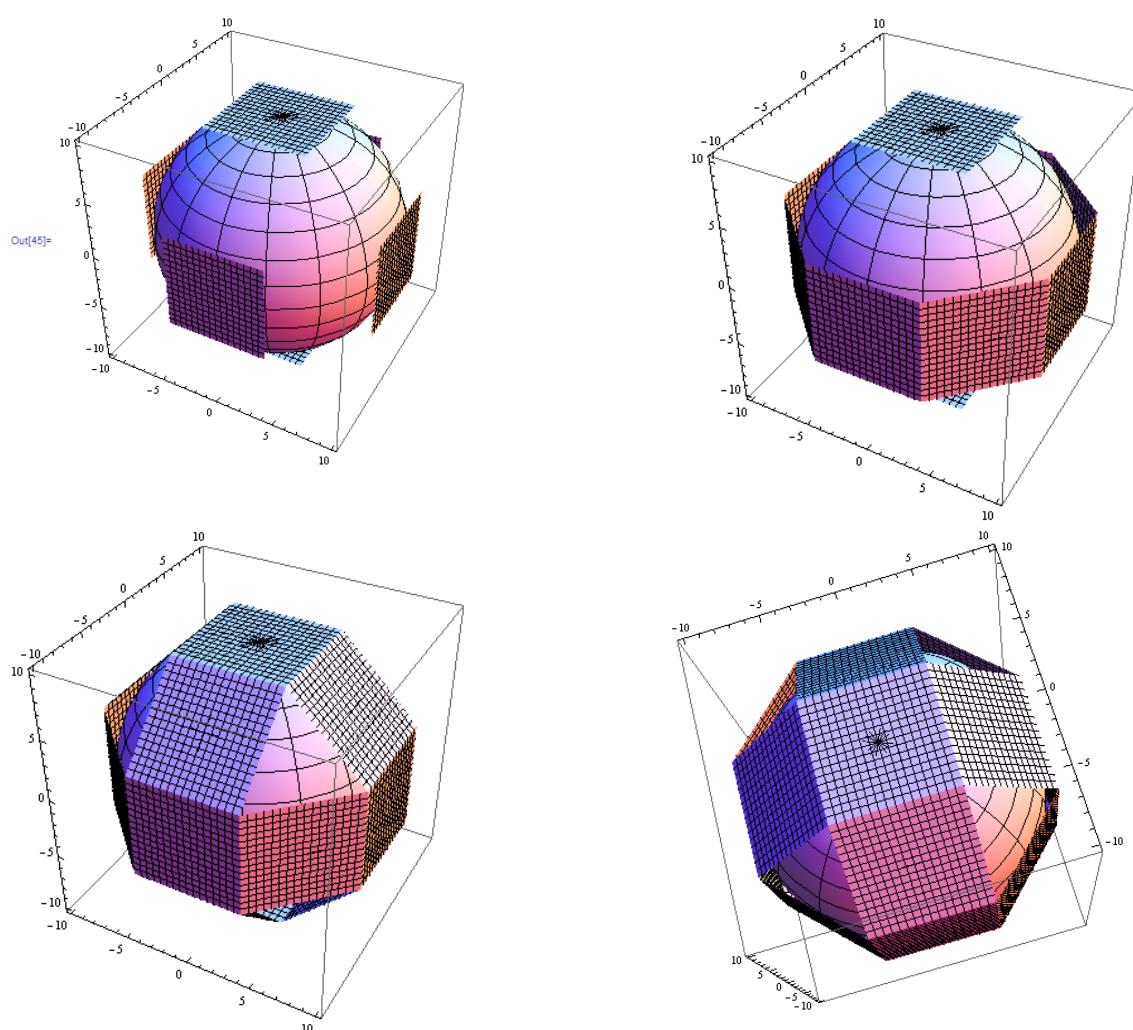
- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. **Resultate ohne Herleitung werden nicht als Gesamtlösung akzeptiert.**
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.01% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Punkten möglich.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als die bezeichnete Anzahl n Aufgaben gegeben sind, können n Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Modulprüfung in Mathematik II 2012

Klasse B 11 / B1

Viel Glück !

Erwartet werden die Lösungen von ca. 3 – 5 Aufgaben aus der folgenden Serie.
Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte (je 3).



Bilder zu Problem 1

Aufgabe 1**(9 Punkte)**

Gegeben ist eine Kugel mit Zentrum = Ursprung eines Koordinatensystems und Radius $r = 10$. Wie in den obigen Bildern gezeigt, werden an die Kugel an den Durchstosspunkten der Koordinatenachsen achsenparallele quadratische Flächen angebracht. Die Schnittlinien dieser Flächen z.B. mit der (x, y) -Ebene bilden ein regelmässiges Achteck. Entsprechendes gilt für alle Quadrate. Mit diesem Wissen lassen sich die Positionen der einzelnen Eckpunkte der Quadrate einfach berechnen. Zwischen den Quadraten bilden sich so acht Dreiecke, wovon in jedem Oktanten des Koordinatensystems je eines liegt.

- Berechne die Koordinaten der Eckpunkte desjenigen Dreiecks, welches im 1. Oktanten liegt. (Hinweis: Hier sind bei allen drei Punkten alle Koordinaten ≥ 0 . Es genügt, einen Eckpunkt zu berechnen. Für die andern Eckpunkte erhält man die Koordinaten dann mit Hilfe einer Symmetrieüberlegung.)
- Berechne den Flächeninhalt eines der Dreiecke. (Hinweis: Alle Dreiecke sind kongruent.)
- Berechne den Abstand des Schwerpunktes eines Dreiecks vom Zentrum und entscheide damit, ob die Dreiecke die Kugel berühren.
- Berechne die Grösse der Oberfläche O_{QD} , welche durch alle Quadrate und alle Dreiecke gebildet wird und berechne damit das Verhältnis $O_{QD} : O_K$, wenn O_K die Kugeloberfläche bedeutet.
- Berechne den Inhalt des Körpers, welcher durch die Quadrate und die Dreiecke definiert ist.

Aufgabe 2**(27 Punkte)**

Durch die Punkte $P_1(2, 3, 5)$ und $P_2(1, 2, 6)$ ist eine Gerade g gegeben. Eine weitere Gerade q wird durch die Punkte $Q_1(-2, -3, -5)$ und $Q_2(-3, -1, z)$ definiert.

- Berechne den kürzesten Abstand zwischen g und q , wenn $z = -2$ gilt.
- Wie gross muss die z -Koordinate gewählt werden, wenn der kürzeste Abstand zwischen g und q den Wert 10 haben soll?
- Wieviele Lösungen gibt es in der letzten Teilaufgabe?

Aufgabe 3 Sei $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix A definiert eine Abbildung, welche $g : \vec{x}(t) = t \cdot \vec{v}_1$ als Fixpunktgerade hat und welche den Vektor \vec{v}_2 in $\vec{v}_2' = -\vec{v}_2$ sowie \vec{v}_3 in $\vec{v}_3' = -2\vec{v}_3$ und \vec{v}_4 in $\vec{v}_4' = \vec{v}_4 + \vec{v}_4$ abbildet.

- Berechne die Matrix A .
- Sei $\vec{OQ} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Berechne das Bild \vec{OQ}' von \vec{OQ} bei der Abbildung mit A .
- Berechne das Bild \vec{OQ}'' von \vec{OQ}' bei der Abbildung mit $A + A^T$.

Aufgabe 4

$$M = \begin{pmatrix} -27 & 24 & -20 & 2 \\ -32 & 29 & -24 & 2 \\ -6 & 6 & -5 & 0 \\ -40 & 36 & -32 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechne die Eigenwerte von M .
- Untersuche, ob die Eigenvektoren zu einem gegebenen Eigenwert von M immer senkrecht auf den Eigenvektoren zu einem gegebenen anderen Eigenwert von M stehen.
- Berechne die Eigenwerte von M^{-1} .
- Wie verhalten sich die Eigenvektoren von M^{-1} zu jenen von M ?
- Berechne die Eigenwerte von M^T .
- Wie verhalten sich die Eigenvektoren von M^T zu jenen von M ?
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ definieren zusammen eine Matrix „ W “, welche mit O zusammen einen 4D-Spat definiert. Berechne den Inhalt „ $Inh(W)$ “ und auch denjenigen des Bildspats „ $Inh(M \cdot W)$ “.
- Berechne die Determinante von M und vergleiche das Resultat mit $\frac{Inh(M \cdot W)}{Inh(W)}$.

Aufgabe 5

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor einer Geraden g durch O . Der Punkt $Q(-1, 0, 4)$

wird um $\varphi = +\frac{\pi}{6}$ um die Achse g gedreht (im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung \vec{a}). Man kann nun die Drehmatrix finden, indem man mit Hilfe von \vec{a} ein lokales „Rechts-Orthonormalsystem“ $\vec{a}_e, \vec{b}_e, \vec{c}_e$ konstruiert und dazu die Matrix M aufschreibt, welche $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ auf $\vec{a}_e, \vec{b}_e, \vec{c}_e$ abbildet. Die Drehmatrix setzt sich nun aus $M^{-1}, D_{(\varphi, \vec{e}_1)}$ und M zusammen, wobei $D_{(\varphi, \vec{e}_1)}$ die Matrix ist, welche die Drehung um φ um die erste Achse beschreibt.

- Berechne die Matrix $D_{(\varphi, \vec{e}_1)}$ numerisch.
- Berechne das lokale Rechts-Orthonormalsystem und bilde damit die Drehmatrix um die Achse: $A = M \cdot D_{(\varphi, \vec{e}_1)} \cdot M^{-1}$.
- Berechne den gedrehten Bildpunkt Q' von Q .

Aufgabe 6 Gegeben sind die Punkte

$$P_1(0; 1; 1), P_2(1; 0; -1), P_3(1; 1; 1), P_4(2; 6; 1), P_5(-1; 5; 8), P_6(-2; 12; 0).$$

- (a) Berechne eine Matrix G , welche P_1 in P_4 und P_2 in P_5 und P_3 in P_6 abbildet.
- (b) Wenn man den Punkte P_1 um $\varphi = +32^\circ$ um die z -Achse dreht, erhält man den Punkt P_7 . (Durch die Drehung wird die positive x -Achse in Richtung positive y -Achse bewegt.) Erstelle die Drehmatrix D_φ numerisch.
- (c) Berechne $G \cdot \overrightarrow{OP_7}$ (mit Hilfe von D_φ und G).

Aufgabe 7 Gegeben sind die komplexen Zahlen $a = 2 + 3i$ und $b = 3 - 2i$.

- (a) Löse die Gleichung $a \cdot \bar{z} = b$ und stelle damit z in der Form $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ dar.
- (b) Untersuche, ob es sich bei der Multiplikation mit z in der letzten Teilaufgabe um eine Drehung handelt. Wenn ja, so bestimme den Drehwinkel φ .
- (c) Fertige von \mathbb{C} eine Skizze an mit dem Einheitskreis sowie den Punkten a , \bar{a} und $w = \frac{1}{a}$.
- (d) Löse die Gleichung $(z + b)^4 = w$. Die Lösungen bilden eine Geometrische Figur. Berechne den Schwerpunkt resp. das Zentrum dieser Figur.

WIR1-12

— ENDE —